多分荷重計によるコイルばねの座屈荷重の決定*

Load Cell Method for Buckling Analysis of Coil Springs

神足 勝英**・勝野 博**・内山 太郎**
久島 士郎**・久納 孝彦**・水野 正夫**

Katsuhide KOHTARI・Hiroshi KATSUNO・Taro UCHIYAMA
Shiroh HISAJIMA・Takahiko KUNOH・Masao MIZUNO

圧縮コイルばねの座屈荷重は、コイルばねを力学的に等価な弾性柱に置き換えることによって比較的容易に計算される。一方、完全なコイルの中心線は、柱の分岐座屈と同様に座屈荷重までは真直で、座屈荷重に達すると突然横方向にたわむと考えられるが、実際の圧縮コイルばねは、コイル中心線の初期たわみ、座巻部による荷重の偏心等により、軸圧縮力の増加とともに横たわみが増す、不完全柱としての挙動を示す。

本論文では、多分力荷重計によりコイルばねの圧縮荷重と固定モーメントを測定し、これらの関係より、完全なコイルばねの座屈荷重を推定する方法を示した。また、縦横比6～9の圧縮コイルばねについて座屈実験を行ない、本法により求めた座屈荷重がHaringxによる理論座屈荷重とよく一致することを示した。

Load Cell Method for Buckling Load Analysis of Coil Springs

Summary

Buckling load of helical compression springs can be calculated by treating them as elastic columns of equivalent compressive, flexural and shearing rigidities which vary with compression of them. If the compressive load is kept under the critical one, the axis of ideal coils remains straight, and it suddenly deflects to the lateral direction when the load reaches the critical value. But compression springs usually have initial imperfections, such as initial deflection of the coil axis and end turns which cause eccentricity of loading. Therefore, the axis deflects laterally with increasing the axial compressive load under the critical one, which is a characteristic of the imperfect columns.

This paper shows a modified Southwell's method to estimate the buckling load of the perfect springs from the experimental relations between the compressive load and the fixed end moment which are detected by the multicomponents load cell. The compression tests were carried out on the coil springs of the slenderness ratio between 6 to 9.

The experimental results show good agreement with the buckling load calculated by the Haringx's theory.

1. 緒 言

完全なコイルばねの中心軸は、柱の分岐座屈と同様に座屈荷重までは真直で、座屈荷重に達すると突然横たわみを生じるが、実際は、中心軸の初期曲がり、荷重の偏心等により、軸圧縮力の増加に伴い横たわみが増す、不完全柱としての挙動を示す。

荷重と横たわみの関係より完全な柱の座屈荷重を推定する方法の一つにSouthwell法⁽¹⁾がある。しかし、この方法では横たわみは精度よく測定されなければならないが、コイルばねでは素材が空間曲線をなしている

ため中心軸の想定が難しいうえ、圧縮中にコイル軸の長さが減少するため、横たわみ測定が困難である。

本研究では、コイルばねを圧縮により長さおよび剛性の変化する、せん断変形の大きい等価弾性柱とみなして解析し、多分力荷重計⁽²⁾(後述)により横たわみの代りに固定モーメントを測定し、これと軸圧縮荷重より、完全なコイルばねの座屈荷重を実験的に推定する方法の確立を試みた。

2. 解析方法

2.1 多分力荷重計

原稿受付 昭和61年10月20日

* ばね技術研究会 昭和61年度春季講習会にて発表

** 慶應義塾大学理工学部 (Faculty of Science and Technology, KEIO University)

多分力荷重計は、基板に正三角形状に取りつけられた3個の単軸圧縮型荷重変換器と上板とからなる(図1)。

図1 多分力荷重計

各ロードセルに作用する垂直荷重を R_1 , R_2 , R_3 とすると, X 軸, Y 軸まわりのモーメント M_x , M_y は次のように決定される。

$$M_x = (2R_1 - R_2 - R_3) \cdot \ell \quad \dots\dots(1)$$

$$M_y = (R_2 - R_3) \cdot \sqrt{3}\ell \quad \dots\dots(2)$$

これらの合成によって, 固定曲げモーメント M_7 は,

$$\begin{aligned} M_7 &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \\ &= \sqrt{(R_1 - R_2)^2 + (R_2 - R_3)^2 + (R_3 - R_1)^2} \cdot \sqrt{2}\ell \end{aligned} \quad \dots\dots(3)$$

で表される。

合モーメントの方向 θ は, $R_3 \geq R_2$ のとき X 軸から反時計まわりに,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2R_1 + R_2 + R_3}{\sqrt{3}(R_3 - R_2)} \quad \dots\dots(4)$$

また, $R_3 < R_2$ のときには, (4)式の θ に 180° を加えた値となる。

2.2 コイルばねの座屈荷重の決定

ここでは, Southwellの方法に, コイルばねに即したせん断変形と圧縮による長さとの減少を考慮した定式化を試みる。実際には, コイルばねを圧縮してい

くと, 圧縮に伴い横たわみが増すという変形挙動を示すが, 同時に進行する長さの減少と横たわみの増加を解析の便宜上分離して取扱うことにする。即ち, 次の3つの状態を考える。(i)長さ L_0 , 横たわみ η_0 (中点の横たわみ δ_0) の初期状態, (ii)長さ L , 横たわみ η_0' (中点の横たわみ δ_0') の中間状態, (iii)長さ L , 横たわみ η (中点の横たわみ δ) の最終状態。

状態(i)および(ii)のたわみ曲線 η_0 , η_0' を次のようにおく。

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \delta_0 (1 - \cos \frac{2\pi Z}{L_0}) \quad \dots\dots(5)$$

$$\eta_0' = \frac{1}{2} \delta_0' (1 - \cos \frac{2\pi Z}{L}) \quad \dots\dots(6)$$

ここで, δ_0 と δ_0' とは, ばねの長さ比 L/L_0 の関数によって, 一般に,

$$\delta_0' = f(L/L_0) \cdot \delta_0 \quad \dots\dots(7)$$

のように関係づけられる。したがって, (6)式は,

$$\eta_0' = \frac{1}{2} f(L/L_0) \cdot \delta_0 (1 - \cos \frac{2\pi Z}{L}) \quad \dots\dots(8)$$

となる。

次に状態(ii)から(iii)への変形解析をすすめる。状態(iii)のたわみ曲線 η を次のようにおく。

$$\eta = \frac{1}{2} \delta (1 - \cos \frac{2\pi Z}{L}) \quad \dots\dots(9)$$

さて, 両端固定とし, このときの固定モーメントを M_7 とすると, たわみに対する微分方程式は, 次のようになる。

$$\frac{1}{1+P/\beta} \cdot \frac{d^2 \eta}{dZ^2} - \frac{d^2 \eta_0'}{dZ^2} - \frac{M_7}{a} - \frac{P}{a} \eta = 0 \quad \dots\dots(10)$$

ここで, β はせん断剛性である。

(10)式に(8), (9)式を代入し, $Z=0$ とおくことにより, 固定モーメント M_7 は,

$$M_7 = \left\{ \frac{1}{1+P/\beta} \cdot \frac{\delta}{2} - \frac{f(L/L_0) \cdot \delta_0}{2} \right\} \cdot \frac{4\pi^2 a}{L^2} \quad \dots\dots(11)$$

となる。ここで,

$$M_7 = P\delta/2 \quad \dots\dots(12)$$

であるので, (11), (12)両式より, 次式を得る。

$$M_7 = \left\{ \frac{1}{1+P/\beta} \cdot \frac{M_7}{P} - \frac{f(L/L_0) \cdot \delta_0}{2} \right\} \cdot \frac{4\pi^2 a}{L^2} \quad \dots\dots(13)$$

ここで, 圧縮中のコイルの剛性

$$a = \frac{L}{L_0} a_0, \quad \beta = \frac{L}{L_0} \beta_0 \quad \dots\dots(14)$$

を(13)式に代入する。また,

$$\frac{4\pi^2 a_0}{L_0^2} = P_e \quad \dots\dots(15)$$

とおき, さらに

$$\frac{L}{L_0} = 1 - \frac{P}{\gamma_0} = 1 - \frac{P}{kL_0} \equiv \xi \quad \dots\dots(16)$$

$$\beta_0 = \frac{E}{G} \gamma_0 = \frac{E}{G} \cdot \frac{P}{1-\xi} \quad \dots\dots(17)$$

なる関係を用いて(13)式を整理すると, 次の関係が得られる。但し, (16)式において, γ_0 はコイルの圧縮剛性,

図2 柱の変形の初期・中間・最終状態

k はばね定数である。

$$\frac{1}{1 + \frac{G}{E} \cdot \frac{1 - \xi}{\xi}} \cdot \frac{M_\eta}{P} = \frac{1}{P_e} M_\eta \xi + \frac{1}{2} f(L/L_0) \cdot \delta_0 \quad \dots\dots(18)$$

(18)式より、縦軸に左辺の量（以下 $(M_\eta/P)'$ と記す）を、横軸に $M_\eta \xi$ （以下 M_η' と記す）をプロットすることにより、直線関係が得られ、勾配の逆数より、コイルばねの初期の長さともつ柱の座屈荷重 P_e が求まる。即ち、 P_e 値は f の関数形には依らず、 f はコイル中心軸の初期たわみの定量的な評価と関わりをもつ。関係 f として、ここで、

$$\delta_0' = (L/L_0)^2 \cdot \delta_0 \quad \dots\dots(19)$$

なる関係を仮定すれば、

$$\frac{1}{1 + \frac{G}{E} \cdot \frac{1 - \xi}{\xi}} \cdot \frac{M_\eta}{P} = \frac{1}{P_e} M_\eta \xi + \frac{1}{2} \delta_0' \quad \dots\dots(20)$$

一方、コイルばねの理論的座屈荷重は、せん断変形を考慮した、Haringx による次式で与えられる⁽³⁾。

$$P_{crth} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4P_e}{kL_0}(1 - G/E)}}{2(1 - G/E)} \cdot kL_0 \quad \dots\dots(21)$$

ここで、(21)式中の P_e として(15)式の代わりに、(20)式を用いて実験的に決定された P_e 値を用いれば、完全なコイルばねの実験的座屈荷重 P_{crex} が得られる。

3. 実験

3.1 実験装置

本実験に用いた多分力荷重計の構造、負荷方法、および荷重測定法の詳細は以下のとおりである。

多分力荷重計の三角板は、一辺144mmの正三角形の頂点にそれぞれ位置した、容量50kgfのロードセル(共和電業製 LC-50KF) 3個により支えられている。なお、三角板の寸法は、一辺の長さ294mm、厚さ17mmである。圧縮荷重は、正三角形の重心点に加わるようにし、圧縮中に両端は固定端の条件が保持されるように固定治具を用いた。コイルばねの圧縮には、島津 RS-2型(容量 2 ton) 材料試験機を使用し、一定量圧縮することにより、各荷重計の出力を動ひずみ計によって読取り、荷重 R_1 , R_2 , R_3 を求めた。

3.2 供試コイルばね

本実験で用いた圧縮コイルばねの仕様を以下に示す。

材料 : SWC

線径 d : 5.0~6.0mm

コイル平均径 D_m : 35~40mm

自由高さ L_0 : 縦横比が3~9になるようにした

有効巻数 N_a : 7.0~20.0

ピッチ角 α : 8.0~10.0°

巻方向 : 右巻

座巻 : 両端 1 巻ずつ

クローズドエンド (研削)

先端厚さ $d/4$

外側面の傾き : JIS B2707 の 1 級

3.3 実験結果

(20)式にもとづく主な供試ばねの実験結果を以下に示す。

- 縦横比 6~9 の範囲では、実験値 P_{crex} と理論値 P_{crth} はよく一致した(図 3)。

図 3 $(M\eta/P)' - M'\eta$ 線図 ($L_0/D_m < 5.24$)

- 座屈限界縦横比 5.24 付近のばねに対しては(図 4), P_{crex} は P_{crth} より 20~37% 小さい値となった。

図 4 $(M\eta/P)' - M'\eta$ 線図 ($L_0/D_m < 5.24$)

- 縦横比 5.24 以下では、(20)式の関係は得られず(図 5), P_{crex} は定められない。

図 5 $(M\eta/P)' - M'\eta$ 線図 ($L_0/D_m < 5.24$)

4. 結 言

以上本法により、完全な圧縮コイルばねの座屈荷重を、縦横比 6~9 の範囲で実験的に精度よく推定し得ることが確かめられた(図 6)。

但し、本法による初期たわみの定量的な評価に関しては、今後の研究により明らかにされるものと思われる。

図6 理論値との比較

参考文献

- (1) Southwell, R.V., Proc.Roy.Soc., London, series A, 135 (1932), 601.
- (2) 萩田・久納・水野, 日本機械学会東北支部仙台地方講演会講演論文集, No.811-2, (1981), 23.
- (3) Timoshenko, S.P., Gere, J.M., "Theory of Elastic Stability", Mc Graw-Hill, (1961), p142.