薬学雑誌
YAKUGAKU ZASSHI
92 (3) 343-348 (1972)

UDC 615.014.22

粉粒体の圧縮成型に関する研究 (第7報¹⁾) 円形平型杵によるひねりなしの片側圧縮
における粉粒体圧縮層内の応力分布および密度分布に関する理論的考察²⁾

別所貞雄, 富岡穂一,^{3a)} 伊藤四郎^{3b)}
中外製薬総合研究所,^{3b)} 東京工業大学^{3b)}

Studies on the Compression of Powder-like Materials. VII.¹⁾ Some Theoretical
Consideration of the Stress Distribution and Density Distribution in Non
Twist and One Side Compression of Several Powder-like Mate-
rials by the Punch of Round and Flat Type²⁾

SADAO BESSHO, SUICHI TOMIOKA^{3a)} and SHIRO ITO^{3b)}
Research Laboratories, Chugai Pharmaceutical Co. Ltd.^{3a)} and Faculty
of Technology, Tokyo Institute of Technology^{3b)}

(Received August 5, 1971)

Theories concerning the three-dimensional stress distribution and density distribution within the compressed powder-like material layer are generally very difficult to solve but, in the case of one-sided compression without twisting by the disc-type flat punch, approximate elucidation can be obtained by the introduction of experimental data and some hypotheses. As an example, a solution for calculating the stress distribution and density distribution is given for each of the compressed state equations for powder-like material. Considering the experimental fact that, in one-sided compression without twisting by the disc-type flat punch, powder-like material inside the compressed layer do not move in the direction of radius and circumference, or their movement can be neglected, their movement can be approximated as deformation in the direction of compression, and assumption of linear approximation in r -direction and exponential approximation in z direction, gives approximate solution by taking initial and boundary conditions into consideration. The assumptions introduced were examined for their appropriateness based on experimental results obtained in past studies.

粉粒体の圧縮理論には粉粒体の圧縮状態方程式に関するものと圧縮層内の応力分布および密度分布に関するものが多い。しかしいずれもこれといった決定的なものが一般に認められるまでには至っていない。特に普遍的な理論、一般的な理論は少なく、個々の場合の圧縮状態方程式や応力分布、密度分布を導いているものがほとんどである。^{4,5,6)}

粉粒体圧縮層内の三次元応力分布および密度分布に関する理論は一般的には解くことがきわめて困難であるが、円形平型杵によるひねり無しの片側圧縮の場合には、円筒座標系において θ 方向には一定と考え二次元問題として取扱うことができる。二次元の場合でも一般解法は難かしいが、既往の研究および実験事実を考慮し

Fig. 1. Deformation of microscopical volume

- 1) 第6報: 別所貞雄, 富岡穂一, 伊藤四郎, 薬誌.
- 2) 日本薬学会第91年会にて発表, 福岡, 1971年4月. 92, 345 (1972).
- 3) Location: a) Takada, Toshima-ku, Tokyo; b) Ookayama, Meguro-ku, Tokyo.
- 4) 大矢根守哉, 粉末および粉末冶金, 13, 113 (1966) 総説.
- 5) 西原利夫, 郡利矩, 谷哲郎, 機械学会論文集, 20 (91) 208 (昭29).
- 6) 津和秀夫, 明田勇蔵, 精密機械, 29 (12) 945 (1963).

て若干の仮定を導入すると近似的に解くことができる。

今回はその一つの例として、粉粒体の圧縮状態方程式ごとに応力分布および密度分布を求める解法の詳細を報告する。

1. 主な使用記号

粉粒体圧縮層に関して、Fig. 1 のごとく記号を定める。また本報においては絶対単位系を用いることとする。

- γ : 粉粒体の見掛け密度
- ρ : 粉粒体の真密度
- $\bar{\epsilon}_0$: 初期の平均空隙率 ($t=0$)
- ϵ : 空隙率 ($t=t$)
- R : 円形平型杵の半径
- D : 円形平型杵の直径
- K : Rankine 係数
- μ : 壁摩擦係数
- t : 時間
- S_0 : 粉粒体層の厚さ ($t=0$)
- S : 圧縮層の厚さ ($t=t$)
- Z : 圧縮上杵面から Z 方向への距離
- r : 中心から r 方向への距離
- p : 圧縮圧力
- p_U : 上杵圧縮圧力
- p_L : 下杵圧縮圧力
- τ_{ij} : $i=j$ の時 i 方向の直応力, $i \neq j$ の時 i 軸に垂直な面内の j 方向の剪断応力
- k_i : i 方向の外力
- u_i : i 方向の速度
- $f_i(\)$: 関数
- k, c_i, a_i : 定数

2. 理 論

一般に変形する粉粒体の三次元応力方程式は円筒座標 (r, θ, z) を用い、Euler 的見方で表わすと (1) 式

$$\left. \begin{aligned} \left\{ k_r - \left(\frac{du_r}{dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) \right\} \rho(1-\epsilon) - \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \left\{ k_\theta - \left(\frac{du_\theta}{dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) \right\} \rho(1-\epsilon) - \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} - \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \left\{ k_z - \frac{du_z}{dt} \right\} \rho(1-\epsilon) - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

になる。

今慣性項を無視し、各応力とひずみとの関係式を求め (1) 式に代入し、初期条件、境界条件を考慮して解けば、ひずみの分布すなわち密度分布を求めることができる。

また各応力とひずみとの関係式より応力分布を求めることができる。

円形平型杵による片側圧縮の場合には、円筒座標系において、 θ 方向は一定と考えて考察すれば十分である。

(1) 式において速度の関係する項、粉粒体の自重の項を無視し θ 方向を一定と考えれば (2) 式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

になる。

しかし、この場合でも各応力とひずみとの関係は不明なので容易ではない。そこでさらに簡単なひねりなしの圧縮の場合を考え、従来より知られている実験事実に基づいて簡略化する。すなわち円形平型杵のひねりなしの片側圧縮においては圧縮層内における粉粒体は半径方向および円周方向には動かないか、動いても無視できる程度であることを考慮して圧縮方向のみの変形と近似する。

この近似により (3) 式

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (3)$$

のみを初期条件および境界条件を用いて解けば良い。

まず第一に Fig. 1 の変形において連続の式 (4) 式

$$(1 - \varepsilon_0) S_0 = \int_0^R \int_0^S (1 - \varepsilon) dr \cdot dz \quad (4)$$

が成立する。

また粉粒体の圧縮状態方程式すなわち τ_{zz} と ε との関係式は (5) 式

$$\varepsilon = f_1(\tau_{zz}) \quad (5)$$

のごとく実験的に求められているものとする。

また見掛け密度 γ は (6) 式

$$\gamma = \rho(1 - \varepsilon) \quad (6)$$

で求められる。

(3) 式の偏微分方程式の解、すなわち剪断応力 τ_{rz} 、直応力 τ_{zz} は一般的に (7) 式 および (8) 式

$$\tau_{rz} = f_2(r, z) = f_3(r) \cdot f_4(z) \quad (7)$$

$$\tau_{zz} = f_5(r, z) = f_6(r) \cdot f_7(z) \quad (8)$$

で表わせる。(3)式に代入して (9) 式

$$\frac{df_3(r)}{dr} \cdot f_4(z) + \frac{df_7(z)}{dz} \cdot f_6(r) + \frac{f_3(r)}{r} \cdot f_4(z) = 0 \quad (9)$$

を得る。 $f_4(z) \cdot f_6(r) \neq 0$ であることは (7) 式、(8) 式より明らかであるから、両辺を $f_4(z) \cdot f_6(r)$ で除し、整理して α^2 とおくと (10) 式

$$\frac{df_3(r)}{dr} \cdot \frac{1}{f_6(r)} + \frac{f_3(r)}{r} \cdot \frac{1}{f_6(r)} = -\frac{df_7(z)}{dz} \cdot \frac{1}{f_4(z)} = \alpha^2 \quad (10)$$

になる。したがって (11) 式

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_3(r)}{dr} + \frac{f_3(r)}{r} &= \alpha^2 \cdot f_6(r) \\ \frac{df_7(z)}{dz} &= -\alpha^2 \cdot f_4(z) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を得る。(11) 式の第一式の微分方程式を解いて (12) 式

$$f_3(r) = \frac{1}{r} \left\{ \int \alpha^2 f_6(r) \cdot r dr + C_1 \right\} \quad (12)$$

を得る。

さて、ここで (8) 式において $f_6(r)$ は (13) 式

$$f_6(r) = C_2 r + C_3 \quad (13)$$

のごとく r の一次式で近似できるものと仮定する。

また (8) 式において $f_7(z)$ は (14) 式

$$f_7(z) = C_4 e^{-kz} \quad (14)$$

のごとき z の指数関数で近似できるものと仮定する。(13) 式および (14) 式を (8) 式に代入して (15) 式

$$\tau_{zz} = (C_2 r + C_3) \cdot C_4 e^{-kz} \quad (15)$$

を得る。

すなわち τ_{zz} に関し r 方向には一次式近似, z 方向には指数関数近似を仮定したことになる。

(13) 式を (12) 式に代入して (16) 式

$$f_3(r) = \frac{\alpha^2 C_2}{3} r^2 + \frac{\alpha^2 C_3}{2} \cdot r + \frac{\alpha^2 C_1}{r} \quad (16)$$

を得る。

さて (7) 式を (3) 式に代入した時 $\partial\tau_{zz}/\partial z$ が $r=0$ で有限値をもつためには (16) 式において $C_1=0$ でなければならぬことがわかる。

したがって (16) 式は (17) 式

$$f_3(r) = \frac{\alpha^2 C_2}{3} r^2 + \frac{\alpha^2 C_3}{2} r \quad (17)$$

になる。ここで、津和ら⁹⁾ が指摘するように (17) 式において r^3 以上の項は無視できることが実験的に実証されていることを考慮すれば (13) 式の仮定は無理がないと考えられる。

(14) 式を (11) 式の第二式に代入して (18) 式

$$f_4(z) = \frac{kC_4}{\alpha^2} \cdot e^{-kz} \quad (18)$$

を得る。

したがって (7) 式に (17) 式, (18) 式を代入して (19) 式

$$\tau_{rz} = \left(\frac{C_2 C_4}{3} r^2 + \frac{C_3 \cdot C_4}{2} r \right) \cdot k \cdot e^{-kz} \quad (19)$$

を得る。(15) 式, (19) 式において C_2, C_3, C_4 は定数であるから (20) 式

$$\left. \begin{aligned} C_2 \cdot C_4 &= 3C_5 \\ C_3 \cdot C_4 &= 2C_6 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

とおけば, (15) 式は (21) 式に, (19) 式は (22) 式

$$\tau_{zz} = (3C_5 r + 2C_6) \cdot e^{-kz} \quad (21)$$

$$\tau_{rz} = (C_5 r^2 + C_6) \cdot k \cdot e^{-kz} \quad (22)$$

になる。

ここで境界条件として $r=R$ における剪断応力 $\tau_{rz}(r=R)$ はダイス壁面の摩擦応力に等しいと考えられる。すなわち $0 \leq z \leq S$ においては (23) 式

$$\tau_{rz}(r=R) = \mu \cdot \tau_{rr}(r=R) = \mu K \cdot \tau_{zz}(r=R) \quad (23)$$

で表わせるとする。

ここに μ は壁摩擦係数, K は Rankine 係数である。

また $z=0$, および $z=S$ においては (24) 式, および (25) 式

$$\frac{\int_0^R 2\pi r \cdot \tau_{zz}(z=0) \cdot dr}{\pi R^2} = -P_U \quad (24)$$

$$\frac{\int_0^R 2\pi r \cdot \tau_{zz}(z=S) \cdot dr}{\pi R^2} = -P_U \quad (25)$$

が成立する。

以上のことから応力分布を表わす式, すなわち (21) 式を求める。

i) $0 \leq z \leq S$ においては (21) 式, (22) 式および (23) 式より (26) 式

$$k = \frac{\mu K (3C_5 R + 2C_6)}{C_5 R^2 + C_6 R} \quad (26)$$

を得る。

ii) $z=0$ においては (24) 式に (21) 式を代入して (27) 式

$$-(3C_5 R + 2C_6) = P_U \quad (27)$$

を得る。

iii) $z=S$ においては (25) 式に (21) 式を代入して (28) 式

$$-e^{-kS}(3C_5R+2C_6)=P_L \quad (28)$$

を得る.

(27) 式を (28) 式に代入して (26) を考慮すれば, (29) 式

$$\frac{P_L}{P_U}=e^{-kS}=e^{-\frac{\mu K(3C_5R+2C_6)}{C_5R^2+C_6R} \cdot S} \quad (29)$$

を得る. ここに $C_5=0$ とすると (29) 式は (30) 式

$$\frac{P_L}{P_U}(C_5=0)=e^{-\frac{2\mu KS}{R}}=e^{-\frac{4\mu KS}{D}} \quad (30)$$

となり従来より良く知られている圧縮方向の一次元圧力伝達率を表わす式と一致する.

また (21) 式および (22) 式に (26) 式を代入して (31) 式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zz} &= (3C_5r+2C_6)e^{-\frac{\mu K(3C_5R+2C_6)}{C_5R^2+C_6R} \cdot Z} \\ \tau_{rz} &= (C_5r^2+C_6r) \cdot \frac{\mu K(3C_5R+2C_6)}{C_5R^2+C_6R} e^{-\frac{\mu K(3C_5R+2C_6)}{C_5R^2+C_6R} \cdot Z} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

を得る. ここに $C_5=0$ とすると (27) 式を考慮すれば (31) 式は (32) 式

$$\left. \begin{aligned} -\tau_{zz}(C_5=0) &= P_z = P_U \cdot e^{-\frac{4\mu K}{D} \cdot Z} \\ \tau_{rz} \left(\frac{C_5=0}{r=0} \right) &= \mu K \tau_{zz}(r=R) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となり, 従来より良く知られている一次元圧力分布を表わす Janssen の式と一致する.

Janssen の式は近似的には実験的にほぼ一致することが知られているから (14) 式, (23) 式の仮定もさほど無理がないと考える.

今 (27) 式, (31) 式の第一式, 圧縮状態方程式 (5) 式, および 連続の式 (4) 式, (29) 式を用いて実験的に C_5 , C_6 および μ と K の積値を定めれば, 応力分布を求める式 (31) 式を定めることができる.

また圧縮状態方程式 (5) 式に代入すれば密度分布が求められる

しかし実際の圧縮層内の応力分布は (31) 式のような簡単な式で完全に表わすことができないことは津和ら⁹⁾ の鉄粉を用いた実験結果や谷ら⁵⁾ の石粉についての実験および Train ら⁷⁾ の実験結果を考慮すれば明らかである.

したがって (31) 式を用いて圧縮粉粒体層の応力分布を推定するには近似的なパターンを (31) 式より求め, 実際の応力分布に対する修正を類似の実験結果より経験的に行なうことにより, かなりの精度で圧縮粉粒体層の応力分布を推定できるものとする.

また応力分布がわかれば, 圧縮状態方程式 (5) 式より密度分布は容易に求められる.

3. 粉粒体の圧縮状態方程式として Balshin の圧縮実験式が適合する場合

2 項で示した解法の例として Balshin の圧縮実験式が圧縮状態方程式になる場合について示す.

Balshin の圧縮式は (33) 式

$$\ln p = -L \cdot V_r + C \quad (33)$$

p : applied pressure

V : specific volume

L, C : constants

で示され, これを空隙率の関数に変形すると (34) 式

$$\ln p = a_2 - \frac{a_1}{1-\epsilon} \quad (34)$$

になる.

$p = -\tau_{zz}$ なることを考慮し, (31) 式を代入して変形すれば (35) 式

7) D. Train: Trans. Instn. Chem. Engrs. 35, 258 (1957).

$$1-\varepsilon = \frac{a_1}{\frac{\mu K(3C_5R+2C_6)}{C_5R^2+C_6R} z - \ln(-3C_5r-2C_6)} \quad (35)$$

を得る。(4) 式に (35) 式を代入して (36) 式

$$(1-\varepsilon_0)S_0 = \int_0^R \int_0^S \frac{a_1}{\frac{\mu K(3C_5R+2C_6)}{C_5R^2+C_6R} z + a_2 - \ln(-3C_5r-2C_6)} \cdot dr dz \quad (36)$$

を得る。また (27) 式より (37) 式

$$C_6 = -\frac{P_0}{2} - \frac{3}{2}C_5R \quad (37)$$

を得る。

(36) 式および (37) 式より、 C_5 、 C_6 を求め、実験的に μ と K の積値を求める。求めた C_5 、 C_6 、 μ と K の積値を (31) 式に代入すれば求める二次元応力分布を求める式が得られる。

また (34) 式の Balshin の圧縮式で表わされる圧縮状態方程式により圧力分布は密度分布に変換が可能である。

総 括

粉粒体圧縮層内の三次元応力分布および密度分布に関する理論は一般的には解くことがきわめて困難であるが、円形平型杵によるひねりなしの片側圧縮の場合には円筒座標系において θ 方向は一定と考え二次元問題として扱うことができる。二次元の場合でも一般解法は難かしいが、実験事実および若干の仮定を導入すると近似的には解くことができる。本報においては、その一例として粉粒体の圧縮状態方程式ごとに応力分布および密度分布を求める解法を示した。すなわち円形平型杵によるひねりなしの片側圧縮においては圧縮層内における粉粒体は半径方向および円周方向には動かないか、動いても無視できる程度であるという実験事実を考慮して圧縮方向のみの変形と近似すると共に、 τ_{zz} に関して r 方向には一次式近似、 z 方向には指数関数近似を仮定し、初期条件および境界条件を考慮すると近似的には解くことができる。また導入した仮定については既往の研究の実験結果をもとにその妥当性の吟味を行なった。

謝辞 終りに終始御懇篤なる御指導、御鞭撻を頂きました中外製薬、佐野肇研究所長、ならびに今井祐次前開発研究部長に厚く御礼申し上げます。