円弧及び直線より構成される線ばねの変形と応力の解析*

Displacement and Stress Analysis of Wire Spring Composed of Circular Arc and Straight Line

森田 信義**, 伊藤 和雄***, 鳥居 孝夫**, 土屋 靖治****

Nobuyoshi MORITA · Kazuo ITO · Takao TORII · Yasuharu TSUCHIYA

円弧と直線の不規則な組み合わせにより構成されている線ばねに関し、ばね先端を変位させた場合の線ばね全体の変形状態、応力状態、ばね定数等を、次の2つの解析法により求める方法を示した。

(1) 代数的解析法：Castigliano の定理を用いた方法

(2) 数値的解析法：伝達マトリックスを用いた方法

さらに本論文では、(2)の解析法をドットプリンターに用いられている線ばねに適用し、線ばねの寿命を延ばすことが可能であると考えられる形状を示した。この新しい形状の線ばねは耐久試験の結果、従来の線ばねの寿命の4倍以上になることが確認された。

This paper deals with a wire spring whose shape consists of a random combination of circular arcs and straight lines. When a displacement of the end of spring is given, the displacement, the stress of all parts of the spring and the spring constant are obtained by two analytical methods as follows :

(1) Algebraical analysis : The method of applying Castigliano's theorem

(2) Numerical analysis : The method of applying transfer matrix

The method (2) is applied to the spring used as a part of Dot-printer, then the optimum shape to extend its life is shown. It is confirmed by the endurance test that the life of this new spring is beyond four times longer than that of the former spring.

1. 緒 言

線細工ばね(以下線ばねと略記する)の用途は多種多様であり、最近では精密機器や電子機器にも幅広く用いられている。その中には導電性が要求されるものや磁界中で使用されるものがある。このような場合には鋼系の材料ではその電磁気的特性上、要求には対応できないことが多い。しかし非鉄金属を用いた線ばねは、鋼線を用いた場合に比べて、へたりや疲れによる折損が生じ易くなる。したがって、このような線ばねの寿命を延ばす設計面の検討が要求されている。そのためには、自由形状の線ばねの運動特性、力学特性を明らかにすることが必要である。

本論文では、円弧と直線の不規則な組合せの線ばねに関し、ばね先端を変位させた場合の各部の変形状態、応力状態、ばね定数等を、次の2つの解析法により求める方法を示す。

(1) 代数的解析法：Castigliano の定理を用いた方法

(2) 数値的解析法：伝達マトリックスを用いた方法

さらに本論文では、(2)の解析法を実際の線ばねの設計に適用し、線ばねの寿命を延ばすことが可能であると考えられる形状を示す。

2. 解 析

2.1 解析モデル

図1に本報で扱う線ばねの解析モデルを示す。

2.2 解析方法

図1に示すように、線ばねの解析モデルは線ばねの両端A点、G点が固定端であり、この線ばねを円弧部と直線部の要素から成るものと見なして、次の2つの方法を用いてA点を 0_1A 方向に δ 変位させた場合の各要素の区間(AC間、CD間、DF間、FG間)での曲げモーメントMを導出する。そして、それをもとに各区間内で発生する曲げ応力の状態及び、線ばねの変形状態、ばね定数を求める。

2.2.1 代数的解析法—Castigliano の定理を用いる方法²⁾—

両端固定の線ばねを図2(a)の様に、G点が固定端、A点が自由端の片持ち梁とみなす。A点を 0_1A 方向に

原稿受付日 1990年9月25日

* ばね技術研究会 1990年度秋季講演会にて発表

** 静岡大学工学部(Faculty of Engineering, Shizuoka University)

*** 三洋電機(株)(SANYO Electric Co., Ltd.)

**** スター精密(株)(STAR Micronics Co., Ltd.)

図1. 円弧および直線より構成される線ばねの解析モデル

δ_y 変位させるのに必要な荷重をPとすると、各区間の曲げモーメント M_i ($i = 1 \sim 4$) はPを用いて表わすことができる。また、弾性ひずみエネルギー U_i は式(1)のように M_i を用いて表わすことができる。

$$U_i = \frac{1}{2EI} \int M_i^2 dx \quad (1)$$

さらに Castigliano の定理より、A点の変位量 δ_y は式(2)のように M_i を用いて表わすことができるので、 δ_y は荷重Pを用いて表わすことができる。

$$\delta_y = \sum \frac{\partial U_i}{\partial P} = \sum \frac{M_i}{EI} \int \frac{\partial M_i}{\partial P} dx \quad (2)$$

したがって δ_y とPの関係より、 δ_y をもとにPが求められるため、各区間の曲げモーメントが求められる。しかし、線ばねの両端は固定端であるので、次のような近似解法を用いる³⁾。

まず、自由端とみなしたA点に O_1A 方向(Y方向)の荷重Pをかけると、Y方向に δ_y 変位すると共に、 O_1A 方向と垂直な方向(X方向)にも δ_x 変位する。しかし線ばねは両端固定であるので、A点をY方向に δ_y 変位させてもX方向には変位しないはずである。そこでこのX方向の変位量 δ_x を0にするために、図2(b)のように変位方向と反対の向きに、 δ_x 変位させるのに必要な荷重Qをさらにかける。そしてA点、G点に支持モーメント M_A , M_G をかけて各区間での曲げモーメント式 M_i を導出する。

円弧部のみではA点からj番目、直線部のみではk番目の区間であるとすれば、 M_i は一般的に式(3)のようになる。

$$M_i = P \left[s_i \cos \left\{ \sum_{n=1}^{i-1} (a\phi_n) \right\} + t_i \sin \left\{ \sum_{n=1}^{i-1} (a\phi_n) \right\} \right] - Q \left[s_i \sin \left\{ \sum_{n=1}^{i-1} (a\phi_n) \right\} + t_i \cos \left\{ \sum_{n=1}^{i-1} (a\phi_n) \right\} \right] + M_{i-1} \quad (3)$$

ただし、

$$s_i = \begin{cases} r_j \sin \theta_j & \text{円弧部} \\ x_k & \text{直線部} \end{cases} \quad t_i = \begin{cases} ar_j (1 - \sin \theta_j) & \text{円弧部} \\ 0 & \text{直線部} \end{cases}$$

$$0 \leq \theta_j \leq \phi_j, \quad 0 \leq x_k \leq l_k$$

r : 円弧部の半径 θ : 変位角

ϕ : 円弧状はりの中心角

また円弧部については、曲率中心の方向と外側の方

向に力がかかる場合に対して、前者は $a = -1$ 、後者は $a = 1$ となる。したがって、式(2)、(3)を用いることにより、各区間での変位量 δ_{ix} , δ_{iy} が求められる。また曲げ応力 σ_i は曲げモーメントを断面係数で除することにより求められる。さらに、式(4)よりばね定数 k が求められる。

$$k = \frac{P}{\delta_y} \quad (4)$$

2.2.2 数値的解析法 —伝達マトリックスによる方法^{4)~6)}—

曲がり梁の伝達マトリックス、真直梁の伝達マトリックスとはもによく知られている。これらの伝達マトリックスUは、図3に示すような部材座標系において、式(5)に示すように梁の両端についてのそれぞれの変位量 u , w やたわみ角 ψ , 荷重 N , V , そして曲げモーメント M で表わされる状態量ベクトル S_i と S_{i-1} の相互関係を表わしており、両端固定の不静定問題を解くのに適している。

$$S_i = \{u \ w \ \psi \ M \ V \ N\} \quad (5)$$

そこで、線ばねの各区間での両端の伝達マトリックスとして、円弧部に曲がり梁の伝達マトリックスを、直線部に真直梁の伝達マトリックスを適用する。各区間での伝達状態は式(6)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{S\}_G &= [U_{FG}] \{S\}_F \\ \{S\}_F &= [U_{DF}] \{S\}_D \\ \{S\}_D &= [U_{CD}] \{S\}_C \\ \{S\}_C &= [U_{AC}] \{S\}_A \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

またこれら各区間の伝達マトリックスを合成することにより、線ばねの両端A点、G点間の直接の関係式(7)が得られる。

$$\{S\}_G = [U_{FG}][U_{DF}][U_{CD}][U_{AC}]\{S\}_A = [U_{AG}]\{S\}_A \quad (7)$$

さらに式(7)にA点、G点の境界条件を用いてマトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} O \\ O \\ O \\ M \\ V \\ N \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{26} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_{61} & a_{62} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O \\ \delta \\ O \\ M \\ V \\ N \end{Bmatrix}_A \quad (8)$$

式(8)を解くことにより、A点、G点の状態量ベクトル S_A , S_G の要素がすべて求まる。したがって、 S_A を式(6)に代入して S_C , S_D , S_F と順々に求めてゆくことにより、各区間での状態量が全て求まる。そして、それらをもとにばね定数、各部の変位量、曲げモーメント及び曲げ応力を求める。

図 2. 線ばねの変位

図 3. 部材座標系

3. 実際の線ばねへの応用

3.1 線ばねに要求される特性

図 4 はプリンターのドットピン支持部の回転部分を示す。この部分は磁力により 3 [kHz] と高速で揺動する。ここに用いられている線ばねは両端固定であり、回転部分の揺動により、固定されている線ばねの一端が変位する。またこの線ばねは、弾性に加えて導電性及び耐磁性が要求される。そのうえ 2 億回程度の揺動回数にも耐え得ることが望まれる。ばね材には、導電性及び耐磁性を持たせるためにベリリウム銅を使用する。

図 5 は最初に製作された線ばねであり、まだ応力計算は行っていない。これを改良前の線ばねと呼ぶ。この線ばねの諸元を表 1 に示す。この線ばねを多数作り、プリンターに組み込んで試験したところ、5000 万回程度の揺動回数でへたりが生じたり、また折損が生じるものが多かった。

3.2 最適な形状設計のための評価法

2 億回の揺動回数を達成できる線ばねを設計することを目標に、改良前の線ばねのばね特性からあまり逸

図 4. ドットピン支持部

図 5. 改良前の線ばね

表 1. 形状改良前の線ばねの諸元

縦弾性係数	E [GPa]	118.0
線 径	d [mm]	0.1
第 1 円弧部半径	r ₁ [mm]	2.3
第 2 円弧部半径	r ₂ [mm]	1.5
第 3 円弧部半径	r ₃ [mm]	0.9
直線部長さ	ℓ [mm]	0.0
∠AO ₁ B	α [deg]	15.0
∠BO ₁ C, ∠DO ₂ E	β [deg]	67.0
∠EO ₂ F, ∠FO ₃ G	γ [deg]	57.0

脱せずに寿命を延ばす形状の解析を行なった。

ここで、改良前の線ばねが折損に至った原因を探るため、ばね先端を図5の O_1A 方向に0.2 [mm]だけ変位させた場合に円弧部および直線部の線材表面に生じる曲げ応力の状態を調べた。これを図6に示す。図6を見てわかるように、改良前の線ばねは固定端G点で応力の集中が生じていて、実際、この部分での破壊が多かった。したがって線ばねの寿命を延ばすためには応力の集中を避ける形状が良いと考えられる。すなわち、最適形状の線ばねは次の条件を同時に満たすものとする。

- ① 各区間での応力の最大値がそれぞれ近い値で、かつ小さい値である。
- ② ばね定数はドットピン用のばねとして十分に機能する値をとるものとする。

①の評価法として、各区間の応力の大きさの最大値の、全体の平均値 $|\sigma|_{AV}$ を用いる。 $|\sigma|_{AV}$ は式(9)から求める。

$$|\sigma|_{AV} = (|\sigma_{AC}|_{\max} + |\sigma_{CD}|_{\max} + |\sigma_{DF}|_{\max} + |\sigma_{FG}|_{\max}) / 4 \quad (9)$$

また②の評価法として、改良前の線ばねのばね定数 k_0 と差の大きさの割合 $|\Delta k|$ を用いる。 $|\Delta k|$ は式(10)から求める。

$$|\Delta k| = \frac{|k_0 - k|}{k_0} \times 100 \quad (10)$$

ここで k は、線ばねの諸元を変化させた場合のばね定数である。なお簡単にするため、3つの円弧部の半径を一律 r とする。

3.3 円弧部半径 r 、直線部長さ l と $|\sigma|_{AV}$ 、 $|\Delta k|$ の関係

円弧部半径 r 、直線部長さ l を変化させた場合の $r-l-|\sigma|_{AV}$ 線図及び $r-l-|\Delta k|$ 線図を図7(a),(b)にそれぞれ示す。ただし、 α, β, γ は全て同じ値の下で考え、これらが 90° のとき $|\sigma|_{AV}$ が最小となったので、 $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ のときのものを示す。また、改良前の線ばねのばね定数 k_0 、 $|\sigma|_{AV}$ の値を求めたところ、 $k_0=164.4$ [N/m]、 $|\sigma|_{AV}=0.40$ [GPa]となった。

3.4 円弧部構成中心角 α, β と $|\sigma|_{AV}$ 、 $|\Delta k|$ の関係

図7(a),(b)より、望ましい r, l の値の範囲は次のようになる。

$$r = 0.8 \sim 1.5 \text{ [mm]}, \quad l = 0.4 \sim 1.5 \text{ [mm]}$$

この範囲内で、さらに線ばねを取り付ける上での形状の制約等を考慮に入れた r, l の値は $r=1.5$ [mm]、 $l=0.4$ [mm]付近となる。この r, l の値を用い、円弧部構成中心角 α, β を変化させた場合の $\alpha-\beta-|\sigma|_{AV}$ 線図、 $\alpha-\beta-|\Delta k|$ 線図を、図8(a),(b)にそれぞれ示す。ただし、 γ は 90° のとき $|\sigma|_{AV}$ が最小となったので、この値を用いている。

図6. 改良前の線ばねの応力状態

(a) $r-l-|\sigma|_{AV}$ 線図

(b) $r-l-|\Delta k|$ 線図

図7. 円弧部半径、直線部長さと $|\sigma|_{AV}$ 、 $|\Delta k|$ の関係

3.5 新しい形状の線ばねの試作及び実験

図8(a)より、 β が小さい範囲では、 $|\sigma|_{AV}$ の最小値は $\alpha=50^\circ$ 近辺であるが、 β が大きくなると $|\sigma|_{AV}$ は全体的に小さくなり、 α はどのような値でもとりうる事がわかる。また図8(b)より、 $|\Delta k|$ は α, β が共に小さい範囲および α が大きく、 β が小さい範囲で急激に大きくなるので、これらの範囲を避ければよいことがわかる。

ここで、さらに線ばねを取り付ける上での形状の制約等を考慮に入れ、設計値として $\alpha=45^\circ, \beta=90^\circ$ を選んだ。

この線ばねの諸元を表2に示し、ばね形状、変形状態を図9に示す。また、形状改良前及び改良後の線ばねのばね特性を表3に、応力状態を図10に示す。

図10より、改良後の線ばねの各部の応力の変化は、改良前の線ばねと比較してかなり滑らかであり、最大値も1/2以下となっていることがわかる。また、ばね定数は改良前のばねと比較して小さくなっているが、ドットピン用のばねとしては十分機能する値である。この線ばねを試作し、実際に3 [kHz]で揺動させ続けたところ、2億回以上の揺動回数を達成することができた。

図8. 円弧部中心角と $|\sigma|_{AV}$, $|\Delta k|$ の関係

図9. 形状改良後の線ばね

表2. 形状改良後の線ばねの緒元

縦弾性係数	E [GPa]	118.0
線 径	d [mm]	0.1
第1円弧部半径	r_1 [mm]	1.5
第2円弧部半径	r_2 [mm]	1.2
第3円弧部半径	r_3 [mm]	1.2
直線部長さ	ℓ [mm]	0.4
$\angle A O_1 B$	α [deg]	45.0
$\angle B O_1 C, \angle D O_2 E$	β [deg]	90.0
$\angle E O_2 F, \angle F O_3 G$	γ [deg]	90.0

図10. 形状改良前及び改良後の線ばねの応力状態

表3. 形状改良前及び改良後の線ばねのばね特性

	改良前	改良後
応力の最大値 σ_{max} [MPa]	-678.0	-293.8
応力の平均値 $ \sigma _{AV}$ [MPa]	401.5	162.4
ばね定数 k [N/m]	164.4	65.9
〃 [%]	100.0	40.1

4. 結 言

円弧及び直線から構成される線ばねの各部の変形状態、応力状態及びばね定数の解析を、Castiglianoの定理を用いた方法及び伝達マトリックス法により求める方法を示した。この内で後者による解析法を、ドットプリンターに用いられている線ばねに適用し、線ばねの寿命を延ばす形状を検討した。また、新設計による線ばねを試作し実験をしたところ、線ばねの耐久揺動回数が当初設計品の5000万回程度から2億回以上というように、4倍以上となった。したがって、線ばねの寿命を延ばすための、本解析法の有用性が示された。

参 考 文 献

- 1) ばね技術研究会編；第3版 ばね，(1982)，丸善。
- 2) W. CHARLES PAULSEN；Analyzing Spring Clips, MACHINE DESIGN, Vol. 45, No. 8, p.127-129, (1973)。
- 3) 柳沢猛，野田直剛他共著；パソコン対応基礎材料力学，(1985)，日新出版。
- 4) E. C. PESTEL, F. A. LECKIE,共著(加川幸雄訳)；マトリックス法による振動解析，(1984)，プレイン図書出版。
- 5) 成岡昌雄，遠田良喜共著；伝達マトリックス法，(1970)，培風館。
- 6) H. C. MARTIN 著(吉識雅夫 監訳)；マトリックス法による構造力学の解法，(1967)，培風館。