直結式電磁地震計の特性に関する田治米の 表 現 式 に つ い て

東北大学理学部地震観測所 鈴木 次 郎

(昭和 32 年 12 月 6 日受理)

Notes on the Tazime's Expression concerning the Dynamical Characteristics of Electromagnetic Seismograph.

Ziro SUZUKI

Seismological Observatory, Faculty of Science, Tôhoku University.

(Received Dec. 6, 1957)

A complete expression of dynamical characteristics for electromagnetic seismographs with no electric amplifier has been derived by Tazime. In this paper the same expression is deduced in another way, which is more familiar to seismologists. The method is conducive to easy understanding of physical meanings of the expression. Further, the expression is reduced to one of practical convenience. The new expression is written in terms of usual constants for galvanometer, i. e., period, coil resistance, critical damping resistance, and sensitivity.

§ 1. 直結式電磁地震計の特性を表わす式は田治米¹⁾によつて完成されている。然し田治米のこの式の導き方は電気音響理論的に機械的な量をいきなり電気的な量に変換して回路網理論として扱っているので、機械的な量の方に親しみの深い者にとつては何かなじみ難い感を与える。又地震計と電流計の間の *attenuator* の形式が変わると非常に数の多い連立方程式を解き直す面倒が生ずる。つまり田治米の言を借りれば「このような計算に不慣れであるという理由」から来る不便さがあることになる。そこで田治米の式をわれわれに分り易い形で導いて置くこともまんざら無益でもないであろう。勿論以下述べる導き方も田治米のやり方と本質的に

Fig. 1. Illustration of Electromagnetic Seismograph Having no Electric Amplifier.

は全く同じことをやっているに過ぎないのであつて、単にわれわれに親しみのある理解し易い形に書き直しているものであることは予め断つておく。

此所で直結式という言葉の説明しておこう。Fig. 1 のように地震計と電流計の間に

一つの回路網があつて、この回路網は L, R, C 等からだけで成つており、その中に発電機、真空管、整流器等の要素を含まない所謂 *passive network* である場合をわれわれは直結式と呼

んでいる。勿論この回路網は全然素通しであつてもよい。このような場合には以下のことはそのまま適用出来る。

§ 2. 先づ coupling factor は後廻しとして static magnification の表現を考える。実用上の見地から地震計も電流計も廻転軸のある場合を例にとるが、この制限は勿論便宜的なものである。なお使用する記号はすべて田治米の論文¹⁾のをそのまま借用することとして一々の説明は省略する。

地面が $X_0 = e^{j\omega t}$ で振動する時、地震計振子の angular velocity は

$$j(\omega/l_1 \sqrt{(u_1^2-1)^2 + 4h_1^2 u_1^2}) \cdot e^{j(\omega t - \delta_1)},$$

で表わされるから地震計 coil の両端に生ずる電圧は

$$j(A_1 a_1 \omega / l_1 \sqrt{(u_1^2-1)^2 + 4h_1^2 u_1^2}) \cdot e^{j(\omega t - \delta_1)},$$

あるいは田治米の P_i なる函数を使えば上式は

$$\frac{A_1 a_1 \omega}{(2h_1 u_1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{l_1} \cdot P_1^{\frac{1}{2}} \cdot e^{j\omega t},$$

ともかける。この P_i すなわち

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{(u_i^2-1)^2 + 4h_i^2 u_i^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_i^2-1}{2h_i u_i}\right)^2 + 1}} e^{j(\pi - 2\delta_i)},$$

は、地震計は変位による強制振動をし、電流計は力による強制振動をするのであるからこの両者を一つの形式で表わすために導入されたもので、その便利さは例えば田治米の論文¹⁾の Fig. 3 を使うとよく分る。

さて今地震計と電流計の間に回路網をつないだとすると地震計の coil を流れる電流 I_1 は

$$I_1 = \frac{A_1 a_1 \omega}{(2h_1 u_1)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{l_1} P_1^{\frac{1}{2}} e^{j\omega t} / (Z_1 + Z_i),$$

となる。但し Z_1 は地震計 coil の電氣的 impedance であり、普通の周波数では抵抗（すなわち実数）と考えておいてよい。必要あれば複素数と考えれば同様な議論が成立つことはいうまでもない。以下出てくるすべての impedance 量 Z についても同様である。motional impedance はこの際考慮に入れる必要はない。また Z_i は地震計と電流計の間の回路網(attenuater)の二次側に電流計をつないだ時の入力 impedance, すなわち Fig. 1 でいえば AA' 点から右を見た時の impedance である。

田治米に従い damping constant h_1 を

$$h_1 = h_{e1} + h_{o1},$$

と書けば、電磁的な damping h_{e1} は

$$h_{e1} = \frac{A_1^2 a_1^2}{2k_1(Z_1 + Z_i)} \frac{1}{n_1}, \quad \left(n_1 = \frac{T_1}{2\pi}\right),$$

であるから I_1 の第一の係数は

$$\frac{A_1 a_1 \omega_1}{(2h_1 u_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{A_1 a_1 \omega_1}{(2h_{e1} u_1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{h_{e1}}{h_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega^{\frac{1}{2}} k_1^{\frac{1}{2}} (Z_1 + Z_i)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{e1}}{h_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

故に

$$I_1 = \frac{k_1^{\frac{1}{2}} \omega^{\frac{3}{2}}}{l_1} \cdot \left(\frac{h_{e1}}{h_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(Z_1 + Z_i)^{\frac{1}{2}}} \cdot P_1^{\frac{1}{2}} \cdot e^{j\omega t}.$$

さて、この I_1 が network に流れ込む訳であるが、この中のある部分が電流計に流れ出すことになる。この入力電流に対する出力電流の比を r_1 と書くことにすれば、 r_1 は network と電流計（負荷）impedance が与えられれば簡単に求められる。 r_1 を用いて電流計の coil に流れる電流 I_2 は

$$I_2 = r_1 I_1 = \frac{r_1 k_1^{\frac{1}{2}} \omega^{\frac{3}{2}}}{l_1} \left(\frac{h_{e1}}{h_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(Z_1 + Z_i)^{\frac{1}{2}}} P_1^{\frac{1}{2}} e^{j\omega t}.$$

次にこの電流による電流計のふれまたは記録紙上の光点の動き X_2 は地震計の場合と力による強制振動である点だけが異り他は全く同様であるから、recording lever の長さを L_2 と書けば、

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{L_2}{2\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_2^2 - 1}{2h_2 u_2}\right)^2 + 1}} \cdot \frac{A_2 a_2}{\omega} \frac{1}{k_2} I_2 (j e^{-j\delta_2}), \\ &= \frac{A_2 a_2 L_2}{(2h_{e2} u_2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{k_2} P_2^{\frac{1}{2}} I_2. \end{aligned}$$

地震計と同様最初の係数を書き換えて

$$X_2 = \frac{L_2}{\omega^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{k_2^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{h_{e2}}{h_2}\right)^{\frac{1}{2}} (Z_2 + Z_0)^{\frac{1}{2}} P_2^{\frac{1}{2}} I_2,$$

但し Z_0 は回路網の入力に地震計をつないだ時の出力 impedance, すなわち Fig. 1. の BB' から左側を見た impedance である。

以上のことから coupling を考えなければ直結地震計の特性として

$$\frac{X_2}{X_0} = \frac{L_2}{l_1} \cdot \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{h_{e1} h_{e2}}{h_1 h_2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{Z_2 + Z_0}{Z_1 + Z_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r_1 \cdot (P_1 P_2)^{\frac{1}{2}},$$

が得られる。今

$$\left(\frac{Z_2 + Z_0}{Z_1 + Z_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r_1 = \sigma^{\frac{1}{2}},$$

と置けば、田治米の論文¹⁾の (16) 式と同じ形で

$$\frac{X_2}{X_0} = \frac{L_2}{l_1} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{e1} h_{e2}}{h_1 h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} (P_1 P_2)^{\frac{1}{2}},$$

となる。

試みに Fig. 2 の (a), (b) のような回路網について Z_i , Z_0 , r_1 等を求め $\sigma^{\frac{1}{2}}$ を計算すれば容易に

$$(a) \quad \sigma = \frac{1}{\left(\frac{Z_1}{Z_3} + 1 \right) \left(\frac{Z_2}{Z_3} + 1 \right)},$$

$$(b) \quad \sigma = \frac{(Z_3 Z_4)^2}{\{Z_1(Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_3(Z_4 + Z_5)\} \{Z_2(Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_4(Z_3 + Z_5)\}},$$

という田治米の (13), (14) 式が求められる。

Fig. 2. Examples of Attenuator Networks.

なお序であるから田治米は

$$\frac{L_2}{l_1} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} = Q,$$

と書いて $Q \left(\frac{h_{e1} h_{e2}}{h_1 h_2} \right)^{\frac{1}{2}}$ (田治米の論文で $1/2$ 乗が落ちている所があるが, これは misprint であろう.) を static magnification としているが, どうせのことなら

$$\frac{L_2}{l_1} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{e1} h_{e2}}{h_1 h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} = Q,$$

として静的感度を書いた方が手取り早いと思う。

§ 3. 次に coupling のことを考えよう。上述のように電流 I_2 によつて電流計がふれるところの運動のために電流計 coil の両端に二次的な電圧が生じる筈である。電流計の動きを $\theta_2 \cdot e^{j\omega t}$ とするとこの二次電圧は

$$A_2 a_2 \theta_2 e^{j\omega t},$$

であり, この二次電圧によつて電流計 coil に流れる電流 I_2' は

$$I_2' = \frac{A_2 a_2}{Z_2 + Z_0} \theta_2 \cdot e^{j\omega t},$$

である。この電流は network へ BB' から流れ込むが、この中で地震計 coil に流れる部分の比を前節と同様の記号により r_2 と書くことにすれば、地震計 coil を流れる二次電流 I_1' は

$$I_1' = r_2 I_2' = \frac{A_2 a_2 r_2}{Z_2 + Z_0} \theta_2 \cdot e^{j\omega t},$$

と書ける。この二次電流が流れると地震計はこれによつて振動する筈である。この二次振動は前節と異なる点は唯だ前節では変位による強制振動であつたものが、 $A_1 a_1 I_1'$ なる moment による強制振動となるだけであるから、二次的な振動は

$$\theta_1' = \frac{A_1 a_1 A_2 a_2 r_2 \theta_2}{2 \varepsilon_1 \omega k_1} \cdot \frac{1}{Z_2 + Z_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_1^2 - 1}{2 h_1 u_1}\right)^2 + 4 h_1^2 u_1^2}} e^{j(\omega t - \delta_1)},$$

と書ける。

更に地震計 coil が上の様な振動を行うとこのために地震計 coil の両端に電圧 $A_1 a_1 \theta_1'$ が生じこのための電流が流れることになる。この電流の一部は再び電流計 coil に流れ込み電流計 coil の振動を引起すこととなる。この辺の計算は上のことを単に添字のつけかえだけすればよいのである。従つて最初電流計が $\theta_2 e^{j\omega t}$ で震動したために再び電流計に舞い戻つて来る振動 θ_2' は

$$\begin{aligned} \theta_2' = & \frac{A_1^2 a_1^2}{2 \varepsilon_1 k_1 (Z_1 + Z_0)} \frac{A_2^2 a_2^2}{2 \varepsilon_2 k_2 (Z_2 + Z_0)} r_1 r_2 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_1^2 - 1}{2 h_1 u_1}\right)^2 + 4 h_1^2 u_1^2}} \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_2^2 - 1}{2 h_2 u_2}\right)^2 + 4 h_2^2 u_2^2}} \left\{ -\theta_2 e^{j(\omega t - \delta_1 - \varepsilon_2)} \right\}, \end{aligned}$$

と書ける。この式の最初の二項を前節の如く電磁的 damping h_{1e}, h_{2e} を用いて書き直せば

$$\begin{aligned} \theta_2' = S \theta_2 e^{j\omega t} = & - \left(\frac{h_{1e} h_{2e}}{h_1 h_2} \right) r_1 r_2 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_1^2 - 1}{2 h_1 u_1}\right)^2 + 4 h_1^2 u_1^2}} \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_2^2 - 1}{2 h_2 u_2}\right)^2 + 4 h_2^2 u_2^2}} \times e^{-j\delta_1 - j\delta_2} \cdot \theta_2 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

となる。いいかえれば Fig. 1 のような直結式の回路では S なる量だけの negative feed-back がかかることになる。上述のような process は実際には無限回繰返えられることになるから実際の電流計のふれ θ_2 は

$$\begin{aligned}\theta_2 &= (1 + S + S^2 + \dots) \theta_2 e^{j\omega t}, \\ &= \frac{1}{(1-S)} \theta_2 e^{j\omega t},\end{aligned}$$

である。従つて coupling まで考慮に入れた電磁地震計の特性は

$$\frac{X_2}{X_0} = (1-S)^{-1} \frac{L_2}{l_2} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h_{1e} h_{2e}}{h_1 h_2} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} (P_1 P_2)^{\frac{1}{2}},$$

という形をとることになるのである。

S を田治米の表現すなわち

$$S = -\sigma \left(\frac{h_{1e} h_{2e}}{h_1 h_2} \right) \left[\prod_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u_i^2 - 1}{2 h_i u_i} \right)^2 + 1}} e^{-j\delta_i} \right\} \right],$$

に直すには

$$r_1 r_2 = \sigma,$$

なる証明が出来ればよい。この証明には所謂回路網の可逆定理を用いれば簡単である。この定理は例えば Fig. 1 の AA' に電圧 E を加えた時電流計に流れる電流と BB' に同じ電圧 E を加えた時地震計に流れる電流が等しいということであるから

$$\frac{E}{Z_1^* + Z_i} r_1 = \frac{E}{Z_2 + Z_0} r_2.$$

故に

$$r_1^2 \frac{Z_2 + Z_0}{Z_1 + Z_i} = \sigma = r_1 r_2.$$

となる。 σ の定義として $\sigma = r_1 r_2$ を用いた方が便利なることもある。

§ 4. 最後に田治米の式では地震計と電流計を全く同一視しているために実用上の不便さがある。その一つは例えば k_2 なる電流計の慣性能率を用いた表現である点である。通常電流計では常数として、周期 T_2 、内部抵抗 R_i 、臨界制動抵抗 R_c 、及び直流電流感度 q_2 、を用いている。これらを用いて静的な感度を表わすには

$$4\pi(R_i + R_c)k_2 = A_2^2 a_2^2 T_2,$$

$$T_2 = 4\pi \sqrt{k_2/d_2},$$

$$q_2 = d_2/(L_2 A_2 a_2),$$

但し d_2 は戻す力である。

の三式から d_2, A_2, a_2 を消去して k_2 を求めればよい。従つて

$$\frac{X_2}{X_0} = (1-S)^{-1} \frac{k_1^{\frac{1}{2}}}{l_1} \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{T_2^{\frac{3}{2}} q_2 (R_i + R_c)} \left(\frac{h_{1e} h_{2e}}{h_1 h_2} \right) \sigma^{\frac{1}{2}} (P_1 P_2)^{\frac{1}{2}},$$

が得られる。上式は式の形は悪いが実用上からは便利であると思う。

以上述べた如く田治米の式はわれわれに分り易い方法でも容易に導くことが出来るものであるし、また上の方法で導き出してみると各項の持つ意味合いが直観的に分り易い。更に *attenuater* に抵抗だけでなく *filter* として *condenser* 等を入れた形のものでも簡単に特性を調べることができる。

この文を草する動機は本多弘吉教授のおすすめによつたものであり、また田治米鏡二氏には色々議論の相手になつて頂いた。お二方の御好意に感謝したい。

参 考 文 献

- 1) K. Tazime; Amplification factor of the electromagnetic recorder having no electric amplifier. Journ. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. VII (Geophysics), Vol. 1, No. 1, (1957), 55~67.