うず巻ばねの数値解析*

On the Numerical Analysis of Spiral Springs

下関 正義**・藤沼 平一**・折原 進***・篠原 宣昭***

Masayoshi SHIMOSEKI・Heiichi FUJINUMA・Susumu ORIHARA
Nobuaki SHINOHARA

わが国には、うず巻ばねに関する先駆的な研究報告1)がある。近年の海外の報告を見ても、1)を越えるものは見当たらない。たとえば、文献2)の考え方は文献1)と全く同様であるし、また文献3)などはむしろ根拠の薄い仮定に立脚している。また、うず巻ばねの計算式は積分方程式として定式化されてしまうために、手計算では実際の解析が困難であった。そこで、本報では文献1)、2)の考え方をさらに発展させ、数値的解法にまで拡張したものである。そうすることによって、焼鈍部での材料定数の変化を考慮したり、各部の残留応力を算出したりする、よりキメの細かい検討が可能になることを示した。

We can find the leading paper on spiral springs which had been published in 1952 in Japan. Among foreign reports published in recent years, we can not find papers that surpass the reference 1). For example, the paper 2) based on the same idea as the paper 1) and the paper 3) is rather based on weak grounded suppositions. And, because the equation of spiral springs is expressed into integral equation, it is difficult to analyze practically by manual calculation. Therefore, in this report, we try to analyze numerically such integral equation based on the idea of reference 1) and 2). Applying this method, it becomes possible to consider the distribution of material constants through the annealed transition zone. Furthermore, we can get the residual stress distribution along the strip.

1. まえがき

文献1)は、うず巻ばねに関する先駆的な研究報告である。その特徴は、うず巻ばねを成形加工したときの自由状態の形状を弾塑性解析に基づいて解析的に導出しているところにある。こうしたことが、最近の海外の報告に比べてみても、内容的に優れている理由である。たとえば、文献2)の考え方は文献1)と全く同様であるし、また文献3)では、アブリオリに自由状態の形状を単純な関数で近似するという根拠の乏しい仮定に立脚している。文献1)、2)のように、ばねの自由状態形状を解析的に求めていけば、適用範囲の拡張が容易であり、本報はそれらの考え方をさらに発展させたものとして位置づけられよう。

本報では、積分方程式として定式化されてしまううず巻ばねの計算式を、計算機による数値的解法によって処理を行なっている。そうすることで、本報は、

- 自由状態の形状を正確につかむために、焼鈍部で

の材料定数の分布を考慮する。

- 発生応力を正確に求めるために、各部分での残留応力を算出する。

などの、より現実に則した解析が可能であることを示している。さらに、本報は、解析的に得られている自由状態形状を求めるのに用いられる材料定数を、いくつかの簡単な実験的方法によって推定が可能であることを明らかにしている。

なお、本報での数値解析は手軽に使えるパーソナル計算機を利用し、BASICのグラフィック機能を活用している。

2. 基本的な考え方

うず巻ばねの数値解析の目的は、ばねのトルクと巻数の関係つまりトルク特性並びに鋼帯表面の応力分布とを予測する特性計算と、また逆に要求仕様に合致したばね形状、加工条件などを決定する設計計算を可能にすることである。また、数値解析のポイントは、ばねの自由状態での形状と、初期残留応力とを解析的に得ることである。ここでは、数値解析に至るまでの基本的な概念を示す。

また、式の具体的内容については、6. 補遺の章を参照されたい。

原稿受付日 昭和62年9月30日

* ばね技術研究会 昭和61年度秋季講演会にて発表

** 三菱製鋼株式会社 (Mitsubishi Steel Mfg. Co., Ltd.)

*** プレジジョンスプリング株式会社 (Precision Spring Co., Ltd.)

図3. 材料特性

になる。ここで、この場合のように、

$$x_0 > 0 \text{ [EG]}, x_0 < 0 \text{ [GH]}$$

となっているため、S字形という呼び名が付いている。ところで、

$$x_0 \text{ [FH]} < x_c \text{ [FD]}$$

であるために、ばねを香箱内に収めたとき、この区間は強制的に(FD)曲線に拘束されるわけで、全体として、ばねを香箱内に収めたときには、

$$x_0 \text{ [EF]}, x_c \text{ [FD]} \quad (8)$$

という曲率分布になる。

さて、摩擦を無視し、巻締め、あるいは巻戻し時に巻数が充分多ければ内、外端での反力は無視できるため、ばねの有効部に作用する曲げモーメントは一樣とみなせ、これが軸に生じるトルクに等しいと仮定する。つまり、ばねにトルクが負荷されたときに、鋼帯には一樣な曲げモーメントが作用するものと仮定すれば、各部分における曲率変化 Δx は、

$$\Delta x = T / (E_1 I) \quad (9)$$

となるので、このときの仮想的な曲率分布 x' は

$$x'(s) = x_0(s) + \Delta x \quad (10)$$

となるはずである。これを図示すれば、図2の(E'F'H')のようになる。もちろん、

$$x' \text{ [F'H']} < x_c \text{ [F'D]}$$

であるから、実際にはトルク T の負荷時には、

$$x' \text{ [E'F]}, x_c \text{ [F'D]} \quad (11)$$

という曲率分布となる。

一方、このときのばねの巻数 N は $s=0$ と $s=l$ との相対的な角度変化を φ として計算され、

$$\begin{aligned} N &= \varphi / 2\pi = \int_{EFD}^{E'F'D} \Delta x \cdot ds / 2\pi \\ &= \text{面積}(EFF'E'E) / 2\pi \end{aligned} \quad (12)$$

で与えられる。

さらに、トルクが増加して、ばねの仮想的な曲率分布が図2の(E'F'H')のようになったとすれば、このときの実際のばねは、

$$x_s \text{ [AF'']}, x'' \text{ [F'H'']} \quad (13)$$

という曲率分布となるだけで、考え方は全く同じである。このときのばねの巻数 N は、

$$N = \text{面積}(AEFDH''F''A) / 2\pi \quad (12)$$

で与えられる。

3. 材料定数の推定

解析に必要な各量のうち、ばね諸元、使用空間、加工条件は特性計算の場合あらかじめわかっているか、あるいは設計計算によって決定されるものである。特性計算、設計計算いずれの場合にしろ解析を正確に行なうためには、ばねの材料特性を図3のように近似したときの材料定数 E_1 , E_2 , σ_y を正確にとらえておく必要がある。

ここでは、うず巻ばね材料として良く用いられる SUS 301-CSP EH 材を対象とし、次に示す実験的手段による、材料定数の推定方法について述べる。

* 材料の引張試験……… E_1 の推定

* 自由状態の形状測定……… E_2 , σ_y の推定

* 焼鈍部硬さ分布測定……… 焼鈍部 E_2 , σ_y の推定

3.1 弾性係数 E_1 の推定

ばねの2次巻成形及び使用状態は、いずれもテンパー処理後であるため、このときの E_1 が必要となる。そこで、テンパー処理後の鋼帯から図4に示す形状の試

図4. 引張試験片形状

験片を取り出し、引張試験の供試材とする。このように引張試験により E_1 の推定を行なう。なお、試験片中央にはり付けられた1方向ひずみゲージによってひずみが測定される。

3.2 塑性係数 E_2 , 降伏応力 σ_y の推定

E_2 , σ_y の推定は実際のばねの自由状態形状から行なうのが自然である。まず、ばねの自由状態の形状を鋼帯に沿って任意の位置を x , y 平面座標として測定する。この測定は次に述べる曲率計算が十分な精度で行なえる程度の数が必要である。実際の自由状態の形状測定点の位置を図5aの○印で示す。この自由状態の形状測定の後、連続した測定点3点を通る円弧の半径によりその位置での曲率を計算し、対応する円弧の長さの総和を以て鋼帯に沿った長さ s を算出する。この測定曲率を図5bに示す曲率線図上にプロットし、さらに(6)式の x_0 中のパラメータ E_2 , σ_y を適宜変化させてプロットされた測定曲率に x_0 が添うような E_2 , σ_y

図5. a. 自由状態のうず巻ばね形状測定点

図5. b. 測定曲線

の値をみつけ出す。ここで(6)式中のパラメータ x_1, x_2 , h は既知であり、また E_1 は前節によって得られている値である。

実際の E_2, σ_y の推定では、加工条件 d_2 の異なる3種類のばねの測定曲率に共通に満足する E_2, σ_y の値を探し出し、これらを以ってこの材料の E_2, σ_y としている。

3.3 焼鈍部の材料定数 E_2, σ_y の推定

多くのうず巻ばねでは、その端部にフックの曲げ追加工のための焼鈍部分を持っている。より現実的に則した解析を行なうためには、焼鈍部分の材料定数の変化も考慮する必要がある。

SAE J 417 bによれば、ビッカース硬さと引張強さとの関係が明らかである。したがって、いま引張強さと降伏応力とが比例するものと仮定するならば、焼鈍部の硬さの測定によりその部分での降伏応力を一義的に推定できる。また、焼鈍部とばね有効部との中間にある移行部分での硬さ分布は何本かの直線で線形補間し、この補間値をもとにして鋼帯に沿った各位置での σ_y を推定する。

さらに、焼鈍部においての材料特性は弾完全塑性体と仮定し、また E_2 についても硬さに関して σ_y と同様な仮定を設定すれば、移行部分各位置での E_2 の値を線形補間によって算出することができる。

硬さ分布測定は、比較的容易に行なうことが可能であるので、焼鈍部の材料特性の推定には特に有効である。図5bの曲率線図においては、以上のようにして推定された焼鈍部、移行部の各位置の E_2, σ_y の分布よ

り計算される x_0 を示しており、有効部のみならず、焼鈍部、移行部においても実測された測定曲率によく一致している。

3.4 材料定数の決定

材料特性が図3の線形ひずみ硬化型であると近似した場合、前節までの実験的方法により、対象としている材料の材料定数は表2のように決めることができる。また、他の材料についても、同様の実験によって比較的容易にその材料定数を決めることが可能である。ただし、同一材料であってもテンパー処理条件や焼鈍処理条件が異なれば、そのつど材料定数を決め直さなければならない。

4. 数値解析

ここでは計算機を利用した数値解析例を示す。解析に用いたうず巻ばねの材料及び材料定数は表2で、またばねの諸元及び要求仕様は表3に示す通りである。

表2 材料定数

材 料	SUS 301-CSP EH		
材料定数	E_1	17760	kgf/mm ²
	E_2 (焼鈍部)	890 (0)	kgf/mm ²
	σ_y (焼鈍部)	190 (60)	kgf/mm ²
軸側焼鈍部長さ	l_a	75	mm
軸側移行部長さ	l_b	30	mm

表3 諸元及び要求仕様

ばね諸元	h	0.23	mm
	b (板巾)	7	mm
	l	4000	mm
使用空間	d_c	$\phi 58$	mm
	d_s	$\phi 15$	mm
加工条件	d_1	$\phi 28$ (一定)	mm
	d_2	$\phi 10.5$	mm
要求仕様	トルク	9.0	kgf・mm 以上 (巻数 6.0 のとき)
	トルク	14.0 ± 1.0	kgf・mm (巻数 18.0 のとき)
	使用巻数範囲	6.5 ~ 18.5	巻

4.1 数値解析の手順

数値解析の手順については、ブロック図として図6に示す。

実際の数値解析においては、焼鈍部の材料定数分布を考慮するために、展開長 l の分割数 n_1 を比較的大きくとり、また被積分関数が滑らかであるという理由から、(12)式の数値積分は単純な台形公式を用いている。また、今の場合加工条件としての1次巻曲率 x_1 は一定

図 6. 数値解析の手順

曲率であるが、(4)式で示される通り、任意な形をとっていても解析の手順には何ら変わりはない。したがって S 字形ではなく単純うず巻形のばねでも全く同じ取り扱いである。

4.2 自由状態の形状

(6)式によって自由状態の曲率分布 x_0 が得られれば、 $s=s_0$ の接線角 θ とその位置の座標 x , y は

$$\theta = \int_0^{s_0} x_0 ds, \quad x = \int_0^{s_0} \cos \theta ds$$

$$y = \int_0^{s_0} \sin \theta ds \quad (14)$$

で表わされる。つまり x_0 によって、ばねの自由状態での形状を知ることができ、これを図 7 a, b に示す。

図 7. a. 焼鈍部を考慮した場合の形状

図 7. b. 焼鈍部を考慮しない場合の形状

焼鈍部での材料定数の分布を考慮した場合の形状が図 7 a であり、考慮しない場合の形状が図 7 b である。図 7 a は、実際のばね形状と良く一致しており、この考慮をすることによって、現実により近い数値解析が可能であることを示している。なお、ばね有効部と焼鈍部との間の移行部分については、材料定数の分布を線形補間している。また、ここでは展開長 l に関する分割数 n_1 を非常に大きくとることにより滑らかな形状を得ており、(14)式の数値積分は(12)式の場合と同じく台形公式を用いている。

4.3 曲率線図

図 8 は x_1 , x_2 及び x_0 , x_s として x_0 の曲率分布を計算したものである。もちろん x_0 は焼鈍部の材料定数分布を考慮し、また x_1 は一定曲率である。ここでは(12)式で示される積分計算が実用上充分な精度で行なえば良いだけであるので、 l に関する分割数 n_1 は前節に比べて小さくとっている。また図中 x_a , x_b は使用される巻数範囲(この場合には、 $N=6.5, 18.5$)においての(10)式で表わされる曲率分布である。

4.4 トルク特性

図 8 の曲率線図において、(9)式のトルク増分を与えた場合の曲率変化に対して(12)式の積分計算を順次繰り返してゆけば、トルク特性が図 9 のように得られる。

図 8. 曲率線図

図 9. トルク特性

トルク増分を得るためのトルク分割数 n_2 は特性曲線が滑らかになるように選んでいる。また図中の○印は特定巻数(この場合 $N=6, 18$)での要求されるトルク仕様を表わしている。図中の表にはその巻数でのトルク計算値を載せており、さらに同表には計算上のこのばねの最大巻数及びトルク終値も記載されている。

□印はこのばねの巻締め時と巻戻し時の実測トルクの平均値を示している。計算値は実測値と非常に良く一致しており、このことは本報による数値解析の妥当性、並びに材料定数の実験的推定方法の妥当性を示していると言えよう。

4.5 表面応力線図

図10に、(7)式で計算される表面での初期残留応力 σ_0 、巻数0及び最大での表面応力、使用巻数($N=6.5, 18.5$)での表面応力の分布を示す。縦軸は応力、横軸は曲率線図と同じ軸側から鋼帯に沿ってとった長さ s を表している。さらに図中には、巻数0～最大、及び使用巻数間のそれぞれの表面応力振幅も表わされている。

図10. 表面応力線図

ここでの表面応力は、いずれも初期残留応力を考慮した実質的な表面実効応力の分布である。

4.6 加工条件を変化させた場合のトルク特性

4.1節の数値解析の手順さえ確立すれば、加工条件などが変わった場合、主にトルク特性に関してのシミュレートは容易である。図11 aは2次巻軸径を変化させた場合のトルク特性の変動を示し、そして図11 bは1次巻径 d_1 、2次巻軸径 d_2 を共に変えた場合でのトルク特性の変動を表わしている。

さらに、図11 c, dは d_1 、 d_2 をパラメータとした場合の特定巻数(この場合トルク指定のある巻数 $N=6, 18$)でのトルク変化を立体的に表現したものである。同図によって、ばね諸元、使用空間、材料定数を同一にし、加工条件を変えた場合でのトルク特性の変化を全体的に見通すことができる。仮に、特定巻数でのトルク要求値が求められている場合、ばねの加工条件の決定をこれらの図をもとに設計段階で行なうことが可能である。

図11. a. 2次巻軸径を変化させた場合のトルク特性

図11. b. 1次巻径, 2次巻軸径を変化させた場合のトルク特性

図11. c. 加工条件をパラメータとしたトルク ($N=6.0$)

図11. d. 加工条件をパラメータとしたトルク ($N=18.0$)

5. あとがき

うず巻ばねの計算式は、積分方程式として定式化されるために、手計算では実際の解析が困難であった。その点、本報に示す計算機での数値解法によれば、処理は容易である。しかも、位置による材料定数の分布を考えさえすれば、焼鈍部の形状もより現実に則した近似となり、解析も実際のものに近づけることが可能である。

さらに、成形加工時の初期残留応力を考慮に入れた実効曲げ応力の分布も算定できるため、折損位置の予測が可能である。これに、表面応力と寿命との実験的相関関係を加味さえすれば、設計段階での寿命推定にまで拡張することができる。

また、解析結果が実測のものとはほぼ一致していることから、解析方法と並びに材料定数の実験的推定方法とが妥当なものであると言える。

6. 補遺

2章では x_c , x_s , x_1 , x_2 , x_0 , それに σ_0 の具体的な内容は省略したが、ここに示しておく。記号は本文中のものと同一であり、また、特に x_0 の導出には文献1)を参照されたい。

$$\begin{aligned} x_c &= x_c(s; d_c, h, l) \\ &= [\{ (d_c - h)/2 \}^2 - (h/\pi)(l - s)]^{-1/2} \\ x_s &= x_s(s; d_s, h) \\ &= [\{ (d_s + h)/2 \}^2 + (h/\pi)s]^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(s) \\ &= -1/(d_1/2) = -2/d_1 \\ x_2 &= x_2(s; d_2, h) \\ &= [\{ (d_2 + h)/2 \}^2 + (h/\pi)s]^{-1/2} \\ x_0 &= x_0(s; x_1, x_2, h, E_1, E_2, \sigma_y) \\ &= x_1 + (1 - E_2/E_1)(x_2 - x_1) \\ &\quad \times [1 - 3\{\sigma_y/\{E_1 h(x_2 - x_1)\}\}] + 4\{\sigma_y/\{E_1 h(x_2 - x_1)\}\}^3 \\ \sigma_0 &= \sigma_0(s; x_1, x_2, h, E_1, E_2, \sigma_y) \\ &= (1/2)(1 - E_2/E_1)\sigma_y \\ &\quad \times [4\{\sigma_y/\{E_1 h(x_2 - x_1)\}\}^2 - 1] \end{aligned}$$

ただし、本報の場合 x_1 = 一定としたが、 x_1 は一般には任意である。

謝 辞

材料定数測定実験に用いたうず巻ばね、鋼帯試験片、及びトルク特性実測値などを御提供いただいた速水発条株式会社深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 吉本, 花房: 機械学会論文集, 18巻71号, p.17-20(昭27).
- 2) Swift, W. A. C.: Proc Instr Mech Engrs., Vol. 188 50, p.615-625(1974).
- 3) Queener, C. A., Wood, G. E.: Journal of Engineering for Industry, May 1971, TRANS. ASME, p.667-675.