温度場伝播の情報可視化による ヒートスプレッダ内非定常温度予測モデルの開発*

矢澤 和明¹, 中川 慎二², 石塚 勝²

Development of Transient Thermal Model on Heat Spreaders with Numerical Visualization of Thermal Propagation

Kazuaki YAZAWA, Shinji NAKAGAWA and Masaru ISHIZUKA

ABSTRACT

Thermal propagation in heat spreader is observed and investigated with numerical visualization technique comparing with the analytic modeling. From the numerical results, three different modes of 3-D thermal propagation are found and are verified with the analytic model. Transient spreading phenomena in limited thickness with constant heat transfer boundary has not yet been modeled for various heat input as time function. The observation provides the behavior of the individual stage of transient spreading and the basis of the approximate function which fits the numerical calculation over the practically wide range of time. The approximation is done by simulated electrical circuits so that any time-function for heat input is able to be analyzed.

Keywords: Transient thermal model, Numerical simulation, Thermal propagation in spreaders

1. はじめに

近年, ITRS¹⁾ 等が示すようにコンピュータ LSI の性能は指数的に発展し増加してきておりその消費電力も同様な増加を示している, 今後も続くと予想されている. これにより新たなデジタル家電の世界が広がる中で, これらの高発熱密度のデバイスの冷却が深刻の度合いを増加させている. この問題は熱輸送デバイス, 例えばヒートパイプ²⁾ やヒートシンク等の技術革新によって支えられ, 良く知られている Moore の法則に追随していたが, 熱伝導 + 空冷の技術の限界に近づき, メカニカルポンプを使う水冷³⁾ あるいは電界駆動の強制冷媒循環型の熱輸送デバイス⁴⁾ 等が注目されるようになってきた. しかしながら, 発熱体であるチップから熱を吸い上げる部分は, 実装上の困難さから直接冷媒と接触するよりも固体の熱伝導に依存しているケースが多い. さらに, 半導体の電力設計も必要な時だけ最大のピーク能力を発揮し, アイドリング時などの電力消費を低減させる工夫もされてい

る⁵⁾ ため, 熱負荷は刻々と変化するのが普通になってきている. これらの背景により, 熱流の時間変化を捉えた適切なスプレッダの設計が必要になっている. 本研究では, 境界条件を変化させずに一定とした時のスプレッダ内の温度場について, 解析的モデルを提案し, これによる熱源温度の時刻歴応答と数値解析によって示される温度場の伝播を捉え, 微小時間から平衡状態に達するまでの幅広い時間スパンでの振舞いを情報可視化によって観察した. 提案する解析モデルは Lee⁶⁾ らによる定常状態での広がり熱抵抗の近似式および, Yovanovich⁷⁾ による半無限空間の時刻歴応答関数によって示されたモデルを元に組み立て検証した. これらを踏まえて実用的な近似時間応答関数を求めることによってあらゆる動的加熱条件への対応についての検討を加える.

2. スプレッダのモデル化

Fig. 1 および Fig. 2 に一般的な実装状態を表現するスプレッダの形状と境界条件を示す. スプレッダの面積 A_p の中央に面積 A_s の熱源が接触し, 厚み L をはさんで反対側の面は全体に一定熱伝達率 h を与える. それ以外のスプレッダ表面は断熱条件を与える. なぜならば, 特に本研究のように環境空気にさらされる一般面の熱伝達に

* 原稿受付 2004 年 7 月 9 日

¹ ソニー株式会社 (〒104-0001 東京都品川区北品川6-7-35,
E-mail: Kazuaki.Yazawa@jp.sony.com)

² 正会員 富山県立大学 工学部

Fig. 1 Cross section view of the model.

Fig. 2 Top view of spreader plate and heat source.

よる熱流束は高々数 W/m^2 であり、熱輸送経路の熱流束は、およそ $10^{+3} \sim 10^{+6} \text{ W}/\text{m}^2$ となるので比較すると遙かに小さく、実用的には無視することが可能である。熱源は厚みをもたない一様発熱面とし、発熱量は q で与えられる。定常・非定常ともに、熱源の最大温度 $T_{\max}$ は熱源の中央で観測され、環境温度からの温度上昇を θ とおき、解析的計算と数値計算との比較の指標として用いる。

時刻歴応答関数は $\theta(t)$ で表され、定義により (1) 式で示される。熱抵抗は (2) 式のように表現される。

$$\theta(t) = T_{\max}(T) - T_a \quad (1)$$

$$\Psi(t) = \frac{\theta(t)}{q(t)} \quad (2)$$

Kennedy⁸⁾ や、Fisher ら⁹⁾ および、Song ら¹⁰⁾ によって、このような矩形の拡散熱抵抗は $\theta(t)$ を観察する範囲においては等価半径 r を用い円筒座標系の軸対称で十分高精度に近似することができることが示されている。円筒座標系でのスプレッド内熱伝導は (3) 式で表現される。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3)$$

等価半径 a, b はそれぞれ、

$$a = \sqrt{\frac{A_s}{\pi}}, \quad b = \sqrt{\frac{A_p}{\pi}} \quad (4)$$

非定常入力としては、まず最も簡単なステップ入力で考える。

$$\begin{aligned} q(t) &= 0 & t < 0 \\ q(t) &= q & t \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

モデルの定常応答関数 ψ は、拡がり熱抵抗 ψ_s 、スプレッドの熱伝導（容量）熱抵抗 ψ_p 、さらに外部の等価熱伝達による熱抵抗 ψ_e の総和で表すことができる。

$$\psi(t \rightarrow \infty) = \psi_p + \psi_e + \psi_s \quad (6)$$

非定常の応答関数も同様に要素ごとの応答関数の重ね合わせによって表現できるものとする。熱伝導と外部熱伝達によるステップ入力に対する応答関数は、(7) 式のように表される。スプレッド内を一定の温度分布すなわち代表温度を仮定するとき、スプレッドから外気温までの熱抵抗は 1 次元化したモデルで表現される。

$$\psi_1(t) = (\psi_e + \psi_p) \left(1 - \exp \left(\frac{-t}{C_p(\psi_e + \psi_p)} \right) \right) \quad (7)$$

$$\psi_e = \frac{1}{hA_p} \quad (8)$$

$$\psi_p = \frac{L}{\lambda A_p} \quad (9)$$

ここで、 C_p はスプレッドの熱容量を示し、スプレッドの比熱 c 、密度 ρ および厚み L から、

$$C_p = \rho c A_p L \quad (10)$$

一方、広がり熱抵抗は厳密には (3) 式から導かれる 3 次元の解であるが、定常状態においては Lee ら⁶⁾ によって 1 次元の近似解が与えられており、 $t \rightarrow \infty$ において、

$$\psi_s = \frac{\sqrt{A_p} - \sqrt{A_s}}{\lambda \sqrt{\pi A_p A_s}} \frac{\beta \lambda A_p \psi_e + \tanh(\beta L)}{1 + \beta \lambda A_p \psi_e \tanh(\beta L)} \quad (11)$$

ここで λ はスプレッドの熱伝導率、 β は熱源とスプレッドの大きさの影響を示す図形係数で以下の式で表される。

$$\beta = \frac{\pi^{1.5}}{\sqrt{A_p}} + \frac{1}{\sqrt{A_s}} \quad (12)$$

続いて、非定常応答関数の広がり熱抵抗の部分について検討する。有限厚みでの応答関数については適切な文献が見当たらないが、半無限空間における等温境界壁に対する応答関数は Yovanovich⁷⁾ によって明らかにされている。Fig. 3 に示すように、ごく初期、 $t > 0$ で短い時間においては、温度場の広がり、図のように半無限空間と同様と仮定することが可能である。熱源からみて、ごく初期においては無限遠もスプレッドの対面でも温度は殆ど同じと考えられるからである。

Fig. 3 Isothermal-surface propagation in Half-space.

無次元時間 t^* を用いて、応答関数は定常解との比として Yovanovich⁷⁾ によって以下のように与えられている。

$$\frac{\psi_s(t^*)}{\psi_s(t^* \rightarrow \infty)} = 2\sqrt{t^*} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\pi t^*}\right) \right\} + \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t^*}}\right) \quad (13)$$

ここで、

$$t^* = \frac{\alpha}{A_s} t \quad (14)$$

また、熱拡散率 α はその定義から

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (15)$$

スプレッド内で温度分布が安定するまでの間を非定常の熱拡散と考えると、半無限空間のモデルを使って表現出来ると仮定し、(11)式の ψ_s を(13)式の $\psi_s (t^* \rightarrow \infty)$ に代入することにより、ここでも熱抵抗を1次元化することができる。これは、後に数値解析結果の観察によって立証する。従ってこれらを整理すると、スプレッドの温度上昇分から外部空気温度への熱抵抗とスプレッドの温度上昇分を支配するスプレッド内の拡散熱抵抗から(16)式が得られる。

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (\psi_P + \psi_E) \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{C_P(\psi_P + \psi_E)}\right) \right) \\ & + \psi_S \left\{ 2\sqrt{\frac{\lambda}{\rho c A_s}} t \left(1 - \exp\left(\frac{-\rho c A_s}{4\pi \lambda t}\right) \right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho c A_s}{\pi \lambda t}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

(13)式は $t \rightarrow \infty$ のとき1となり(16)式の第2項は ψ_s に収斂する。よって、(16)式は $t \rightarrow \infty$ のとき(6)式は同じになる。

3. 数値解析モデル

解析モデルの考察と仮定を確認し温度場を観察するため、同じ条件での解析的モデルと数値計算の結果を比較した。対象とするスプレッドは Table 1 に示す組み合わせである。

数値計算はこのモデルにおいて将来熱伝達との連成解析を可能とするため非構造メッシュ有限体積法を用いる市販の熱流体解析ソフトウェア Icpak (ソルバーは Fluent) で行った。メッシュは熱源近傍を 0.005 mm 単位で分割

Table 1 Study Case.

Spreader	Footprint: 20 mm × 20 mm, Thickness: Copper 2 mm and Aluminum 0.5, 2, 6 mm
Source	2 × 2, 4 × 4, 6 × 6 and 8 × 8 mm ² for 1 watt
Heat transfer coefficient	100, 400 W/m ² K

Fig. 4 Time response for step power input.

し、形状によって異なるものの全体で約 20 万メッシュとなった。離散化スキームで 2 次の近似を用いることにより、メッシュサイズに比べ急峻な温度変化による誤差を少なくしている。計算は全て倍精度で実行し、時間ステップごとにエネルギー収支の残差が $1e-9$ 以下になるまで繰り返し計算を行った。時間区切りは $1e-6$ 秒から 3600 秒を超えるまで時間幅を 20% ずつ増加させながら温度分布を計算した。初期条件は時間ゼロ秒においてすべて环境温度と同じであるとした。モデルと同様に一定熱伝達率を与え熱源には一様熱源を与えた。

Fig. 4 に計算結果の比較を示す。グラフは無次元時間で表し、縦軸は定常収束値を 1 とした相対熱抵抗で示し、それぞれ熱源中央の最大温度となる点の非定常応答関数を示している。

グラフから読み取れるように幅広い検討の対象時間範囲において両者が一致していることが分かった。すなわち、非定常応答においても各原理に基づく熱抵抗の関数の重ねあわせで表現され、特に初期段階すなわち、無次元時間でおおよそ 0.1 以下の領域において温度場は半無限空間の仮定と良く一致することが示された。

4. 温度場伝播

数値計算の目的は、加熱開始直後から空間的に温度がどのように伝播するかを観察することにある。固体の中の温度分布を非常に短時間で観測することは困難であり、今日の技術では現実的でない。計算結果をアニメーションなどの表現方法を使って観察すると同時に、Fig. 5 ～ 7 のようにいくつかの重要と思われる時刻点で等温曲面をプロットし、変化の様子を観察した。図の例は 2 mm 厚さのアルミブロックで 2×2 mm の領域に 1W の熱源を与え、熱伝達は $100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ を与えたもの。Fig. 5, Fig. 6 さらに Fig. 7 はそれぞれステップ入力後の経過時間で $5e-5$ 秒後、0.05 秒後および 5 秒後のときの温度分布の様子を示す。温度伝播の様子の違いを把握するため、温度のカラースケールは各時刻での温度上昇範囲で分割し、

Fig. 5 Temperature propagation at $t = 5e-5$ sec ($\theta = 0 \sim 0.085^\circ\text{C}$).

Fig. 6 Temperature propagation at $t = 0.05$ sec ($\theta = 0 \sim 1.227^\circ\text{C}$).

Fig. 7 Temperature propagation at $t = 5$ sec ($\theta = 2.29 \sim 3.90^\circ\text{C}$).

特徴的な等温面を表示して適宜ズームして示す。あわせて断面の等温度曲線分布も表示する。これらと最高温度の時間応答関数から以下の3段階の温度場の拡がりが観察される。

1) 初期段階：殆ど1次元の熱伝導のように熱源のすぐ近傍のみで温度勾配が形成される。Fig. 5のように等温面は殆どが並行する平面に近い。この段階では横方向には殆ど温度分布は広がらず温度勾配がついている領域はスプレッドの厚みに比べ十分小さい。これは、理論モデルでの半無限空間での温度拡散が十分適用出来る事ことを示している。

2) 等温ドーム形成段階：Fig. 6に見られるように、平面的だった熱源の近傍の3次元等温面が膨らみ始め、ドームに似た形になり発達する。この段階の形状におい

て半無限空間で計算した場合の温度分布の広がりと同様している。放熱面にやや近づくにつれてその形状はくずれ、平面に近い形に変わる。次第に横方向へも温度場が拡がり始める。

3) 拡散段階：Fig. 7では、中央に石を投げ込んだ後の池の水面の波紋を連想させる円環状の温度場の拡がりが観察される。最高温度となる図形中心から横方向に同心円状に広がり、コーナー部では歪んだ形になる。この段階ではゆっくりではあるが熱源の温度上昇も大きくなる

十分な時間経過後は、良く知られているようにコーナー部が歪んだリング状の温度分布となって定常状態に近づく。

5. 近似応答関数

非定常数値計算によって観察された温度場の発達過程を裏づけとして、ステップ応答だけではなく、あらゆる入力に対応できるように(16)式で示される最高点温度をより簡便に表現する。3段階の温度場伝播が存在することを手がかりに、3要素のCR電気回路を解析的にあてはめた。回路図をFig. 8に示す。このような回路に置き換えることが出来れば、たとえば、Spiceなどの行列計算により、どんな複雑な非定常熱入力に対しても簡単な計算で温度出力を求めることが出来る。熱抵抗は電気抵抗、熱容量は電気容量、温度差は電位差、さらに熱源は電流源として1次元的に表現される。

この回路のステップ入力に対する時間応答関数は(17)式で示される。

$$\begin{aligned} \psi(t) \equiv & (\psi_P + \psi_E) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{C_P(\psi_P + \psi_E)}\right) \right) \\ & + \psi_S \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{C_S\psi_S}\right) \right) + \psi_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{C_0\psi_0}\right) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 ψ_0 と C_0 は最初の段階を示す。初期段階では、熱源とはほぼ等面積で厚み方向に1次元の熱伝導と似た温度伝播が観測されたため、 ξ ：等価熱拡散比厚さ〔無次元〕($0 < \xi < 1$)を仮定・導入しそれぞれ以下のように表す。

$$\psi_0 = \frac{\xi L}{\lambda A_S}, \quad C_0 = \rho c A_S \xi L \quad (18)$$

次に第2段階においてドーム型の温度伝播における熱等価質量は温度上昇がすでに対面に到達していることか

Fig. 8 Equivalent circuit diagram.

ら、厚みはスプレッドと同等とし、熱源とほぼ同等な面積と仮定した。

$$C_S = \rho c A_S L \quad (19)$$

これらの仮定を確認するため、Fig. 9 に示した熱源最高温度のグラフに上記近似式の要素ごとの時間応答関数をプロットした。この例では $\xi = 0.2$ の時に最も全体の曲線がバランスよく近づき、その誤差は $t^* > 0.01$ で -75% から $+20\%$ の範囲であることが観察された。Fig. 9 に示されたように実用的な時間範囲においては、Fig. 8 の回路で近似できることが分かった。これによって、ステップ入力のみならず、周期波形入力やランダム波形入力にも適用できる。すなわちこれは実用的な CPU 等の複雑な時系列負荷状況を反映した最高温度が近似予測できることを示す。

Fig. 10 は最適等価熱拡散比厚さのばらつきを全てのステディ・ケースについて示したものである。この場合の最適は、各ケースにおいて計測点全て時刻範囲での誤差絶対値の和を最少にする等価熱拡散比厚さを探すことで求め、平均の比厚さは約 0.173 となった。実用上は熱源のスプレッドのアスペクト（面積比の平方根）が 0.1 とな

Fig. 9 Example of comparison between numerical time response and approximated model.

Fig. 10 Variation of effective thickness ratio.

るのは稀な場合で、この点を考慮して数字をまるめ、0.2 という値は実設計上で有益と言える。その他のパラメータの影響も Fig. 10 上で最適比厚さがバラついている様子が観察できるが、いずれも比厚さを 0.2 とした場合と温度誤差はさほど変わらない。誤差の全平均は 6.4% となった。

6. 結 言

高性能 CPU 等の冷却に適用されるスプレッド内における定常熱伝達境界条件下での非定常熱拡散の温度伝播について数値計算を用いて観察した。

温度伝播は特徴ある 3 段階の過程を有し、初期段階には非常に薄い厚みの範囲で 1 次元の温度分布を示し、続いて半無限等温境界条件化と類似したドーム型の温度場を示す。この時点で温度勾配は対面に達し、さらに時間が経過すると共に、中心から同心円を描くようなリング状の横方向の温度勾配となる。スプレッドが矩形であることから、縁に近付くと共にコーナー部のリング形状が歪み、やがて良く知られた定常熱拡散の温度分布に一致する。

解析的モデルと数値計算結果の比較を行うことにより、理論モデルにおける仮定は観察により成り立っている事を示した。この分析結果を用いて解析的モデルに準じて実用的な応答関数を電気回路のアナロジーを用いて近似表現することができた。この回路近似モデルの検証はステップ入力に対する応答だけについて行ったが、電気回路に置き換えたことによって複雑な入力波形に対する温度上昇を簡単に求める事が出来るため、実設計に有益であり広く応用されている。また入力波形の周波数特性に応じて、温度上昇への影響がどの程度あるかといった知見を得ることが出来た。

非定常 3 次元温度場の数値計算結果を可視化することにより、このような詳細な解析と検証を実現でき、実用的な近似表現に結びつけることが出来た。

謝 辞

等価電気回路の検討において、田村哲司氏に有益な議論と助言をいただいた。ここに記して感謝の意を表す。

参考文献

- 1) SIA: International Technology Roadmap for Semiconductors 2000 update, (2000).
- 2) 望月正孝：ヒートパイプとベーパーチャンバーを利用した高発熱 PC の最先端冷却技術，日本伝熱学会関東支部・日本ヒートパイプ協会主催 シンポジウム「電子機器の冷却はどこまで可能か」講演集，(2003)。
- 3) Kondo, Y.: Innovation Technology In Electronic Equipment, Proceedings of JSME International Symposium on Micro-Mechanical Engineering, B15-015 (2003) pp. 245–250.
- 4) Zhou, P., Hom, J., Upadhyaya, G., Goodson, K., Munch, M.: Electro-Kinetic Microchannel Cooling System for Desktop Computers, IEEE, Proceedings of 20th SEMI-THERM Symposium (2004).

- 5) Gochman, S. et al: The Intel Pentium M Processor: Microarchitecture and Performance, Intel Technology Journal, Vol. 07 (2003) Issue 02.
- 6) Lee, S, Song, S., Au, V., Moran, K.P.: Constriction/Spreading Resistance Model for Electronics Packaging, Proceedings of ASME/JSME Thermal Engineers Conference (1995) pp. 199–206.
- 7) Yovanovich, M.: Transient Spreading Resistance of Arbitrary Isoflux Contact Areas: Development of a Universal Time Function”, Proceedings of the 32nd Thermophysics Conference, AIAA 97–2458 (1997).
- 8) Kennedy, D.P.: Spreading Resistance in Cylindrical Semiconductor Devices, Journal of Applied Physics, Vol. 31, No. 8 (1960) pp. 1490–1497.
- 9) Fisher T. S., Zell, F.A., Sikka, K. K., Torrance, K.E.: Efficient Heat Transfer Approximation for the Chip-on-Substrate Problem, Journal of Electronic Packaging, Vol. 118 (1996) pp. 271–279.
- 10) Song, S., Lee, S., Au, V.: Closed-Form Equation for Thermal Constriction/Spreading Resistances with Variable Resistance Boundary Condition, Proceedings of IEPS Conference (1995) pp. 111–121.