皿ばねの非線形変形挙動について*

On Nonlinear Deformation Behavior of Disk Spring

濱田 實**・荒木 敏弘***

Minoru HAMADA・Toshihiro ARAKI

皿ばねが圧縮荷重を受ける場合に示す非線形の荷重—たわみ線図については、従来より J.O. Almen & A.Laszlo¹⁾の式が広く用いられてきた。これに対して、より精度の高い式として G.A. Wempner²⁾の式が提案されているが、これら二つの式は、いずれも近似的仮定のもとに導かれたものであるから、これらの式がどの程度の誤差を含むかについて、皿ばねを使用する機械設計者はよく知っていなければならない。本研究では、皿ばねに対し弾性薄殻理論を適用して得られる支配微分方程式を差分法³⁾により数値的に解いて、精度の高い荷重—たわみ関係の解をいくつか求める。一方、上記の二つの近似式により対応する解を求め、これら三つの解を比較する。また、いくつかの場合に対して実験を行い、その結果も比較に供する。そして、これらの比較の結果を総合的に見て、二つの近似式の精度に関していくつかの知見を得る。

For estimation of the nonlinear load-deflection behavior of the disk spring which is subjected to compressive load, an approximate equation presented by J.O. Almen & A. Laszlo¹⁾ has widely been used. Another approximate equation was also proposed by G.A. Wempner²⁾ as a more accurate solution. Since these two equations are both induced from some approximate assumptions, mechanical designers using disk springs should know the degree of errors of the above-mentioned two equations. In this paper, some numerically accurate examples for the load-deflection relation of the disk spring are obtained by applying the finite difference method³⁾ to solve the fundamental differential equations of the problem of the disk spring, and they are compared with the results obtained by the above-mentioned two equations. Also experiments are carried out, and their results are compared with those by the above three theoretical methods. From results of such comparisons some prospect about the accuracy of the above-mentioned two equations can be obtained.

1. まえがき

皿ばねは、その占める空間が許容荷重に対して小さく設定できることと、変形特性の非線形性が、場合によっては非常にうまく利用できることのために、現在各方面で広く用いられている。皿ばねの変形特性すなわち荷重—たわみ線図については、J.O. Almen & A. Laszlo¹⁾が提案した設計式がよく用いられているが、この式にはいくつかの近似の仮定が含まれているため、その精度についてはつねに注意を払わなければならない。この Almen-Laszlo の式よりも精度の高い式として G.A. Wempner²⁾の式があるが、この式も近似式であることには変りがない。これらに対して、最も精度の高い皿ばねの解は、弾性殻理論による皿ばね問題の支配微分方程式を、差分法や有限要素法などの数値解法

により解いて得られる数値解である。

本研究では、Almen-Laszlo の式と Wempner の式による数値結果の精度を、差分法³⁾による結果と比較することにより、検討する。特にわが国では Almen-Laszlo の式が設計に多く用いられているが、この式の精度が本研究によって明らかになる。また本研究では実験も行ったので、その結果についても報告する。

2. Almen-Laszlo の解、Wempner の解、及び差分法(本解)の概要

図 1 に皿ばねの形状と、それを規定する寸法の記号(Di, Do, H, h)を示す。この皿ばねが、上下両縁に接触した 2 枚の剛体平板によって圧縮されるものとする。なお接触面では、摩擦作用はないものとする。

(1) Almen-Laszlo¹⁾の解

この解は現在わが国で広く用いられており、JIS に採用されているものである。これはエネルギー法による近似解であり、次の三つの近似仮定のもとに導かれている。

原稿受付日 1990年9月7日

* ばね技術研究会 1990年度春期講演会にて発表

** 阿南工業高等専門学校

*** 日産自動車株式会社

- (i) 皿ばねの各微小部分(殻要素)の回転が、比較的小さい。
- (ii) 変形中も円錐形が保持される。
- (iii) 子午線方向のひずみの影響を無視する。

ここで、次の二つの無次元パラメータを定義する。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= D_i/D_0 \\ p &= P/ED_0h \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし P は圧縮荷重であり、 E は縦弾性係数である。また、皿ばねのたわみ量、すなわち上縁と下縁の近寄り量を δ とする。このとき次式が成立する。

$$p = \frac{4C\delta}{(1-\Gamma^2)D_0^3} \left\{ (H-\delta) \left(H-\frac{\delta}{2}\right) + h^2 \right\} \quad (2)$$

ここに

$$C = \left[\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0} + \frac{2}{\ln \alpha_0} \right] \pi \left[\frac{1}{1-\alpha_0} \right]^2 \quad (3)$$

なお Γ はポアソン比である。式(2)が、皿ばねの荷重—たわみ関係を求めるための、Almen-Laszlo の式である。

(2) Wempner²⁾の解

この解もエネルギー法による近似解であるが、上述の Almen-Laszlo の解における仮定(iii)を外して子午線方向のひずみの影響を考慮している点で、上述の解と異なっている。

初期円錐角を ϕ として、次の無次元パラメータを定義する。

$$\gamma = 2h \cos \phi / D_0. \quad (4)$$

このとき次式が成立する。

$$p = M \frac{\delta}{D_0^3} (H-\delta) \left(H-\frac{\delta}{2}\right) + N \frac{\delta}{D_0} \quad (5)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1-\Gamma^2}{2(1-\alpha_0^4)} \left\{ \frac{\alpha_0 (\ln \alpha_0)^2}{\alpha_0^2 - 1} + \frac{1-\alpha_0^2}{4} \right\} \\ N &= -\frac{\gamma^2}{12} \frac{\ln \alpha_0}{(1-\alpha_0)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(5)が Wempner の式である。

(3) 差分解(本解)³⁾

皿ばねは、その形状から見て、せつ頭円錐殻(Truncated conical shell)であるといえるが、これは軸対称殻の一つの例である。殻厚一定の弾性の軸対称殻が軸対称荷重を受けて変形する場合の、荷重、変形及び応力の間の関係を求める問題に関しては、現在では電子計算機を用い、有限要素法、差分法、あるいは数値積分法等の数値解法によって、数値的に精度の高い解を得ることができる。筆者の一人³⁾は他の共同研究者とともに、殻の変形量が殻厚に比べて小さくない場合の、いわゆる大たわみ問題(すなわち幾何学的非線形問題)を差分法によって解く方法について研究したが、ここではその解法を用いる。

差分法は、微分方程式の数値解法の一つとして、古くより用いられてきたものである。いま簡単な例とし

て、独立変数を x 、従属変数を y とする 2 階線形常微分方程式を考える。与えられた x の有限領域 (x_0, x_N) を等間隔 Δx に N 分割して、分割点の x 座標を x_i ($i=1 \sim (N-1)$) とし、 x_i ($i=0 \sim N$) の各点に対する y を y_i とする。そして、中間差分点 x_i ($i=1 \sim (N-1)$) に対して、中間差分近似式

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{dy}{dx} \right]_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(\Delta x)} \\ \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_i &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を用いて、与えられた微分方程式より y_i ($i=0 \sim N$) に関する 1 次方程式を $N-1$ 個作る。一方、両端 x_0, x_N に対する境界条件に対して、必要あれば前進差分近似式

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2(\Delta x)} \quad (8)$$

または後進差分近似式

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_N = \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2(\Delta x)} \quad (9)$$

を用いて、二つの 1 次方程式を得る。以上において得られた計 $N+1$ 個の 1 次方程式を連立方程式として、Gauss の消去法等を用いて電子計算機により解き、 y_i ($i=0 \sim N$) を求める。これが線形常微分方程式の差分法による解法の概要である。

皿ばねの問題の支配微分方程式は、独立変数が殻厚中央面上の子午線に沿う長さの座標であり、従属変数は、子午線上の任意点における二つの変位成分と一つの曲げモーメントの計 3 個の、連立 2 階常微分方程式として表わされる。ただし、本問題は非線形問題であるから、上記の三つの量の増分量を従属変数とし、皿ばねのたわみ量を少しずつ増加させていき、その各段階ごとに前述の常微分方程式の解法を何度も繰返し、解が数値的に収束したことを確かめてから次の増分段階に移る、という面倒な手続きを採らなければならない。

3. 計算例と実験例

図 2～図 9 において、8 個の試験片を用いて得られた荷重—たわみ線図の実験結果と、それに対して前章で述べた三つの解法により得られた理論結果とを比較して示す。実験に用いた試験片の寸法は、表 1 に示すとおりである。

これらの各場合において、三つの理論解の間には相当の差が認められる。また Almen-Laszlo の解よりも、Wempner の解の方が差分解に近い。実験値は負荷の場合と除荷の場合とで異なるが、この差異は、皿ばねの両縁と負荷体の平面との間に生じる摩擦によるものである。その他の諸原因による実験誤差も実験値に含まれていることを考慮して図 2～図 9 を通観すると、実験結果にもっとも近い理論解は差分解であるといえよう。

試験片の寸法 (mm)

図	D_o	D_i	H	h	R
2	265.0	130.5	6.0	2.7	0.5
3	225.5	112.0	6.5	3.0	0.6
4	265.0	130.5	6.0	4.0	0.8
5	160.0	82.0	4.5	3.0	0.6
6	265.0	130.5	6.0	5.0	1.0
7	225.0	112.0	6.0	5.0	1.0
8	225.0	112.0	5.0	8.0	1.6
9	160.0	82.0	5.0	6.0	1.2

差分解には、数値解としての計算誤差が含まれる。すなわち、皿ばねの子午線上で差分分割をするときの分割数 N と、両縁の相対変位を少しずつ増加させていく各段階での、繰返し計算における解の収束状態の二つが、計算誤差の主因と考えられる。筆者らは、 N については種々の値を与えて計算をし、また繰返し計算における解の収束状況を調べながらその繰返し数を定めることによって、本論文で線図で示した差分計算の結果は、図上ではほとんど変わらないことを確かめている。すなわち本解法により求められた荷重—たわみ線図は、ほぼ正確であるとしてよい、と考える。

図1. 皿ばねの形状

図 2. 荷重—たわみ線図 (理論解と実験値) (1)

図 3. 荷重—たわみ線図 (理論解と実験値) (2)

図 4. 荷重—たわみ線図 (理論解と実験値) (3)

図 5. 荷重—たわみ線図 (理論解と実験値) (4)

図 6. 荷重—たわみ線図 (理論解と実験値) (5)

図 7. 荷重—たわみ線図 (理論解と実験値) (6)

図 8. 荷重—たわみ線図 (理論解と実験値) (7)

図 9. 荷重—たわみ線図 (理論解と実験値) (8)

4. 三つの解法による荷重—たわみ線図の比較

図1に示すように、皿ばねの形状を規定する寸法は、 D_o , D_i , H , h の4個であるから、無次元パラメータは3個である。これらを H/h , H/D_o , D_i/D_o とする。

図2～図9の図中に示すように、実験に用いた8個の試験片の無次元パラメータは、 D_i/D_o と H/h がほとんど同じで、 H/D_o の値のみが異なる二つずつの組合せ。すなわち図2と図3、図4と図5、図6と図7、図8

と図9、の各組合せに分けられる。そして、それらの組合せの二つの図を比較すると、 H/D_o の値が異っても、荷重—たわみ線図における三つの理論解の相互間の関係は、ほとんど同じであることがわかる。そこで H/D_o の影響をより詳細に調べることは今後の問題として、ここでは残る二つのパラメータ H/h と D_i/D_o の影響を調べることにする。

図10. 形状パラメータ (H/h , D_i/D_o)

図11. 荷重—たわみ線図 (理論解) (1)

図 12. 荷重—たわみ線図 (理論解) (2)

図 13. 荷重—たわみ線図 (理論解) (3)

図 14. 荷重—たわみ線図 (理論解) (4)

図 15. 荷重—たわみ線図 (理論解) (5)

図 16. 荷重—たわみ線図 (理論解) (6)

図 17. 荷重—たわみ線図 (理論解) (7)

図 18. 荷重—たわみ線図 (理論解) (8)

図 19. 荷重—たわみ線図 (理論解) (9)

図10に JIS 規格に規定されている皿ばねと、皿ばね座金について、 H/h と D_i/D_o の値の分布を示した。この図上で、JIS 規格の寸法の分布を包含するように9個の代表点 (Sampling point) を設けて、これらの9個の H/h と D_i/D_o の組合せに対して三つの理論解による荷重たわみ線図を求めた。その結果を図11～図19に示す。ただし、 H/D_o の値には、すべて0.015の一定値を与えている。

図11のパラメータ値は、図10において9個の代表点の中央に位置し、また JIS 皿ばね (軽荷重用) のパラメータ値とほぼ同じであるために、これを基準として三つの理論値を比較すると、次のような傾向が認められる。

- (1) H/h が大きくなると (図15, 図17, 図19), 非線形性が強くなり、また Almen-Laszlo の解と本解との差が大きくなる。
- (2) H/h が小さくなると (図14, 図16, 図18), 非線形性が弱くなり、またエネルギー法による二つの解の差は小さくなる。
- (3) D_i/D_o が大きくなると (図13, 図18, 図19), エネルギー法による二つの解の差は小さくなり、またそれと本解との差は大きくなる。
- (4) D_i/D_o が小さくなると (図12, 図14, 図15), Wempner の解と本解との差は小さくなる。

5. あとがき

皿ばねを設計する場合に、その荷重—たわみ線図を正確に知ることが必要である。わが国では、従来より Almen-Laszlo の解が広く用いられてきたが、これはエネルギー法による近似解である。本論文では数多くの形状に対して Almen-Laszlo の解法、Wempner の解法、および差分法により荷重—たわみ線図を求めて比較をしたので、これらの線図を通観すると、Almen-Laszlo の解の精度に関する、およその見当がつけられるであろう。

4章では、形状パラメータ H/h と D_i/D_o の、荷重—たわみ線図に及ぼす影響について四つの知見を得たが、

これらはパラメータ H/D_o に一つの値を与えた上での結果であった。しかし3章で述べたように H/D_o の値が多少変わっても、上記の四つの知見は大たい成立するものと推論する。

筆者らとしては、皿ばねの設計に際しては、Almen-Laszlo の解よりも Wempner の解の方を推奨したい、と考える。

なお、本研究の完了後に、下関、早坂⁴⁾が有限要素法による二つの解析結果 (一つは本報と同様に弾性解であり、他の一つは弾塑性解) を示していることを知った。この報告では数値計算の誤差の検討についての記述がないが、その検討が十分になされておれば、弾性解については本解法による結果と差がないはずである。上述のように、本研究では数多くの計算例より、二つのエネルギー解の精度について知見を得たことに意義があると解して頂ければ幸である。

本研究では弾性薄殻理論を用いたが、その大前提である、殻厚が二つの主曲率半径に比べて十分小さい、という条件は、多くの皿ばねの場合には満たされている。また内縁と外縁における殻端が子午線に垂直ではなく中心軸に平行であり、これは殻理論における取扱い方から外れているが、子午線に沿う皿ばねの長さが殻厚に比べて十分大であれば、その影響は小さいものと考えられる。

おわりに、本研究の実施にあたって、実験用の皿ばね試験片について多大のご配慮を頂いた、平和発條株式会社の岡田博文氏に対して、深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) Almen, J.O. and Laszlo, A., Trans. ASME, 58 (1936), p.305.
- 2) Wempner, G.A., Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. (1958), p.473.
- 3) 濱田, 森田, 播磨, 森澤, 日本機械学会論文集 (A), 53, 487 (昭62), p.531.
- 4) 下関, 早坂, ばね技術研究会, 昭和58年度秋期講演会前刷集, p.41.