全流れ領域・任意長さの円筒導管を通過する 気体流量の簡易計算方法

吉田 肇*・武井良憲・新井健太

国立研究開発法人 産業技術総合研究所 計量標準総合センター 工学計測標準研究部門 圧力真空標準研究グループ
 ☎ 305–8563 茨城県つくば市梅園 1–1–1 つくば中央第 3

(2019 年 12 月 2 日受付；2020 年 5 月 13 日掲載決定)

Simple Method for Calculating the Flow Rate in a Cylindrical Tube of Arbitrary Length over a Whole Flow Regime

Hajime YOSHIDA*, Yoshinori TAKEI and Kenta ARAI

Pressure and Vacuum Standard group, Research Institute for Engineering Measurement, NMIJ, AIST,
 AIST Central-3, 1–1–1, Umezono, Tsukuba, Ibaraki 305–8563

(Received December 2, 2019 ; Accepted May 13, 2020)

Three types of semi-empirical equation for calculating the gas flow rate in a cylindrical tube of arbitrary length-to-diameter ratio are proposed. The solutions of these equations cover all flow regimes from molecular flow to critical flow or subcritical flow via intermediate flow, viscous laminar flow, and turbulent flow. In addition, the calculation procedure is straightforward because it does not require selecting a suitable equation based on the Knudsen number, Reynolds number, and Mach number. Comparing the solutions of the proposed equations with reported results from experiments and computer simulations shows good agreement within 30%.

KEYWORDS : conductance, continuous flow, viscous flow, compressible flow, molecular flow

1. はじめに

本稿では、分子流・層流・乱流・臨界流・亜臨界流を含む全流れ領域に適用可能で、且つ、オリフィスから長管まで、どのような形状 (l/d 比) の円筒導管でも適用可能である気体流量の簡易計算方法を提案する。この計算方法を用いると、円筒導管の直径 d と長さ l 、ガス種、温度さえ与えれば、その円筒導管を通過する気体流量を一意に求めることができる。近年では、ボルツマン方程式や DSMC 法などを用いたコンピュータシミュレーションの計算も多いが、多少精度が劣っていても解析的な計算方法は、多くの研究者・技術者にとって有用であるに違いない。

本稿に先立って、これまでに提案されてきた、円筒導

管の形状から気体流量の計算する式を解説記事としてまとめ、本誌に投稿したので、先にご一読することをお勧めしたい¹⁾。本稿では、新しい計算方法の着想に至った経緯と提案式の説明、及びこれまで報告されてきた実験結果やシミュレーション結果の比較を示した。尚、多数の記号が出てくるため、巻末の付録にまとめている。必要に応じて参照してほしい。

2. 全流れ領域・任意長さの円筒導管を通過する気体流量の簡易計算方法

2.1 層流・乱流・臨界流・亜臨界流の式の結合

Fig. 1 は、音速コンダクタンスの実験式（下記の式 (1) と式 (2)）を用いて計算した、空気流量の l/d 比（円筒導管の長さ l と直径 d の比）依存性を示している。尚、式 (1) と式 (2) は、それぞれ、文献1 の式 (22) と式 (25) に対応している。

* E-mail : hajime-yoshida@aist.go.jp

Fig. 1. Length-to-diameter (l/d) ratio dependence of flow rate calculated by the empirical sonic conductance equations of (1) and (2) with the symbol $\bigcirc$, Santeler's transition flow rate Q_T of Eq. (31) in Ref 1 with the symbol $\square$, and the proposed equation in this study Q_C of Eq. (3) with the symbol $\blacklozenge$. The flow rate for the viscous laminar flow Q_{VL} of Eq. (10) in Ref 1, the turbulent flow rate Q_{TB} of Eq. (16) in Ref 1, the critical flow rate Q_{CR} of Eq. (19) in Ref 1 with $C_d=1$ are also shown for comparison. The calculation conditions are (a) $p_u=5 \times 10^5$ Pa, $p_d=1 \times 10^5$ Pa and (b) $p_u=1 \times 10^3$ Pa, $p_d=1$ Pa, respectively, for air. The inner diameter of tube d is 10 mm.

$$Q_{CR} = 10^5 p_u C_S \sqrt{\frac{T_0}{T}} \quad (1)$$

$$C_S = \frac{0.002A}{\sqrt{\frac{20l}{(10^3 d)^{1.31}} + 1}} \quad (2)$$

比較のため、層流の式（文献1の（式10））、乱流の式（文献1の式（16））、臨界流の式（文献1の式（19））、及び Santeler の出口損失モデルの式（文献1の式（31））の計算結果も、併せて示してある。

先ず、**Fig. 1** (a) の計算結果に着目してほしい。(a) の計算条件（上流圧力 $p_u=5 \times 10^5$ Pa、下流圧力 $p_d=1 \times 10^5$ Pa）は、音速コンダクタンスの実験式を求めた時の実験条件と等しくしてあるから、その解（記号 $\bigcirc$ ）は実験結果と等価である。この解は、 l/d 比が10以下では臨界流の解に一致し、 l/d 比が 10^3 以上では乱流の解にほぼ一致している。このことから、音速コンダクタンスの実験式は、 l/d 比の増加に伴う、臨界流から乱流への遷移を良く表していることがわかる。

一方で、Santeler の出口損失モデルの式の解（記号

$\square$ ）は、 l/d 比が 10^2 以上で、音速コンダクタンスの実験式の解より大きくなり、流量を過大評価していることがわかる。これは、Santeler の出口損失モデルの式に、乱流の項が含まれていないためである。尚、音速コンダクタンスの実験式で求めた流量から、レイノルズ数 Re を計算したところ、 $l/d < 10^5$ では17000以上となり、層流にはならないことを確認できた^{*1}。

さらに、音速コンダクタンスの実験式（式（2））について詳しく解析すると、右辺の分子（0.002A）は、臨界流の式に対応しており、右辺の分母 $\sqrt{\quad}$ 内の第1項（ $20l/(10^3 d)^{1.31}$ ）は、（臨界流の式/乱流の式）²に対応していることがわかった。このことから、音速コンダクタンスの実験式には、(i) 臨界流や乱流の項が持つべき、比熱比 γ 、温度 T 、分子量 M 、粘性係数 η 、上流圧力 p_u という項が含まれていない、(ii) 層流と亜臨界流の項が含まれていない、という不十分な点があり、改善の余地があることがわかった。

そこで著者らは、音速コンダクタンスの実験式を参考に、層流、乱流、臨界流、亜臨界流の式を結合した連続流の式（式（3））を開発した。先ず、乱流流量 Q_{CT} （文献1の式（16））と圧縮性流れの流量 Q_{CF} を結合した α を求める。ここで Q_{CF} は、下流と上流の圧力比（ p_d/p_u ）が臨界圧力比（ p_d/p_u ）*より小さい時は、臨界流量 Q_{CR} （文献1の式（19））に等しく、そうでない時は亜臨界流量 Q_{SC} （文献1の式（20））に等しいとする。

$$\alpha = \frac{Q_{CF}}{\sqrt{\left(\frac{Q_{CF}}{Q_{TB}}\right)^2 + 1}}$$

$$Q_{CF} = Q_{CR} \text{ when } (p_d/p_u) < (p_d/p_u)^*$$

$$Q_{CF} = Q_{SC} \text{ when } (p_d/p_u) \geq (p_d/p_u)^*$$

次いで、得られた α と層流の式を結合することで、連続流の流量 Q_c （式（3））を求めた^{*2}。ここで、 Q_{VL} は層流流量（文献1の式（10））である。

$$Q_C = \frac{\alpha}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{Q_{VL}}\right)^2 + 1}} = \frac{Q_{CF}}{\sqrt{\left(\frac{Q_{CF}}{Q_{TB}}\right)^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{Q_{CF}}{Q_{VL} \sqrt{(Q_{CF}/Q_{TB})^2 + 1}}\right)^2 + 1}}$$

^{*1} 連続流において、流量 Q から Re を計算するには、 $Re = \frac{4MQ}{RT\pi d\eta}$ という関係式を使うと便利である。

^{*2} 式（3）の分母は、二乗和平方根の形をとっているが、 n 乗和 n 乗根（ n は任意の正の数）という形であって良い。本稿では、空圧機器分野での経験に基づき、二乗和平方根（ $n=2$ ）としたが、より適切な n の値があるかもしれない。

$$Q_C = \frac{Q_{VL} Q_{TB} Q_{CF}}{\sqrt{Q_{VL}^2 Q_{TB}^2 + Q_{TB}^2 Q_{CF}^2 + Q_{CF}^2 Q_{VL}^2}} \quad (3)$$

Fig. 1 (a) には、式 (3) の解 (記号 ◆) も併せて示してあり、音速コンダクタンスの実験式の解 (即ち実験結果) と概ね一致していることがわかる。

一方、Fig. 1 (b) では、式 (3) の解は、Santeler の出口損失モデルの式の解と良く一致している。(b) の条件と得られた流量から、 Re を計算したところ、 $l/d < 10^5$ では 1300 以下となり、即ち、(b) の条件では、気体の流れは乱流にならず、臨界流から層流に遷移することがわかった。つまり、(b) の条件は、Santeler の出口損失モデルの式が成り立つ条件を満たしており、この式と概ね一致した解を与える式 (3) も妥当な計算結果を与えることができると考えられる。

このように層流・乱流・臨界流・亜臨界流の結合式 (式 (3)) は、レイノルズ数 Re やマッハ数 Ma を用いた流れ領域の判定をすることなく、 l/d 比の増加に伴う臨界流から、乱流・層流への遷移を表すことができた。

2.2 全流れ領域・任意長さの円筒導管に適用可能な流量式

上で求めた、層流・乱流・臨界流・亜臨界流の結合式 (式 (3)) を用いて、これまで提案されてきた 3 種類の半経験式 (Knudsen の式 (文献1 の式 (29)), Thomson-Owens (TO) の式 (文献1 の式 (30)), Livesey の式 (文献1 の式 (33))) を修正することにより、全流れ領域・任意長さの円筒導管に適用可能な流量式を開発した。式の修正点は、以下の 3 点である。

1 点目は、Knudsen の式と TO の式について、層流コンダクタンス C_{VL} (文献1 の式 (11)) の代わりに、式 (3) を用いることにした。この修正により、分子流から層流への遷移だけでなく、乱流・臨界流・亜臨界流への遷移に対しても、適用できるようになる。Livesey の式にとっては、式 (3) を用いることで、反復計算が不要となり、計算が単純となる。

2 点目は、Knudsen の式と TO の式に対して、連続流量 Q_c (式 (3)) を、そのまま代入することは三つの点で不都合があり、以下の修正を施した。(i) の形をコンダクタンス C の計算式から流量 Q の計算式へ変えた。(ii) 層流流量 Q_{VL} を計算するにあたっては、Livesey が提案するように、円筒導管の長さ l ではなく、実効長さ l_e を使用することにした^{2~4)}。(iii) Knudsen の式と TO の式の間接流の項 (いずれも右辺第二項) が、臨界流又は亜臨界流になるくらい圧力が高く (Kn が小さく) なっても、0 にならずに残ってしまい、適切な解

を与える妨げとなった。そこで、Knudsen と TO の修正式には補正係数 x を導入した。修正 Knudsen の式の場合は $x = Q_M/1.235$ 、修正 TO の式の場合は $x = 3\pi(2-f)Q_M/16f$ である。尚、修正 Livesey の式の場合は、補正係数 x は不要 ($x=0$) である。

まとめると、修正された連続流量 Q_c' は以下のようになる。

$$Q_c' = \frac{Q_{VL}' Q_{TB}' (Q_{CF} - x)}{\sqrt{Q_{VL}'^2 Q_{TB}'^2 + Q_{TB}'^2 (Q_{CF} - x)^2 + (Q_{CF} - x)^2 Q_{VL}'^2}} \quad (4)$$

$$Q_{VL}' = \frac{\pi d^4}{128\eta(l+0.41d)} \bar{p}(p_u - p_d) \quad (5)$$

$$Q_{TB}' = 1.015d^{19/7} \left(\frac{\bar{v}^6}{\eta}\right)^{1/7} \left(\frac{p_u^2 - p_d^2}{l+0.41d}\right)^{4/7} \quad (6)$$

When $(p_d/p_u) < (p_d/p_u)^*$,

$$Q_{CF} = Q_{CR} = C_d p_u A \sqrt{\frac{RT}{M}} \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}},$$

When $(p_d/p_u) \geq (p_d/p_u)^*$

$$Q_{CF} = Q_{SC} = C_d p_u A \sqrt{\frac{RT}{M}} \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_d}{p_u}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_d}{p_u}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]. \quad (7)$$

ここで、 Q_{VL}' は補正された層流流量、 Q_{TB}' は補正された乱流流量である。

3 点目は、Knudsen の式と TO の式について、円筒導管の分子流コンダクタンス C_{Mi} (文献1 の式 (6)) の代わりに、任意長さの分子流流量を用いることにした。例えば、通過確率の計算に Santeler の近似式 (文献1 の式 (8)) を用いた場合、任意長さの分子流流量 Q_M は、式 (8) のように表される。

$$Q_M = \frac{\pi d^2}{16} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{4(l/d) + 14}{3(l/d)^2 + 18(l/d) + 14} (p_u - p_d) \quad (8)$$

結局、修正 Knudsen の式は、

$$Q_K' = Q_C' + Q_M \frac{1 + \sqrt{\frac{M}{RT}} \frac{d\bar{p}}{\eta}}{1 + 1.235 \sqrt{\frac{M}{RT}} \frac{d\bar{p}}{\eta}} \quad (9)$$

修正 TO の式は、

$$Q_{TO}' = Q_C' + Q_M \left(\frac{3\pi}{16} \cdot \frac{2-f}{f} \cdot \frac{1}{1+Kn} + \frac{Kn}{1+Kn} \right) \quad (10)$$

修正 Livesey の式は、

Fig. 2. Downstream pressure to upstream pressure (p_d/p_u) ratio dependence of discharge coefficient C_d . Symbols ○ are obtained from the comparison with Perry's empirical equations of (26) and (27) and equations based on gas dynamics of Eqs. (19) and (20) in Ref 1, respectively. Symbols ■ are given in Table 1 and 2 in Ref 6.

$$Q'_L = Q'_C + \frac{Q_M}{1 + \varphi(Kn)} \quad (11)$$

となった。ここで、 $\varphi(Kn)$ はLiveseyの補正係数（文献1の式(34)）である。

2.3 流出係数 C_d の経験式

修正 Knudsen の式（式(9)）、修正 TO の式（式(10)）、または修正 Livesey の式（式(11)）で流量計算を行うにあたって、流出係数 C_d が未決定のパラメータとして残された。そこで、圧縮性流れの原理式（文献1の式(19)と式(20)）と Perry の経験式⁵⁾（文献1の式(26)と式(27)）の比較結果や、Sharipov が過去の実験結果をまとめた表⁶⁾の結果を用いることで、流出係数 C_d の経験式の作成をした。Perry の経験式は空気についての式であるが、Sharipov の表には、様々な気体種に対する C_d が記載されており、 C_d は気体種にあまり依存しないことわかる。よって、ここでは C_d のガス種依存性はないものとした。**Fig. 2** は、 C_d の p_d/p_u 比依存性を示している。この式から、流出係数 C_d の経験式（式(12)）を得た。式のフィッティング精度は、 $\pm 5\%$ である。

$$C_d = 0.8623 - 0.2541 \left(\frac{p_d}{p_u} \right) \quad (12)$$

3. 計算結果

3.1 計算例

下流圧力 p_d が上流圧力 p_u に対して無視できるくらい小さい時（ $p_d \ll p_u$ ）の修正 Knudsen の式（式(9)）の解は、文献1の Fig. 2 にすでに示してある。ここで、縦

Fig. 3. Pressure dependence of conductance C calculated by the three proposed equations for air : modified Knudsen equation of Eq. (9) with the symbol ●, modified TO equation of Eq. (10) with the symbol □, and modified Livesey equation of Eq. (11) with the symbol △. The diameter and l/d ratio of the tube are 10 mm and (a) $l/d = 0.001$, (b) $l/d = 10$, and (c) $l/d = 10^4$, respectively. p_d is negligibly small. C_d is calculated by Eq. (12). For comparison, molecular flow conductance C_M of Eqs. (7) and (8) in Ref 1, viscous-laminar-flow conductance C_{VL} of Eq. (11) in Ref 1, turbulent-flow conductance C_{TB} of Eq. (17) in Ref 1, and pressure-independent factor of critical flow K_{CR} of Eq. (21) in Ref 1 are also shown.

軸のコンダクタンス C は Q_k/p_u から求めた。文献1の Fig. 2 は、参考文献7の Fig. 4.50 と良く似ているが、参考文献7では、遷移領域のコンダクタンスをフリーハンドで繋いでいるのに対し、文献1の Fig. 2 の結果は全てが計算値である。

Fig. 3 は、 $p_d \ll p_u$ の時のコンダクタンスの p_u 依存性を、修正 Knudsen の式（式(9)）、修正 TO の式（式(10)）、修正 Livesey の式（式(11)）で計算した結果の比較を示している。円筒導管の内径 d は 10 mm で、ガス種は空気である。比較のため、分子流コンダクタンス C_M （文献1の式(7)と式(8)）、層流コンダクタンス C_{VL} （文献1の式(11)）、乱流コンダクタンス C_{TB} （文献1の式(17)）、臨界流の圧力に依存しない項 K_{CR} （文献1の式(21)）の計算結果も併せて示してある。

(a) $l/d = 0.001$ の場合（オリフィス）、修正 Knudsen

の式で求めたコンダクタンス (記号 ●) は, 1 Pa (Kn はおよそ 1) までは C_M に等しい。その後, 圧力の増加とともにコンダクタンスは増加し, 10^2 – 10^3 Pa で K_{CR} に到達する。修正 TO の式 (記号 □) と修正 Knudsen の式は, $f=1$ の時, 8% 以下で一致した。修正 Livesey の式 (記号 △) は, 10^1 – 10^2 Pa で K_{CR} に対してオーバーシュートするが, それでも, 修正 Knudsen の式と 33% 以下で一致した。尚, C_{VL} や C_{TB} は, オリフィスのような短い管では適切な解を与えることができない。

(b) $l/d=10$ の場合も, 修正 Knudsen の式で求めたコンダクタンスは, 1 Pa までは C_M に等しい。その後, 圧力の増加とともに, C_{VL} に沿うようにして, コンダクタンスは増加し, 10^2 – 10^3 Pa で K_{CR} に到達する。縦軸が対数であるため, 修正 Knudsen, 修正 TO の式, 修正 Livesey の式の解は重なって見えるが, 修正 Knudsen の式は, 修正 TO の式 ($f=1$) と 14% 以下, 修正 Livesey の式と 4% 以下で一致した。

(c) $l/d=10^4$ の場合も, 修正 Knudsen の式で求めたコンダクタンスは, 1 Pa までは C_M に等しい。その後, 圧力の増加とともに, C_{VL} に沿うようにしてコンダクタンスは増加し, 今度は K_{CR} ではなく, C_{TB} に到達する。この時の圧力 ($2\text{--}3 \times 10^4$ Pa) における Re を計算したところ 1140–2020 となり, 文献1の Table 2 に示した境界値とよく一致した。その後も圧力の増加とともに, コンダクタンスは緩やかに上昇していく。この計算条件で, 修正 Knudsen の式は, 修正 TO の式 ($f=1$) と 15% 以下, 修正 Livesey の式と 3% 以下で一致した。

3.2 実験結果やシミュレーション結果との比較

Fig. 4 は, 修正 Knudsen の式と藤本・宇佐美の実験式 (文献1の式 (32)) の比較を示している⁸⁾。藤本・宇佐美の実験結果は, Liepman⁹⁾, Sreekanth¹⁰⁾, Willis¹¹⁾, Lord¹²⁾, Smetana¹³⁾, Naumann¹⁴⁾の結果とよく一致している。図の横軸は上流チャンバの圧力から求めたクヌーゼン数の逆数 ($1/Kn$), 縦軸は厚さ 0 を仮定した円管 (即ちオリフィス) の分子流コンダクタンス C_{MO} に対する円管コンダクタンスである。この両軸の取り方は, 比較を容易にするため, 藤本・宇佐美の論文⁸⁾と同じにしてある。修正 Knudsen の式と藤本・宇佐美の実験式は, $l/d \leq 0.188$ では 10% 以下で一致した。 l/d 比が大きくなると, $1/Kn=10^1$ – 10^4 で差が大きくなったが, それでも, 27% 以下で一致した。

Fig. 5 は, 厚さ 0 のオリフィスに対する, 修正 Knudsen の式と Sharipov による DSMC 計算の結果⁶⁾の比較を示している。この DSMC の計算結果は, Sreekanth¹⁵⁾, Jitschin¹⁶⁾, 及び藤本・宇佐美の実験結果⁸⁾とよく一致している。図の横軸は気体希薄係数 δ ($=\sqrt{\pi}/4Kn$), 縦軸は

Fig. 4. Comparison of solutions by modified Knudsen equation (9) and the empirical equation (32) of Fujimoto and Usami⁸⁾ in Ref 1. C/C_{MO} at the vertical axis is the ratio of the conductance C to the molecular flow conductance of the orifice with the zero thickness C_{MO} . Symbols of ●, □, ◆, △, and ▼ mean the calculation results by Fujimoto and Usami equation when $l/d=0.025$, 0.188, 0.817, 3.17, and 12.7, respectively. The solid lines are the corresponding calculation results by modified Knudsen equation (9). p_d is negligibly small. C_d is calculated by Eq. (12).

Fig. 5. Comparison of solutions by modified Knudsen equation (9) and calculation results of direct-simulation Monte Carlo (DSMC) for orifice with zero thickness by Sharipov⁶⁾. Symbols of ○, □, ◇, and △ mean the calculation results by DSMC when $p_d/p_u=0$, 0.1, 0.5, and 0.9, respectively. The solid and dot lines are the corresponding calculation results by modified Knudsen equation (9). C_d is calculated by Eq. (12).

規格化された質量流量で, $p_d/p_u=0$ の時の分子流流量に対する流量比である。この両軸の取り方も, 比較を容易にするため, Sharipov の論文⁶⁾と同じにしてある。修正 Knudsen の式は Sharipov による DSMC 計算の結果と 21% 以下で一致した。

Table 1. Comparison of reported experimental results,^{8, 17~19)} and computer simulation results,^{2, 6, 20, 21)} and modified Knudsen equation (9) where C_d is calculated by Eq. (12).

		$1/Kn$	l/d	p_u/p_d	Gas	Degree of agreement
Experiment	Brown <i>et al.</i> ¹⁷⁾	10^{-3} – 10^2	2.4–127.7	0–0.98	Air	<38%
	Fujimoto and Usami ⁸⁾	10^{-2} – 10^4	0.025–12.7	<0.01 or compensated	Air	<28%
	Tison ¹⁸⁾	10^{-3} – 10^2	926	<0.001	N ₂ , SF ₆ , He	<13%
	Gronych <i>et al.</i> ¹⁹⁾	10^{-5} –4	~0	<0.025	N ₂	<4%
Computer simulation	Livesey ²⁾	0.1–2	~0	0.05–0.625	—	<7%
	Sharipov ⁶⁾	10^{-2} – 10^2	0	0–0.9	—	<21%
	Sharipov ²⁰⁾	0.1– 10^2	0–1	0	—	<18%
	Titarev ²¹⁾	< 10^2	1–50	0	—	<28%

Table 1 は、修正 Knudsen の式の計算結果と、これまで報告された実験結果^{8, 17~19)}やコンピュータシミュレーションの結果^{2, 6, 20, 21)}の比較をまとめたものである。Brown ら¹⁷⁾のデータに比較的大きなデータのばらつきがあることを考えると、これらの結果と、修正 Knudsen の計算結果は 30% 以下で一致していると言える。

4. 議 論

従来、気体流量 Q を計算するには、適切な式を選択するために、流れ領域の判定が必要であったが、以下に示す二つの理由により、容易でなかった。

1 点目は、レイノルズ数 Re とマッハ数 Ma を計算するには、流速 u が必要であるが、 u を計算するためには、気体流量 Q が必要であるという循環関係が問題であった。2 点目は、気体の流れ領域の境界で、流量特性又はコンダクタンスは、徐々に遷移していくため、明確な境界が決めることが困難なことであった。文献1の Table 1-2 が示すように、流れ領域の境界を示す Kn や Re には文献によるばらつきがあり、流れ領域の境界では、どの式を使うべきか明確でなかった。

提案した三つの修正式（修正 Knudsen の式、修正 TO の式、修正 Livesey の式）を用いると、流れ領域の判定が不要で、反復計算の必要も無く、気体流量を一意に求めることができる。加えて、流れ領域の境界においても、非連続点なく、流量又はコンダクタンスの変化を滑らかに表すことができる。

提案した三つの式の信頼性は、気体の流れがどの領域にあるかによって異なる。分子流の場合、Santeler の近似式（文献1の式（8））を用いたことによる $\pm 0.7\%$ の誤差を含むものの、信頼性は高いだろう。但し、表面粗さによる分子流コンダクタンスの変化^{22~26)}の影響は含まれていないので、内面の荒い円筒導管の計算については

注意が必要である。中間流については、修正 TO の式で f の値を変化させると明らかなように、数十%の不確かさがある。層流で用いる Hagen-Poiseuille の式は、原理が明快であり、信頼性は高いだろう。乱流では、流量が表面粗さに大きく依存するため、信頼性が低いだろう。臨界流や亜臨界流においては、少なくとも、流出係数 C_d の経験式（式（12））を用いることによる $\pm 5\%$ の不確かさが含まれる。層流から臨界流への遷移領域については、Fig. 4 の結果が示すように 30% 以下の誤差があり、より正確な計算を行うためには、さらなる検討が必要となる。

5. ま と め

これまで提案されてきた3種類の半経験式（Knudsen の式、TO の式、Livesey の式）を修正することにより、全流れ領域・任意長さの円筒導管に適応可能な流量式を開発した。これらの計算結果は、過去の実験結果やシミュレーション結果と 30% 以下で一致した。計算手順は以下の通りである。

- 1) 補正された層流流量 Q_{VL}' を式（5）で計算する。
- 2) 補正された乱流流量 Q_{TB}' を式（6）で計算する。
- 3) 圧縮流れの流量 Q_{CF} を式（7）で計算する。 $(p_d/p_u) < (p_d/p_u)^*$ の時は臨界流になるから $Q_{CF} = Q_{CR}$, $(p_d/p_u) \geq (p_d/p_u)^*$ の時は亜臨界流になるから $Q_{CF} = Q_{SC}$ となる。流出係数 C_d は式（12）で計算する。
- 4) 式（4）に、 Q_{VL}' , Q_T' , Q_{CF} を代入することにより、修正された連続流流量 Q_C' を求める。
- 5) 分子流流量 Q_M を（式（8））で計算する。
- 6) 最終結果である気体流量は、式（9）、式（10）、または式（11）に、 Q_M と Q_C' を代入することで求められる。

謝 辞

(株) フクダの皆様に、計算結果についてご議論頂きました。厚く御礼申し上げます。

付録 記号の意味

d (m) : 円筒導管の直径
 l (m) : 円筒導管の長さ
 A (m²) : 円筒導管の断面積
 M (kg/mol) : 分子量
 η (Pa s) : 粘性係数
 $\bar{v}$ (m/s) : 平均分子速度 ($=\sqrt{8RT/\pi M}$)
 u (m/s) : 流速
 u_s (m/s) : 音速 ($=\sqrt{\gamma RT/M}$)
 γ : 比熱比
 p_u (Pa) : 円筒導管の上流圧力
 p_d (Pa) : 円筒導管の下流圧力
 $\bar{p}$ (Pa) : 上流圧力 p_u と下流圧力 p_d の平均値
 ρ (kg/m³) : ガス密度
 T (K) : 温度
 λ (m) : 平均自由行程 ($=1/\sqrt{2}nd_m^2$)。 d_m は分子直径 (m), n は気体分子密度 (m⁻³) である。
 Kn : クヌーゼン数 (文献1 の式 (1))
 Re : レイノルズ数 (文献1 の式 (2))
 Ma : マッハ数 (文献1 の式 (3))
 Q (Pa m³/s) : 気体流量
 C (m³/s) : コンダクタンス
 C_{Mo} (m³/s) : オリフィスの分子流コンダクタンス (文献1 の式 (5))
 C_{Ml} (m³/s) : 長い円筒導管の分子流コンダクタンス (文献1 の式 (6))
 C_M (m³/s) : 任意長さの円筒導管の分子流コンダクタンス (文献1 の式 (7) と式 (8))
 Q_M (Pa m³/s) : 任意長さの円筒導管の分子流流量 (本稿式 (8))
 Q_{VL} (Pa m³/s) : 層流流量 (文献1 の式 (10))
 Q_{VL}' (Pa m³/s) : 補正された層流流量 (本稿式 (5))
 C_{VL} (m³/s) : 層流コンダクタンス (文献1 の式 (11))
 K_{VL} (m³/(Pa s)) : 層流の圧力に依存しない項 (文献1 の式 (12))
 Q_{TB} (Pa m³/s) : 乱流流量 (文献1 の式 (13) または式 (16))
 Q_{TB}' (Pa m³/s) : 補正された乱流流量 (本稿式 (6))
 C_{TB} (m³/s) : 乱流コンダクタンス (文献1 の式 (17))
 $(p_d/p_u)^*$: 臨界圧力比 (文献1 の式 (18))
 Q_{CR} (Pa m³/s) : 臨界流流量 (文献1 の式 (19), 式 (22), 式 (26), 及び本稿式 (1))

Q_{SC} (Pa m³/s) : 亜臨界流流量 (文献1 の式 (20), 式 (23), 式 (27))
 Q_{CF} (Pa m³/s) : 圧縮流れの流量 (本稿式 (7))
 K_{CR} (m³/s) : 臨界流の圧力に依存しない項 (文献1 の式 (21))
 C_d : 流出係数 (本稿式 (12))
 C_S (m³/(s Pa)) : 音速コンダクタンス (文献1 の式 (25), 及び本稿式 (2))
 C_{SL} (m³/s) : すべり流のコンダクタンス (文献1 の式 (28))
 f : 壁面で拡散反射する気体分子の割合
 C_K (m³/s) : Knudsen の式によるコンダクタンス (文献1 の式 (29))
 C_{TO} (m³/s) : Thomson-Owens の式によるコンダクタンス (文献1 の式 (30))
 Q_T (Pa m³/s) : Santeler の出口損失モデルによる層流と臨界流の合成式による流量 (文献1 の式 (31))
 Q_L (Pa m³/s) : Livesey の式による流量 (文献1 の式 (30))
 Q_C (Pa m³/s) : 連続流流量 (本稿式 (3))
 $Q_{C'}$ (Pa m³/s) : 補正された連続流流量 (本稿式 (4))
 $Q_{K'}$ (Pa m³/s) : 修正 Knudsen の式で計算した流量 (本稿式 (9))
 $Q_{TO'}$ (Pa m³/s) : 修正 Thomson-Owens (TO) の式で計算した流量 (本稿式 (10))
 $Q_{L'}$ (Pa m³/s) : 修正 Livesey の式で計算した流量 (本稿式 (11))
 R (J mol⁻¹ K⁻¹) : 気体定数 ($=8.31$)

文 献

- 1) 吉田 肇, 武井良憲, 新井健太 : [表面と真空](#) **63**, 304 (2020).
- 2) R.G. Livesey : [J. Vac. Sci. Technol., A](#) **19**, 1674 (2001).
- 3) R.G. Livesey : [Vacuum](#) **76**, 101 (2004).
- 4) V.W. Wuest : [Ing.-Arch.](#) **22**, 357 (1954).
- 5) J.A. Perry Jr. : [Trans. ASME](#) **71** 757 (1949).
- 6) F. Sharipov : [J. Fluid Mech.](#) **518**, 35 (2004).
- 7) K. Jousten (Ed.) : "Handbook of Vacuum Technology" (Wiley-VCH Verlag GmbH and Co., Weinheim, 2008) p. 154.
- 8) T. Fujimoto and M. Usami : [J. Fluids Eng.](#) **106**, 367 (1984).
- 9) H.W. Liepmann : [J. Fluid Mech.](#) **10**, 65 (1961).
- 10) A.K. Sreekanth : [Proceeding the 4th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics](#), Vol. 1, Academic Press, New York (1964) 621.
- 11) D.R. Willis : [J. Fluid Mech.](#) **21**, 21 (1965).

- 12) R.G. Load, F.C. Hurlbut and D.R. Willis : Proceedings of the 5th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Vol. 2, Academic Press, New York (1966) 1235.
- 13) F.O. Smetana, W.A. Sherrill and D.A. Schort : 6th Symposium on Rarefied gas Dynamics (1968) p. 1243.
- 14) A. Naumann and C.H. Chun : Proceedings of the 9th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Vol. 2, DFVLR Press, Porz-Wahn, Germany (1974) 21.
- 15) A.K. Sreekanth : *Phys. Fluids* **8**, 1951 (1965).
- 16) W. Jitschin : *Vacuum* **76**, 89 (2004).
- 17) G.P. Brown, A. DiNardo, G.K. Cheng and T.K. Sherwood : *J. Appl. Phys.* **17**, 802 (1946).
- 18) S.A. Tison : *Vacuum* **44**, 1171 (1993).
- 19) T. Gronych, L. Peksa, D. Pražák, M. Vičar, P. Řepa, Z. Krajíček, F. Staněk and J. Tesař : *Vacuum* **84**, 280 (2009).
- 20) F. Sharipov : *Vacuum* **86**, 1697 (2012).
- 21) V.A. Titarev and E.M. Shakhov : *Vacuum* **86**, 1709 (2012).
- 22) D.H. Davis, L.L. Levenson and N. Milleron : *J. Appl. Phys.* **35**, 529 (1964).
- 23) W. Sugiyama, T. Sawada and K. Nakamori : *Vacuum* **47**, 791 (1996).
- 24) H. Yoshida, M. Shiro, K. Arai, M. Hirata and H. Akimichi : *J. Vac. Sci. Technol., A* **28**, 937 (2010).
- 25) H. Yoshida, M. Shiro, K. Arai, M. Hirata and H. Akimichi : *J. Vac. Soc. Jpn.* **54**, 298 (2011). (in Japanese).
- 26) T. Verbovšek, B.Š. Batič and J. Šetina : *Vacuum* **161**, 150 (2019).