解 説

津波発生理論

発生域での変位・流速・圧力変化

防災科学技術研究所* 齊藤 竜彦

A Tsunami Generation Theory: Surface Height, Velocity, and Pressure

Tatsuhiko SAITO

National Research Institute for Earth Science and Disaster Prevention,
3-1 Tennodai, Tsukuba, Ibaraki, 305-0006, Japan

(Received October 5, 2015; Accepted November 14, 2015; published online on December 14, 2015)

§1. はじめに

巨大地震が海域で発生すると、津波が発生、海洋を伝播し、沿岸へ浸水、そして、大きな被害をもたらす。津波とは、地震によって持ち上げられた海水の塊が、重力によって崩れ、周囲へと広がっていく現象である。その伝播過程は、水波の理論として、一般的な流体力学の教科書で解説されることも多い [例えば、神部・石井 (1995)]。津波現象を深く理解し減災に役立てるためには、伝播過程のみならず、津波の発生過程を含めて理解する必要がある。しかし、津波の発生過程の研究事例は多くはなく、その理解は必ずしも十分とはいえないのではないだろうか。

例えば、津波伝播シミュレーションでは、地震断層運動による海底変位から初期海面変位分布を設定する [例えば、首藤・他 (2007), Satake (2015)]。このとき海面変位分布だけでなく海中の水平方向の流速もまた初期値として設定する必要がある。多くの研究では、暗黙の内に、初期流速分布は空間一様にゼロと設定する。しかし、断層運動によって海中に水平方向の流速は生じないのだろうか？初期流速分布は空間一様にゼロと設定して良いのであろうか？ある典型的な地震津波を想定した場合、3次元津波発生伝播シミュレーションと初期流速分布をゼロに設定した2次元伝播シミュレーションの結果

は、ほぼ同じになる [Saito and Furumura (2009a)]。ただし、これは数値的な比較であるため、初期流速分布を空間一様ゼロと設定することが厳密な手続きなのか、それとも、初期流速分布をゼロと設定したとしても、比較した条件下では深刻な影響が現れていないということなのか、この両者を区別することは出来ない。理論根拠を与えるには、数値解の比較のみならず、解析解が必要である。

津波発生の数値モデルでは、海水を非圧縮の流体とみなし、海面を重力下で変形する自由表面とし、津波発生の駆動源として海底変位を与える [例えば、Takahashi (1942)]。Takahashi (1942) は、海面変位の時空間変化について、波数積分で表した解析解を導出している。Kajiura (1963) は、この波数積分を実行し、海底変位が起こった瞬間の海面変位分布に関する解析解を導出している。その解は Kajiura 式と呼ばれ、津波シミュレーションの初期海面変位分布を設定する際に利用されている [例えば、Tanioka and Seno (2001)]。近年においては、解析解と数値シミュレーション結果との比較も行われるようになってきた [例えば、Kervella *et al.* (2007), Saito and Furumura (2009b)]。

これまでの研究では、津波発生後の海面変位の時空間変化を主に注目していた。Saito (2013) では、新たに津波発生最中における津波発生場の解を導出し、海面変位だけでなく、海中流速・圧力分布の解析解を得た。この

* 〒305-0006 茨城県つくば市天王台 3-1

解は、従来のものに比べて包括的に津波発生場を表現しており、津波シミュレーションの初期値設定方法の理論的根拠を与えることができる。また、DONET、S-net など津波発生域内での津波観測を実現する次世代津波観測を想定したときの基礎理論としても機能する。この解説記事では、Saito (2013) が取り扱っている津波発生理論を解説し、津波発生メカニズムおよび津波発生域内の流速場・圧力場の特性について説明する。

§ 2. 津波発生理論と解

2.1 問題設定

Fig. 1 に示すような 3 次元デカルト座標を用いる。 x , y 軸を水平面に、 z 軸を鉛直上向き正とする。 $z=0$ を静止している海水面の位置とし、 $z=-h_0$ に水深一定となる海底面をとる。海面上下変位を $\eta(x, y, t)$ とすれば、海面の位置は $z=\eta(x, y, t)$ となる。

媒質（海水）の粒子速度ベクトル $\mathbf{v}$ は、速度ポテンシャル ϕ を導入することで、

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \nabla \phi(x, y, z, t) \quad (1)$$

と与えられる。海水は体積変化を伴う変形を起こさない ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$)、非圧縮性流体を仮定する。このとき速度ポテンシャルはラプラス方程式、

$$\Delta \phi(x, y, z, t) = 0 \quad (2)$$

を満たす。

一方、圧縮性の流体の場合には、体積変化を伴う変形が起こり、変形に抗するような力（弾性力）が発生する。また、この弾性力を復元力として海水中を伝わる P 波（粗密波）が生まれ、これは海洋音響波とも呼ばれる。津波発生理論では、海水の圧縮性を考慮する場合もあるが [例えば、Yamamoto (1982)]、海水を非圧縮性流体と仮定し、式 (2) の条件を用いることが多い。海洋音響波

Fig. 1. Coordinates used in the formulation. (Cited from Saito 2013)

($< \sim 10$ 秒) に比べ、津波はゆっくりと変化する現象 ($> \sim 100$ 秒) であり、津波の時間スケールでは圧縮性の効果が小さくなるためである。

流体の運動方程式はオイラーの運動方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \mathbf{g} \quad (3)$$

で与えられる [例えば、神部・石井 (1995)]。 ρ_0 は海水の密度、 p は圧力、 $\mathbf{g}$ は重力による媒質の単位質量あたりに加わる外力を表す。この式は、地震波を記述する弾性波運動方程式 [例えば、Aki and Richards (2002)] において、体積や密度の変化を考えず、剪断応力をゼロと置いた式と同じである。以後、微小な変形を考え、式 (3) の左辺を $\partial \mathbf{v} / \partial t$ とし、線形理論を構築する。

圧力は、静水圧 p_0 と静水圧からの変化分、すなわち、流体運動に伴う圧力変化 p_e を用いて、 $p = p_0 + p_e$ と表すことができる。静水圧 p_0 は、

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \mathbf{g} \quad (4)$$

を満たす。運動方程式 (3) と静水圧の式 (4) から、 p_e を、

$$p_e(x, y, z, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (5)$$

と表すことが出来る。

海面 ($z=0$) における境界条件は、

$$\left. \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial t} \quad (6)$$

と

$$-\left. \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{z=0} = g_0 \eta(x, y, t) \quad (7)$$

の2つある。式 (6) は、海面における鉛直方向の速度（左辺）と海面変位の時間変化（右辺）が等しいという運動学的な条件である。式 (7) は、式 (5) から分かるように静止海水面 ($z=0$) における圧力増加（左辺）は、海面上昇による荷重（右辺）と等しいという力学的な条件を表している。

これらの条件は、津波だけでなく一般的な水波の問題とも共通している [例えば、Pedlosky (2003)]。通常の水波の問題では、海底 ($z=-h_0$) における運動学的条件として鉛直方向の流速をゼロと設定する。これに対し、津波発生問題では、津波発生源として海底変位を考え、海底における鉛直流速を境界条件として設定する。例えば、海底の上下動永久変位分布が $d(x, y)$ で与えられる場合、海底における流速の境界条件は、

$$\left. \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=-h_0} = d(x, y) \chi(t) \quad (8)$$

となる。関数 $\chi(t)$ は、時間の逆数の次元をもち、海底変位の時間変化を規定する。ただし、

Fig. 2. (a) A function of $\chi(t)$ that describes the temporal variation of the vertical velocity distribution at the sea bottom (see Eq. (8)). An example given by Eq. (9) with the parameters of $t_c=40$ s and $t_0=30$ s. (b) Time integration of the function $\chi(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) dt = 1 \quad (9)$$

を満たす。例えば、継続時間 t_c で海底変動が発生する場合、関数 $\chi(t)$ を、

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4}{t_c} \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{(t_c/4)^2}\right] \quad (10)$$

などと設定することができる (Fig. 2a). 関数 $\chi(t)$ の時間に対する積分値 $\int_{-\infty}^t \chi(t') dt'$ は、海底変位の時間変化部分を表す (Fig. 2b). 一方、 $\chi(t) = \delta(t)$ とすれば、時刻 $t=0$ に一瞬で海底変位が起こる。

境界条件 (6), (7), (8) のもと、ラプラス方程式 (2) を解き、速度ポテンシャル ϕ を求めることが津波発生伝播の物理数学問題である。速度ポテンシャルが求まれば、式 (1) によって速度場を、式 (7) によって海面変位を、そして、式 (5) で圧力場を表すことが出来る。

2.2 津波発生伝播の解

境界条件 (6), (7), (8) とラプラス方程式 (2) をみたす速度ポテンシャルの解を、周波数-波数領域で求めること

は簡単である。時間-空間領域の解は、フーリエ逆変換を用いることで、

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i\omega t] \hat{\chi}(\omega) \frac{1}{(2\pi)^2} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \\ & \times \frac{1}{k} \frac{\omega^2 \sinh(kz) + g_0 k \cosh(kz)}{\omega^2 \cosh(kh_0) - g_0 k \sinh(kh_0)} \bar{d}(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (11)$$

と表すことが出来る (Appendix A). ここで、 $k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ は、水平方向の波数を表す。また、 $\hat{\chi}(\omega)$ は $\chi(t)$ の周波数領域へのフーリエ変換を、 $\bar{d}(k_x, k_y)$ は $d(x, y)$ の2次元波数領域へのフーリエ変換を表す。

式 (11) は形式的な解の表現であり、角周波数 ω や波数 k_x, k_y に関する積分の形で表されている。この表現は Takahashi (1942) で得られている。また、Kervella *et al.* (2007) や Levin and Nosov (2009) ではラプラス変換を用いているが、本質的には Takahashi (1942) と同じ解を得ている。式 (11) は積分を実行していないために、数式表現から物理的な意味を読み取ることが難しい。式 (11) の積分（逆変換）を実行し、時間領域の解を導出できれば、物理的な意味を読み取ることが可能となる。これまでは水面 ($z=0$) において、留数定理による複素積分を利用して、解が求められていた。しかし、海水中（任意の深さ z ）では、単純には留数定理を適用できなくなるため (Appendix B), 式 (11) の角周波数に関する積分が実行されていなかった。

Saito (2013) では、式 (11) の角周波数 ω に関しての積分を実行した解を導出した。式 (11) において、留数定理が使用できるような特殊な時間関数 $\chi(t)$ を設定し、留数定理による積分後、時間領域で時間関数をデルタ関数に変形していく。この方法によって、時間関数がデルタ関数 $\chi(t) = \delta(t)$ で与えられる場合、つまり、時刻 $t=0$ に一瞬で海底変位 $d(x, y)$ が発生する場合のポテンシャル ϕ を、

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \\ & \exp[i(k_x x + k_y y)] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{\cosh(kh_0)} \\ & \times \left\{ -\frac{g_0}{\omega} (\cosh kz + \tanh(kh_0) \sinh(kz)) \right. \\ & \left. \sin \omega_0 t \cdot H(t) + \frac{1}{k} \sinh kz \cdot \delta(t) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

と導出できる (Appendix C). ただし、

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

である。式 (12) における角周波数 ω_0 は、水平方向の波

数 k を使って,

$$\omega_0 = \sqrt{g_0 k \tanh k h_0} \quad (14)$$

と表される. これは水波の分散関係を表す [例えば, 神部・石井 (1995)]. また, 任意の関数 $\chi(t)$ に対するポテンシャル ϕ は, 式 (12) と $\chi(t)$ を畳み込むことで得られる.

時刻 $t=0$ に一瞬で海底変位 $d(x, y)$ が発生する場合, 式 (7) より海面波高 $\eta(x, y, t)$ は,

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{\cosh(k h_0)} \cos \omega_0 t \cdot H(t) \quad (15)$$

となる. 式 (11) では意味を読み取ることが難しかったが, 式 (15) をみると, 波数 (k_x, k_y) , 角振動数 ω_0 (式 (14)) で表される水平方向へ伝播する波を使って, 海面変位 η が表されていることがわかる. 言い換えれば, 海面変位は位相速度,

$$c = \frac{\omega_0}{k} = \sqrt{g_0 h_0} \sqrt{\frac{1}{k h_0} \tanh k h_0} \quad (16)$$

で表される分散性をもった波の重ね合わせで表されている.

また, 式 (1) より海中の水平方向の流速,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_H(x, y, z, t) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \\ & \exp[i(k_x x + k_y y)] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{\cosh(k h_0)} \\ & \times \left\{ -\frac{i g_0 \mathbf{k}_H}{\omega_0} f_H(k, z, h_0) \sin \omega_0 t \cdot H(t) \right. \\ & \left. + \frac{i \mathbf{k}_H}{k} \sinh k z \cdot \delta(t) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

と鉛直方向の流速,

$$\begin{aligned} v_z(x, y, z, t) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \\ & \exp[i(k_x x + k_y y)] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{\cosh(k h_0)} \\ & \times \{ -\omega_0 f_z(k, z, h_0) \sin \omega_0 t \cdot H(t) + \cosh k z \cdot \delta(t) \} \end{aligned} \quad (18)$$

を得る. ただし, 関数 $f_H(k, z, h_0)$, $f_z(k, z, h_0)$ は,

$$f_H(k, z, h_0) = \cosh k z + \tanh k h_0 \sinh k z, \quad (19)$$

$$f_z(k, z, h_0) = \frac{\sinh k z}{\tanh k h_0} + \cosh k z. \quad (20)$$

であり, 流速の深さ分布を規定する. この関数形状は注目する波の波数 k や水深 h_0 に依存する [Fig. 6, Saito (2013)].

また, 式 (5) より海底圧力,

$$\begin{aligned} p_e(x, y, t) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \\ & \times \left\{ \frac{\rho_0 g_0 \bar{d}(k_x, k_y)}{\cosh k h_0} \frac{\cos \omega_0 t}{\cosh k h_0} \cdot H(t) \right. \\ & \left. + \rho_0 h_0 \frac{\tanh k h_0}{k h_0} \bar{d}(k_x, k_y) \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

を得る.

海面変位 [式 (15)] が, 水平方向に伝播する波を表す第一項のみで表されているのに対して, 海中流速 [式 (17), (18)] と海底圧力 [式 (21)] は, 波を表す第一項だけでなく, 第二項をもつ. この第二項は, デルタ関数やデルタ関数の時間微分を含み, これまでの研究 [Kervella *et al.* (2007) など] では $t > 0$ を想定し, 無視されていた. しかしながら, 次節で説明するように, 津波発生場においてはこの第二項が重要となる.

§ 3. 津波発生場とシミュレーションの初期条件

3.1 津波発生・伝播の可視化

まず, 津波発生を概観するために, 解析解 (15)–(18) を離散波数積分して津波発生場を可視化する. 例として, およそ 30 秒の時間をかけて幅 60 km の範囲で最大 1 m の上下変位が起こる地殻変動による津波発生場の様子を Fig. 3 に示す. 海底が隆起している間 (Fig. 3 a–c) は, 海底からの鉛直上方へ向かう流速によって海面が徐々に上昇していく. 海底変動が終了した後 (Fig. 3d) は, 鉛直上向きの流れが無くなり, 海水を支えることが出来ず, 持ち上げられた海水は落下し始める. 落下した海水は, もともとあった海水を横方向へ押しのけるため, 水平の流速が生まれ, 津波 (海面変位) が水平方向へ伝播する (Fig. 3d, e). 可視化によって, 重力が津波を伝播させる力, すなわち, 波の復元力として機能していることが感覚的にも理解できるであろう.

3.2 数式の解釈

次に, 解析解 (15)–(21) に注目することで, 津波発生を数式から考える. 海底変形の時間変化が関数 $\chi(t)$ で表される場合, 海中流速の z 成分は,

$$\begin{aligned} v_z(x, y, z, t) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \\ & \exp[i(k_x x + k_y y)] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{\cosh(k h_0)} \\ & \times \{ -\omega_0 f_z(k, z, h_0) \int_{-\infty}^t \sin[\omega_0(t - \tau)] \chi(\tau) d\tau \\ & + \cosh k z \cdot \chi(t) \} \end{aligned} \quad (22)$$

となる. 同様に, 水平成分も得られる.

海底圧力の解は, 部分積分を利用することで,

Fig. 3. Surface height and velocity distribution for various elapsed times. The permanent sea-bottom deformation is given by $d(x) = \exp[-x^2/a^2]$ where $a = 30$ km. The source duration is $t_c = 31$ s. The water height at the surface is shown in the upper panel, and the velocity distribution from the sea bottom to the sea surface is shown in the lower panel, for each elapsed time t from the start of sea-bottom deformation, (a) $t = 1$ s, (b) 10 s, (c) 30 s, (d) 90 s, (e) 400 s, and (f) 600 s. The vectors indicate the direction of the flow velocity in the fluid in the lower panel. (Cited from Saito 2013)

(a) Tsunami generation & propagation

(b) Tsunami propagation

Fig. 4. (a) Tsunami generation due to sea bottom deformation and its propagation. (b) Tsunami propagation from an initial tsunami height distribution. (Cited from Saito 2013)

$$p_e(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \times \left\{ \frac{\rho_0 g_0 \bar{d}(k_x, k_y)}{(\cosh k h_0)^2} \int_{-\infty}^t \cos[\omega_0(t-\tau)] \chi(\tau) d\tau + \rho_0 h_0 \frac{\tanh k h_0}{k h_0} \bar{d}(k_x, k_y) \frac{d\chi(t)}{dt} \right\} \quad (23)$$

となる。

例えば、海底変動が $t=0$ で始まり $t=t_c$ で終了する場合、 $t > t_c$ で $\chi(t)$ はゼロとなり、(22) の第一項は値をもつが、第二項はゼロとなる。式 (18) でデルタ関数を使って表されている第二項は、海底変位が起こっている最中 ($t < t_c$) にのみ寄与する。式 (23) の $d\chi/dt$ を含む第二項もまた同様に、海底変位が起こっている最中 ($t < t_c$) にのみ寄与する。津波発生最中においては、式 (17)–(21) においてデルタ関数やデルタ関数の時間微分で表されている項を考える必要がある。これらの項を無視すると、津波の発生場を表現できなくなる。第4節で、津波発生最中の海底水圧記録の利用を考えた場合、定量的に重要な影響があることを示す。

本研究では、津波の発生源として海底変動を境界条件として与えている (Fig. 4a)。一方、津波の発生源として海面変位分布を初期条件として与えることも出来る (Fig. 4b)。海面変位分布を初期条件とした場合、解の導出は容易である。例えば、海中速度の z 成分は、

$$v_{z0}(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \bar{\eta}_0(k_x, k_y) \times \{-\omega_0 f_z(k, z, h_0) \sin \omega_0 t \cdot H(t)\} \quad (24)$$

となる。これは、初期波高分布 $\eta_0(x, y)$ によって生み出

される流速を表しており、海底変動からの津波発生の場合 [式 (18)] には含まれていたデルタ関数の項をもたない。式 (24) と式 (18) の比較から、式 (18) における関数 $H(t)$ を含む項は、海底変位が海面変位を生み出し、その海面変位が海中に生み出した流速であることがわかる。

さらに、式 (24) において、初期波高分布 $\eta_0(x, y)$ を、

$$\eta_0(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{\cosh k h_0} \quad (25)$$

と設定すれば、海底変動が発生する時空間の外の領域 (例えば、 $t > t_c$) では、式 (24) が表す津波波動場は、海底変動が引き起こす津波波動場 [式 (18)] と等価となる。つまり、2次元 (x, y) 数値シミュレーションを行う場合、初期海面変位分布を式 (25) によって、そして、初期流速分布は空間一様にゼロと設定することで、津波発生場以外の時空間領域では、等価な津波伝播シミュレーションを実行することができる。式 (25) は、Kajiura 式に他ならない [Kajiura (1963)]。この式は、海底の永久変位分布 $d(x, y)$ そのものが初期海面変位分布となるのではなく、水深 h_0 によって規定される空間ローパスフィルタ $1/\cosh k h_0$ によって、海底変位分布から短波長成分が取り除かれた変位分布が初期海面変位分布となることを意味している。

初期海面変位分布 (25) を与えることで、津波発生場の外の津波波動場を忠実に再現することはできる。しかし、津波発生場における波動場は2次元津波シミュレーションでは再現出来ない。津波発生場を記述するためにはデルタ関数およびデルタ関数の時間微分を含む項が必要となる。また、解析解は海底が平らな場合のみである。海底地形の変化がある場合には、水平変位が海底変形と組み合わせり、初期海面変位を作り出すことが知ら

れている [Tanioka and Satake (1996)]. 一方、海水の剛性率は非常に小さく海底付近の水平流速が海水層全体に及ぶ水平流速を形成することが困難なため、海底付近の水平流速が津波波源の形成へ寄与する効果は小さいと考えられる。海底の水平方向の変位や流速が津波発生に及ぼす影響を理論的・定量的に調べることは興味深い研究課題である。

§ 4. 海底水圧計による津波即時予測の注意点

現在、東日本太平洋沖に稠密かつ広域の地震津波観測網 (S-net) が建設されている。S-net は、海底水圧計を利用して津波発生域内の観測を実現することで、より迅速に、より正確に津波の規模を把握する目的がある。これまでの津波研究では、静水圧関係式、

$$p_e(x, y, t) = \rho_0 g_0 \eta(x, y, t) \quad (26)$$

を利用することで、海底の圧力変化 $p_e(x, y, t)$ から、津波波高 η を計測してきた [例えば, Tsushima and Ohta (2014)]. しかし、式 (21) は、この静水圧関係が成り立つのは波源域から離れた点のみであることを示している。式 (21) は、

$$\begin{aligned} p_e(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \\ &\times \left\{ \frac{\rho_0 g_0}{\cosh kh_0} \bar{\eta}(k_x, k_y, t) + \rho_0 h_0 \frac{\tanh kh_0}{kh_0} \bar{a}_{\text{bot}}(k_x, k_y, t) \right\} \\ &\approx \rho_0 g_0 \eta(x, y, t) + \rho_0 h_0 a_{\text{bot}}(x, y, t) \quad \text{when } kh_0 > 1 \end{aligned} \quad (27)$$

と表すこともできる。ただし、 $\bar{\eta}(k_x, k_y, t)$ は海面変位の 2 次元空間フーリエ変換を表し、 $a_{\text{bot}}(x, y, t)$ と $\bar{a}_{\text{bot}}(k_x, k_y, t)$ は、海底加速度鉛直成分とその 2 次元空間フーリエ変換を表す。式 (27) は、津波が静水圧関係に従って海底へ荷重を与える効果（第一項）だけでなく、海底の加速度に関連して動的に発生する圧力増加効果（第二項）によっても水圧変化が生じることを示している。静水圧関係を表す第一項は、重力加速度 g_0 を含み、重力が起源となる。一方、第二項には重力加速度は含まれず、海底単位面積当たりの海柱（海底から海面までの海水層全体）の質量 $\rho_0 h_0$ および加速度 $a_{\text{bot}}(x, y, t)$ を含む。これは、海底が海柱を加速度的に持ち上げるときに、反作用として海底に加わる力に対応し、海柱運動の慣性に起源をもつ。このような海底加速度に比例する海底圧力変化があることは、震源域から離れた地点での地震波形記録・津波波形記録から確認されている [例えば, Filloux (1982), Matsumoto *et al.* (2012)].

例として、海底が $t_c = 40$ s の時間をかけて上昇する場合 [Fig. 2a] の海底圧力変化を考える。実際には、海底上

Fig. 5. Sea-bottom pressure changes inside the source region when the time function $\chi(t)$ is given by Fig. 2a. The observation point is located at $x=0$ for the permanent sea bottom displacement given by $d(x) = \exp[-x^2/a^2]$ with $a=40$ km in the sea depth of $h_0=4$ km. (a) Sea bottom pressure change due to a static contribution from tsunami height. This contribution is given by the first term in the right hand side of Eq. (27) (b) Sea bottom pressure change due to a dynamic contribution from the sea bottom movement. This contribution is given by the second term in the right hand side of Eq. (27). (c) Total sea bottom pressure change due to the static and dynamic contributions.

昇による水深変化によって静的な減圧効果 [Tsushima *et al.* (2012)] が海底水圧記録に含まれるが、説明を単純にするためここではこの効果を除外して考える。最終海底変位を $d(x) = \exp[-x^2/a^2]$ ($a=40$ km と設定)、水深を $h_0=4$ km とし、 $x=0$ km における海底水圧変化の様子を示す。Fig. 5a に、津波波高が海底へおよぼす荷重による圧力変化、すなわち、式 (27) の第一項の時間変化を示す。経過時間 50 s 程度までは、海面が上昇するに伴って海底への荷重が加わる。最大で $1 \text{ mH}_2\text{O}$ ($x \text{ mH}_2\text{O}$ とは、波高 $x \text{ m}$ の水位による圧力変化の値) の圧力が加わっている。その後、持ち上げられた海水は津波として周囲に伝播していくため、 $x=0$ km における海面波高はゆっくりと減少し、海底への荷重も減少していく。Fig. 5b に、海底運動による動的な荷重効果、すなわち、式 (27) の第二項の時間変化を示す。海底上昇速度 $\chi(t)$ が Fig. 2a で与えられているため、経過時間 30 秒程度までは海底へ圧力が加えられ、最大 $2 \text{ mH}_2\text{O}$ の圧力が加わる。この値は、実際の海面波高 (1 m) の 2 倍に達する。その後は、海底運動は減速 (負の加速度) するため、減圧を示す。Fig. 5c には、全体の海底圧力変化、すなわち、式 (27) の時間変化を示す。第一項だけでなく、第二項の寄与も大きく、静水圧関係式のみでは、海底水圧変化を正確に再現することができない。S-net 観測点では、波源域に海底水圧計が設置してあるので、即時予測において静水圧関係を仮定することに十分注意する必要がある。例えば、海底運動が終了するまで (海底加速度がゼロになるまで) 待てば、静水圧関係は有効に機能するようになる。

§ 4. まとめと今後

津波発生の理論はこれまで、非圧縮流体の仮定の下、津波発生直後からの解が導出されていた。Saito (2013) では、これを発展させ、津波発生最中の海底・海中・海面を含めた波動場を記述する解を導出した。この数式表現によって津波シミュレーションにおける初期海面変位分布や初期流速分布に関する数理的根拠を与えることができる。初期海面変位分布を式 (25) で、初期流速分布は空間一様にゼロと設定することで、海底変位が生成する津波場と等価な海面変位の時空間変化を、津波発生場の領域外において再現することができる。一方、津波発生場領域内の流速場・圧力場を再現するためには、式 (17)、式 (18)、式 (21) を利用する必要がある。これまで津波発生場における動的な圧力増加効果は見落とされてきたが、鉛直方向の海水加速度が引き起こす動的な海底圧力が海底に加わることが予測される。この効果を見落として、静水圧関係式のみで、津波発生場の時空間内にある海底水圧記録を正確に再現することは出来ない。

Saito (2013) では非圧縮流体を仮定しているため、短周期の圧力場 ($< \sim 10$ s) を取り扱うには不適切である。短周期成分を取り扱うためには、海水の圧縮性を取り入れなければならない [例えば、Yamamoto (1982)]。実際の津波発生場では、短周期成分までを考慮すると、海水の圧縮性に起因する海洋音響波や地殻弾性に起因する地震波が存在し、複雑な場を形成する [例えば、Ward (1980), Comer (1984), Maeda and Furumura (2013)]。伝播過程においては、圧縮性・弾性が津波速度に及ぼすわずかな影響が、太平洋を横断する津波の精密観測から実際に確認され始めている [例えば、Inazu and Saito (2013), Watada *et al.* 2014]。津波発生場においても、より広帯域の現象理解を目指し、海水の圧縮性・地殻の弾性を取り入れた理論研究を進める必要がある。また、現在はまだ津波発生場に関しては理論研究が中心であるが、次世代の津波観測網では津波発生場内での実測が期待されている。理論と観測の両輪で津波発生現象に対する理解を深めることが、減災を実現していくために重要であろう。

謝 辞

査読者の前田拓人氏、編集担当委員の馬場俊孝氏からは、本稿を改善するためのご意見とご提案を頂きました。地震編集委員会委員長平松良浩氏は、解説記事を執筆することを薦めて下さいました。記して感謝申し上げます。

文 献

- Aki, K. and P. G. Richards, 2002, Quantitative Seismology, 2nd ed., University Science Books, Sausalito, 700 pp.
- Comer, R. P., 1984, Tsunami generation: a comparison of traditional and normal mode approaches, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **77**, 29–41.
- Filloux, J. H., 1982, Tsunami recorded on the open ocean floor, *Geophys. Res. Lett.*, **9** (1), 25–28.
- Inazu, D. and T. Saito, 2013, Simulation of distant tsunami propagation with a radial loading deformation effect, *Earth, Planets and Space*, **65** (8), 835–842.
- Kajiura, K., 1963, The leading wave of a tsunami, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **41**, 535–571.
- 神部 勉・石井 克, 1995, 流体力学, 裳華房.
- Kervella, Y., D. Dutykh, and F. Dias, 2007, Comparison between three-dimensional linear and nonlinear tsunami generation models, *Theoretical and computational fluid dynamics*, **21** (4) 245–269.
- Levin, B., and M. Nosov, 2009, Physics of tsunamis, Springer Science & Business Media.
- Maeda, T. and T. Furumura, 2013, FDM simulation of seismic waves, ocean acoustic waves, and tsunamis based on tsunami-coupled equations of motion, *Pure Appl. Geophys.*, **170** (1–2), 109–127.

- Matsumoto, H., S. Inoue, and T. Ohmachi, 2012, Dynamic response of bottom water pressure due to the 2011 Tohoku Earthquake, *Journal of Disaster Research*, **7** (7), 468–475.
- Pedlosky, J., 2003, *Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics*, Springer Science & Business Media.
- Saito, T., 2013, Dynamic tsunami generation due to sea-bottom deformation: Analytical representation based on linear potential theory, *Earth Planets Space*, **65**, 1411–1423.
- Saito, T. and T. Furumura, 2009a, Three-dimensional simulation of tsunami generation and propagation: Application to intraplate events, *J. Geophys. Res.*, **114**, B02307, doi:10.1029/2007JB005523.
- Saito, T. and T. Furumura, 2009b, Three-dimensional tsunami generation simulation due to sea-bottom deformation and its interpretation based on the linear theory, *Geophys. J. Intl.*, **178** (2), 877–888.
- Satake, K., 2015, *Tsunamis, Treatise on Geophysics (Second Edition)*, pp. 477–504.
- 首藤伸夫・今村文彦・越村俊一・佐竹健治・松富英夫 (編), 2007, *津波の事典*, 朝倉書店, pp. 350.
- Takahashi, R., 1942, On seismic sea waves caused by deformations of the sea bottom, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **20**, 357–400.
- Tanioka, Y. and K. Satake, 1996, Tsunami generation by horizontal displacement of ocean bottom, *Geophys. Res. Lett.*, **23** (8), 861–864.
- Tanioka, Y. and T. Seno, 2001, Sediment effect on tsunami generation of the 1896 Sanriku tsunami earthquake, *Geophys. Res. Lett.*, **28** (17), 3389–3392.
- Tsushima, H., R. Hino, Y. Tanioka, F. Imamura, and H. Fujimoto, 2012, Tsunami waveform inversion incorporating permanent seafloor deformation and its application to tsunami forecasting, *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, **117** (B03311).
- Tsushima, H., and Y. Ohta, 2014, Review on near-field tsunami forecasting from offshore tsunami data and onshore GNSS data for tsunami early warning, *J. Disaster Res.*, **9** (3), 339–357.
- Ward, S. N., 1980, Relationships of tsunami generation and an earthquake source, *Journal of Physics of the Earth*, **28** (5), 441–474.
- Watada, S., S. Kusumoto, and K. Satake, 2014, Traveltime delay and initial phase reversal of distant tsunamis coupled with the self-gravitating elastic Earth, *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, **119** (5), 4287–4310.
- Yamamoto T., 1982, Gravity waves and acoustic waves generated by submarine earthquakes, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **1** (2), 75–82.

Appendix A

境界条件 (6), (7), (8) とラプラス方程式 (2) をみたす速度ポテンシャル解 (11) は, 以下の手順で得ることが出来る.

ラプラス方程式,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, y, z, t) = 0, \quad (\text{A1}) \quad ((2) \text{ と同じ})$$

を,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(k_x, k_y, z, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \int_{-\infty}^{\infty} dt \\ &\exp[-i(k_x x + k_y y)] \exp[i\omega t] \phi(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

で表されるように (x, y) 座標に関して二次元フーリエ変換し, 時間 t に関してフーリエ変換すると,

$$\frac{d^2}{dz^2} \bar{\phi}(k_x, k_y, z, \omega) = k^2 \bar{\phi}(k_x, k_y, z, \omega) \quad (\text{A3})$$

を得る. ただし, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ である. 式 (A3) の一般解は,

$$\bar{\phi}(k_x, k_y, z, \omega) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz) \quad (\text{A4})$$

で与えられる. $z=0$ における境界条件 (6) と (7) より, η を消去し, ϕ に関する境界条件

$$\left(\frac{d}{dz} - \frac{\omega^2}{g_0}\right) \bar{\phi}(k_x, k_y, z, \omega) \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{A5})$$

を得る. 式 (A5) と $z=-h_0$ における境界条件 (8),

$$\frac{\partial \bar{\phi}(k_x, k_y, z, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=-h_0} = \bar{d}(k_x, k_y) \dot{\chi}(\omega) \quad (\text{A6})$$

を満たすように, 式 (A4) に現れる係数 A と B を求めると, 式 (A4) は,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(k_x, k_y, z, \omega) &= \\ &\frac{1}{k} \frac{\omega^2 \sinh(kz) + g_0 k \cosh(kz)}{\omega^2 \cosh(kh_0) - g_0 k \sinh(kh_0)} \bar{d}(k_x, k_y) \dot{\chi}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

となる. これを逆フーリエ変換の形式で表すと,

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i\omega t] \dot{\chi}(\omega) \frac{1}{(2\pi)^2} \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[i(k_x x + k_y y)] \\ &\times \frac{1}{k} \frac{\omega^2 \sinh(kz) + g_0 k \cosh(kz)}{\omega^2 \cosh(kh_0) - g_0 k \sinh(kh_0)} \bar{d}(k_x, k_y) \end{aligned} \quad (\text{A8}) \quad ((11) \text{ と同じ})$$

を得る.

Appendix B

式 (11), (A8) において, 海面 ($z=0$) の場合, 角周波数 ω の積分部分のみに注目すると,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i\omega t] \dot{\chi}(\omega) \frac{1}{\omega^2} \quad (\text{B1})$$

となる。被積分関数に ω^{-2} が現れる。留数定理を利用した積分を行うために、複素 ω 平面を考える。この場合、インパルスの海底変動 $\chi(\omega)=1$ であったとしても、複素 ω 平面上における $|\omega| \rightarrow \infty$ の半円の積分経路 C に沿った積分値はゼロへと収束する、

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d\omega \exp[-i\omega t] \dot{\chi}(\omega) \frac{1}{\omega^2} \rightarrow 0 \quad \text{for } |\omega| \rightarrow \infty. \quad (\text{B2})$$

この性質を利用することで、海面 ($z=0$) の場合、留数定理を利用して積分できる。しかし、水中を表す場合 ($z \neq 0$)、角周波数 ω の積分に関する積分は、

$$\frac{1}{2\pi} \int_C d\omega \exp[-i\omega t] \dot{\chi}(\omega) \frac{\omega^2 \sinh(kz) + g_0 k \cosh(kz)}{\omega^2 \cosh(kh_0) - g_0 k \sinh(kh_0)} \quad (\text{B3})$$

となり、半円の積分経路 C に沿った積分値は一般にゼロへと収束しなくなる。そのため、無条件に留数定理を使用することは出来ない。

Appendix C

式 (12) の導出過程を説明する。正の微少量 (artificial damping parameter) $\varepsilon_1, \varepsilon_2 (>0)$ を導入し、式 (7) を

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{z=0} + 2\varepsilon_1 \phi(\mathbf{x}, t) \Big|_{z=0} + g_0 \eta(x, y, t) = 0, \quad (\text{C1})$$

と変更し、関数 $\chi(t)$ を、

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} \exp(-\varepsilon_2 t) & \text{for } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{for } t \leq 0, t > T \end{cases}, \quad (\text{C2})$$

と設定する。このとき、式 (11) は、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[ik_x x + ik_y y] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{k \cosh kh_0} \\ &\times \frac{1}{2\pi} \frac{i}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i\omega t] \frac{1 - \exp[i(\omega + i\varepsilon_2)T]}{\omega + i\varepsilon_2} \\ &\frac{(\omega^2 + i2\varepsilon_1\omega) \sinh kz + g_0 k \cosh kz}{(\omega^2 + i2\varepsilon_1\omega) - g_0 k \tanh kh_0} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[ik_x x + ik_y y] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{k \cosh kh_0} \\ &\times \frac{1}{2\pi} \frac{i}{T} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp[-i\omega t]}{\omega + i\varepsilon_2} \right. \\ &\frac{(\omega^2 + i2\varepsilon_1\omega) \sinh kz + g_0 k \cosh kz}{(\omega^2 + i2\varepsilon_1\omega) - g_0 k \tanh kh_0} \\ &\left. - \exp[-\varepsilon_2 T] \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp[-i\omega(t-T)]}{\omega + i\varepsilon_2} \right] \end{aligned}$$

Fig. C1. Paths of integral in the complex ω -plane for Eq. (C3). The poles (crosses) are located at $\omega = -i\varepsilon_1 \pm \omega_0$ and $-i\varepsilon_2$ in the lower half plane. (Cited from Saito 2013)

$$\left. \frac{(\omega^2 + i2\varepsilon_1\omega) \sinh kz + g_0 k \cosh kz}{(\omega^2 + i2\varepsilon_1\omega) - g_0 k \tanh kh_0} \right] \quad (\text{C3})$$

となる。

微少量 (artificial damping parameter) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ が、津波の卓越角周波数に比べて十分小さいとし、 ω に関する積分を実行するために、留数定理を用いる。(C3) に現れる複素 ω 平面の極は、図 C1 に示すように $\omega = -i\varepsilon_1 \pm \omega_0$ and $-i\varepsilon_2$ に位置する。ただし、 $\omega_0 = \sqrt{g_0 k \tanh kh_0}$ である。 $t - T < 0$ の場合、図 C1 に示すように複素積分の経路を上半面の半円で表される経路 I にとると、複素積分経路内に極が含まれない。 $t - T > 0$ の場合、複素積分の経路を下半面の経路 II にとる。この場合、複素積分経路の内に 3 つの極が含まれる。式 (C3) の [] 内の第二項の積分は、留数定理を用いて、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp[-i\omega(t-T)]}{\omega + i\varepsilon_2} \\ &\frac{(\omega^2 + i2\varepsilon_1\omega) \sinh kz + g_0 k \cosh kz}{(\omega^2 + i2\varepsilon_1\omega) - g_0 k \tanh kh_0} \\ &= -2\pi i \left[\frac{-g_0 k \cosh kz}{\omega_0^2} \exp[-\varepsilon_2(t-T)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_0^2 \sinh kz + g_0 k \cosh kz}{\omega_0^2} \cos[\omega_0(t-T)] \exp[-\varepsilon_1(t-T)] \right] H(t-T) \\ &\rightarrow -2\pi i \left[\frac{-g_0 k \cosh kz}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2 \sinh kz + g_0 k \cosh kz}{\omega_0^2} \cos[\omega_0(t-T)] \right] H(t-T) \\ &\quad \text{for } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \text{ and } \varepsilon_2 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

と計算することが出来る．同様にして，式 (C3) の [] 内の第一項の積分も計算することができる．結果，式 (C3) は，

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[ik_x x + ik_y y] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{k \cosh k h_0} \\ &\times \left[\frac{g_0 k \cosh k z}{\omega_0^2} \frac{H(t) - H(t-T)}{T} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_0^2 \sinh k z + g_0 k \cosh k z}{\omega_0^2} \frac{H(t) \cos \omega_0 t - H(t-T) \cos \omega_0(t-T)}{T} \right] \quad (\text{B5}) \end{aligned}$$

と計算することが出来る．さらに，分散関係式 (14) を用いると，

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[ik_x x + ik_y y] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{k} \\ &\times \left[\frac{\cosh k z}{\sinh k h_0} \frac{H(t) - H(t-T)}{T} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\cosh k z}{\sinh k h_0} + \frac{\sinh k z}{\cosh k h_0} \right) \frac{H(t) \cos \omega_0 t - H(t-T) \cos \omega_0(t-T)}{T} \right] \quad (\text{C6}) \end{aligned}$$

を得る．ここで，新たに関数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ を

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &\equiv \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[ik_x x + ik_y y] \bar{d}(k_x, k_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{1}{k} \left\{ \frac{\cosh k z}{\sinh k h_0} - \left(\frac{\cosh k z}{\sinh k h_0} + \frac{\sinh k z}{\cosh k h_0} \right) \right. \\ &\quad \left. \cos \omega_0 t \right\} H(t) \quad (\text{C7}) \end{aligned}$$

と定義すると，式 (C6) は，

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\phi(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t-T)}{T} \quad (\text{C8})$$

となる．これは，関数 $\chi(t)$ が，式 (C2) で与えられる場合（ただし， $\varepsilon_2=0$ ）の速度ポテンシャルの解である．

さらに，式 (C2) において，変数 T をゼロに近づけると， $\chi(t) = \delta(t)$ となる．式 (C8) の変数 T をゼロに近づけることで，対応する解，

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[ik_x x + ik_y y] \bar{d}(k_x, k_y) \\ &\times \frac{1}{k} \left\{ \frac{\cosh k z}{\sinh k h_0} \delta(t) + \left(\frac{\cosh k z}{\sinh k h_0} + \frac{\sinh k z}{\cosh k h_0} \right) \right. \\ &\quad \left. \omega_0 \sin \omega_0 t \cdot H(t) - \left(\frac{\cosh k z}{\sinh k h_0} + \frac{\sinh k z}{\cosh k h_0} \right) \cos \omega_0 t \cdot \delta(t) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \exp[ik_x x + ik_y y] \frac{\bar{d}(k_x, k_y)}{\cosh k h_0} \\ &\times \left\{ \frac{-g_0}{\omega_0} (\cosh k z + \tanh k h_0 \sinh k z) \right. \\ &\quad \left. \sin \omega_0 t \cdot H(t) + \frac{1}{k} \sinh k z \cdot \delta(t) \right\} \quad (\text{C9}) \quad ((12) \text{と同じ}) \end{aligned}$$

を得る．