Rayleigh 型分散波の存在限界について

中央大学工学部 精密工学科 小林 直 太

帝国石油株式会社 物理探査課 恒 川 純 吉

(昭和 33 年 2 月 17 日受理)

Range of Existence of the Rayleigh Type Dispersive Wave

Naota KOBAYASHI

Department of Precision Mechanics, Faculty of Technology,
Chūō University, Tokyo.

and

Junkichi TSUNEKAWA

Teikoku Oil Company, Geophysical Exploration Section.

(Received Feb. 17, 1958)

It is well known that the Rayleigh wave which is propagated along the surface of the superficial layer on a semi-infinite elastic solid is composed of two dispersive wave groups, and each wave group has infinite number of branch waves. These are named M_{11} , M_{12} , M_{13} for one group and M_{21} , M_{22} , M_{23} for the other. The range of existence of these branch waves has been investigated by several authors, but these studies are mainly concerned with M_{11} and M_{21} .

In this paper the possible range of wave-length for a given phase velocity has been studied for the higher branches, M_{12} , M_{22} , M_{13} , M_2 , M_{14} , M_{24} .

When $\lambda' = \mu'$, $\lambda = \mu$ and $\rho = \rho'$, it has been found that any higher branch wave can exist, but the higher the branch is, the narrower is its range of existence.

§ 1. 半無限弾性体の表面に一層がある場合に於ける Rayleigh 型弾性波の分散については、これまで数多くの人々によつて研究されてきた。しかし分散方程式が非常に複雑な見掛けを呈しているの、これを一般的に説き明かすことは容易でない。ここではその一部分である分散波の存在限界について取扱つてみた。このように問題に制限を加えると、分散方程式の取扱いは多少容易になる。存在限界の問題も、既に多くの人々によつて研究されてきたことではあるが、ここでの目的は高次分散波の存在限界をきめることである。結果としてわかつた主なことは、 M_1 型、 M_2 型の分散波はそれぞれ高次のものまで無限に存在しえるが、その存在範囲については次のよう性質がある。即ち一つの位相速度に対して波長の存在する領域は、高次分散波になるにしたがい減少する。

§ 2. Fig. 1 のような構造を考え、表層内での変位の水平成分を u' 、鉛直成分を v' 、下層内での変位をそれぞれ

Fig. 1 Assumed Structure.

u, v とする. z 軸は下向きに正とし, それと直交して x 軸をとる. 図中にある $\lambda', \mu', \lambda, \mu$ はそれぞれの層内におけるラーメの常数で, ρ', ρ は密度である.

一般に上層, 下層内での変位は次の式であたえられる.

$$u' = \left\{ \frac{if}{h'^2} \left(C \frac{\cosh}{\cos} r'z + D \frac{\sinh}{\sin} r'z \right) - \frac{s'}{k'^2} \left(E \frac{\sin}{-\sinh} s'z - F \frac{\cos}{\cosh} s'z \right) \right\} e^{-ifx + i\pi t} \dots (1)$$

$$v' = \left\{ -\frac{r'}{h'} \left(C \frac{\sinh}{-\sin} r'z + D \frac{\cosh}{\cos} r'z \right) + \frac{if}{k'^2} \left(E \frac{\cos}{\cosh} s'z + F \frac{\sin}{\sinh} s'z \right) \right\} e^{-ifx + i\pi t} \dots (2)$$

$$u = \left\{ \frac{if}{h^2} A e^{-rz} - \frac{s}{k^2} B e^{-sz} \right\} e^{-ifx + i\pi t} \dots (3)$$

$$v = \left\{ \frac{r}{h^2} A e^{-rz} + \frac{if}{k^2} B e^{-sz} \right\} e^{-ifx + i\pi t} \dots (4)$$

$$\begin{aligned} \text{但し, } r'^2 &= f^2 - h'^2, & s' &= k'^2 - f^2, & r^2 &= f^2 - h^2, & s^2 &= f^2 - k^2, \\ &= k'^2 - f^2, & &= f^2 - k'^2 \end{aligned}$$

$$h'^2 = \rho' P^2 / (\lambda' + 2\mu') = P^2 / V_p'^2, \quad k'^2 = \rho' P^2 / \mu' = P^2 / V_s'^2$$

$$h^2 = \rho P^2 / (\lambda + 2\mu) = P^2 / V_p^2, \quad k^2 = \rho P^2 / \mu = P^2 / V_s^2$$

又 V_p', V_s' は表層内, V_p, V_s は下層内でのそれぞれ P, S 波の速度である.

(1), (2) 式中では超越函数の部分が一重になつてゐる. これは分散波の位相速度によつて適当なものを使用しなくてはならないので, このように表わしたわけである. これについては後に述べる.

さて (1)~(4) までの基礎式と, 境界条件 $z = -H$ で歪力 = 0, $z = 0$ で歪力, 変位共に連続, とから常数 A, B, C, D, E, F , について 6 個の方程式がえられる. 今両層内で, $\lambda' = \mu', \lambda = \mu$, 且両層の密度が等しいと仮定すると, 分散方程式は

$$\begin{vmatrix} -(2\xi^2 - 1)Y_2 & 2\xi\bar{s}'Y_1 & 0 & -2\xi\bar{s}' & 0 & -2\xi\bar{s}' \\ (2\xi^2 - 1)Y_1 & \pm 2\xi\bar{s}'Y_2 & -(2\xi^2 - 1) & 0 & -2\xi^2 & 0 \\ & (\text{for } 1 \geq \xi^2) & & & & \\ 6\xi\bar{r}'X_1 & -3(2\xi^2 - 1)X_2 & -6\xi\bar{r}' & 0 & -6\xi\bar{r}' & 0 \\ \mp 6\xi\bar{r}'X_2 & 3(2\xi^2 - 1)X_1 & 0 & -3(2\xi^2 - 1) & 0 & -6\xi^2 \\ (\text{for } \xi^2 \geq 1/3) & & & & & \\ 0 & 0 & \eta(2\xi^2\eta - 1) & -2\eta^2\xi\bar{s} & 2\xi^2\eta & -2\eta\xi\bar{s} \\ 0 & 0 & -6\xi\bar{r}\eta^2 & -\eta(1 - 6\eta\bar{r}^2) & -6\xi\bar{r}\eta & 6\xi^2\eta \end{vmatrix} = 0 \dots (5)$$

になる. 但し $\xi = f/k' = V_s'/V$, $\bar{r} = r/k'$, $\bar{s} = s/k'$, $\bar{r}' = r'/k'$, $\bar{s}' = s'/k'$, $\eta = \mu/\mu'$, また

$$X_1 = \frac{\cosh}{\cos}(\bar{r}'H), \quad X_2 = \frac{\sinh}{\sin}(\bar{r}'H) \quad \text{for } \xi^2 \geq \frac{1}{3} \dots (6)$$

$$Y_1 = \frac{\cos}{\cosh}(\bar{s}'H), \quad Y_2 = \frac{\sin}{\sinh}(\bar{s}'H) \quad \text{for } \xi^2 \leq 1 \dots (7)$$

$$\bar{r}'H = 2\pi \frac{H}{L} \frac{1}{\xi} \sqrt{|\xi^2 - \frac{1}{3}|}, \quad \bar{s}'H = 2\pi \frac{H}{L} \frac{1}{\xi} \sqrt{|1 - \xi^2|}, \quad L: \text{波長.}$$

X_1, X_2, Y_1, Y_2 は $\xi(\infty V^{-1})$ の範囲にしたがつて適当なものが使用される.

§ 3. さてわれわれが行おうとするのは、分散波の位相速度と波長のあいだの関係をしらべることである. 分散波の存在可能条件の両極限はつぎの2つの場合である.

a) x 方向へ減衰することなく波が伝わってゆくためには、式中の $\bar{s}$ が少なくとも0より大でなくてはいけない. この条件は既に山口, 佐藤¹⁾によつてもちいられている. すなわち存在可能の一極限として $\bar{s}=0$ である.

b) 下の媒質が剛体 ($\mu=\infty$) のときの分散曲線が他の極限をあたえる,

これらの条件にしたがつて分散方程式 (5) をかきかえると

a) $\bar{s}=0$ この条件から $\xi^2\eta=1$, $\bar{r}=\sqrt{2/3}\xi$ となり, 方程式 (5) は

$$\begin{vmatrix} -2(\xi^2-1)Y_2 & 2\xi\bar{s}'Y_1 & 0 & 2\xi\bar{s}' & 0 & -2\xi\bar{s}' \\ 2(\xi^2-1)Y_1 & \pm 2\xi\bar{s}'Y_2 & -(2\xi^2-1) & 0 & -2\xi^2 & 0 \\ & (1 \geq \xi^2) & & & & \\ 6\xi\bar{r}'X_1 & -3(2\xi^2-1)X_2 & -6\xi\bar{r}' & 0 & -6\xi\bar{r}' & 0 \\ \pm 6\xi\bar{r}'X_2 & 3(2\xi^2-1)X_1 & 0 & -3(2\xi^2-1) & 0 & -6\xi^2 \\ (\xi^2 \geq 1/3) & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{\xi^2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2\sqrt{6}}{\xi^2} & \frac{3}{\xi^2} & -2\sqrt{6} & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdots (8)$$

となる.

b) $\mu=\infty$, $u=v=0$ より $A=B=0$ となり, よつて方程式 (5) は

$$\begin{vmatrix} -(2\xi^2-1)Y_2 & 2\xi\bar{s}'Y_1 & 0 & \bar{s}' \\ (2\xi^2-1)Y_1 & \pm 2\xi\bar{s}'Y_2 & -\xi & 0 \\ & (1 \geq \xi^2) & & \\ 6\xi\bar{r}'X_1 & -3(2\xi^2-1)X_2 & 3\bar{r}' & 0 \\ \pm 6\xi\bar{r}'X_2 & 3(2\xi^2-1)X_1 & 0 & 3\xi \\ (\xi^2 \geq 1/3) & & & \end{vmatrix} = 0 \cdots (9)$$

いずれの場合にも, X, Y については (6), (7) の関係にしたがつて適当なものを採用する.

a), b) 二つの場合, ξ を既知量とし, L/H について解くと, 一つの ξ に対して無数の L/H の値を与える. このことは分散波が高次まで存在することを示している. 一般に Rayleigh 波型の分散波には M_1 型と M_2 型の二種類の型式があり, M_1, M_2 ともそれぞれ無数の分枝をもつことが知られている. このことは板については非常に明瞭である. その理由は, 板の場合には分散方程式が非常に簡単な二式に因数分解されるからである. Tolstoy 及び Usdin²⁾ はこの

Fig. 2 Boundary curves of the existence domain for M_{11} branch.

Fig. 3 Boundary curves of the existence domain for M_{21} branch.

Fig. 4 Boundary curves of the existence domain for M_{12} branch.

Fig. 5 Boundary curves of the existence domain for M_{22} branch.

Fig. 6 Boundary curves of the existence domain for M_{13} branch.

Fig. 7 Boundary curves of the existence domain for M_{23} branch.

Fig. 8 Boundary curves of the existence domain for M_{14} branch.

Fig. 9 Boundary curves of the existence domain for M_{24} branch.

Fig. 2~Fig. 9 までである。図の曲線は、右側のものが a) $\bar{s}=0$ に、左側が b) $\mu=\infty$ に対応するそれぞれの限界曲線である。これらの図から分散波は高次まで存在しえても、その領域は次第に狭くなっていることがわかる。この傾向は $V < 2Vs'$ ではかなり急激であるが、 $V > 2Vs'$ ではそれほど急でない。このことは $V=2Vs'$ で $\mu=\infty$ に対する L/H の値の交換がおこなわれるためかとも思われる。

以上述べたような結果に、更に限界曲線上の波長、速度に対する変位分布、Particle Orbitなどを考え合わせてより詳しく存在状態をしらべることは興味もあり、又今後の課題でもあろう。

参 考 文 献

- 1) R. YAMAGUCHI and Y. SATO: Range of Possible Existence of Rayleigh-and Sezawa-Waves in a Stratified Medium.
Bull. Earthq. Res. Inst., 33 (1955), Part 3. 265.
- 2) I. TOLSTOY and E. USDIN: Dispersive Properties of Stratified Elastic and Liquid Media: A Ray Theory.
Geophysics Vol. 18, No. 4, October, 1953.