寄 書

成層構造に対する ray
theory の適用 (4)

北大理地球物理 田 治 米 鏡 二

(昭和 33 年 3 月 4 日受理)

An Application of the Ray Theory to
Stratified Layers (4).

Kyozi TAZIME

Department of Geophysics, Faculty of
Science, Hokkaido University

(Received March 4, 1958)

§ 6. 変位 potential ϕ 及び ψ を用いて, 変位の
水平, 垂直成分を夫々次の如く表わすことがで
きる.

$$u_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z}, \quad w_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial z} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x}, \quad (6.1)$$

但し $h_j = \omega/v_{pj}$, $k_j = \omega/v_{sj}$,

$$\xi^2 = h_j^2 - \alpha_j^2 = k_j^2 - \beta_j^2, \quad (6.2)$$

とおけば, ϕ_j 及び ψ_j は夫々次の方程式を満足す
るものとする.

$$(\nabla^2 + h_j^2)\phi_j = 0, \quad (\nabla^2 + k_j^2)\psi_j = 0. \quad (6.3)$$

$j = 1, 2, 3, \dots$ は地表から数えた層の番号である。
(6.3) の特解を次の如く書くことができる.

$$\left. \begin{aligned} \phi_j &= e^{i(\omega t - \xi x)}(A_j e^{i\alpha_j z} + B_j e^{-i\alpha_j z}), \\ \psi_j &= e^{i(\omega t - \xi x)}(C_j e^{i\beta_j z} + D_j e^{-i\beta_j z}). \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

又 stress tensor Ψ の成分は (6.1) 及び (6.2) を
使つて次の如く表わすことが出来る.

$$\left. \begin{aligned} (\Psi_{zz})_j &= -\mu_j \left(k_j^2 \phi_j + 2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x \partial z} \right), \\ (\Psi_{zx})_j &= \mu_j \left(k_j^2 \psi_j + 2 \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial z \partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

(6.1) 及び (6.5) に (6.4) を代入すれば,

$$\left. \begin{aligned} u_j &= i e^{i(\omega t - \xi x)} \{ -\xi (A_j e^{i\alpha_j z} + B_j e^{-i\alpha_j z}) \\ &\quad + \beta_j (C_j e^{i\beta_j z} - D_j e^{-i\beta_j z}) \}, \\ w_j &= i e^{i(\omega t - \xi x)} \{ \alpha_j (A_j e^{i\alpha_j z} - B_j e^{-i\alpha_j z}) \\ &\quad + \xi (C_j e^{i\beta_j z} + D_j e^{-i\beta_j z}) \}. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} -(\Psi_{zz})_j &= e^{i(\omega t - \xi x)} \mu_j \{ (k_j^2 - 2\xi^2)(A_j e^{i\alpha_j z} + B_j e^{-i\alpha_j z}) \\ &\quad + 2\xi\beta_j (C_j e^{i\beta_j z} - D_j e^{-i\beta_j z}) \}, \\ -(\Psi_{zx})_j &= e^{i(\omega t - \xi x)} \mu_j \{ 2\xi\alpha_j (A_j e^{i\alpha_j z} - B_j e^{-i\alpha_j z}) \\ &\quad - (k_j^2 - 2\xi^2)(C_j e^{i\beta_j z} + D_j e^{-i\beta_j z}) \}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

半無限の弾性体内で

$$e^{i(\omega t - \xi x)} A_1 e^{i\alpha_1 z} \quad (6.8)$$

なる ray が地表面に入射して来る場合には, (6.7)
に於て, $j=1$, $C_1=0$ とし, 更に左辺を夫々 0 と
おけば入射波に対する反射波の振巾比は夫々次の如
くなる.

$$A = \frac{B_1}{A_1} = - \frac{(k_1^2 - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2\alpha_1\beta_1}{(k_1^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2\alpha_1\beta_1}, \quad (6.9)$$

$$B = \frac{D_1}{A_1} = \frac{4\xi\alpha_1(k_1^2 - 2\xi^2)}{(k_1^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2\alpha_1\beta_1}. \quad (6.10)$$

$$\text{次に} \quad e^{i(\omega t - \xi x)} C_1 e^{i\beta_1 z} \quad (6.11)$$

なる ray が地表面に入射して来る場合には, (6.7)
に於て $j=1$, $A_1=0$ とし, 更に左辺を夫々 0 と
おけば次式を得る.

$$C = \frac{B_1}{C_1} = - \frac{4\xi\beta_1(k_1^2 - 2\xi^2)}{(k_1^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2\alpha_1\beta_1}, \quad (6.12)$$

$$D = \frac{D_1}{C_1} = - \frac{(k_1^2 - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2\alpha_1\beta_1}{(k_1^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2\alpha_1\beta_1} = A. \quad (6.13)$$

ここで注意すべきは (6.9) ~ (6.13) は変位 po-
tential の反射係数である。これに反し Tolstoy 等
の反射係数は変位の垂直成分 w_1 を使っている。即
ち Tolstoy 等の反射係数は (6.9) ~ (6.13) の代
りに,

$$\frac{-i\alpha_1 B_1}{i\alpha_1 A_1}, \quad \frac{-i\xi D_1}{i\alpha_1 A_1}, \quad \frac{-i\alpha_1 B_1}{-i\xi C_1}, \quad \frac{-i\xi D_1}{-i\xi C_1}, \quad (6.14)$$

を使っている。これは入射波が上向きに進んでいる
場合であるが, 下向きの入射波を与えた場合には
(6.14) は次の如くなる.

$$\frac{i\alpha_1 A_1}{-i\alpha_1 B_1}, \quad \frac{-i\xi C_1}{-i\alpha_1 B_1}, \quad \frac{i\alpha_1 A_1}{-i\xi D_1}, \quad \frac{-i\xi C_1}{-i\xi D_1}. \quad (6.15)$$

故に Tolstoy 等の変位反射係数と吾々の変位
potential 反射係数との間には次の関係がある.

$$\left. \begin{aligned} A &\rightarrow -A, & G &\rightarrow -A', \\ B &\rightarrow (\xi/\alpha_1)B, & H &\rightarrow -(\xi/\alpha_1)B', \\ C &\rightarrow -(\alpha_1/\xi)C, & J &\rightarrow (\alpha_1/\xi)C', \\ -A &\rightarrow D, & I &\rightarrow D'. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

従つて TOLSTOY 等の変位の反射係数間の関係式

$$A^2 + BC = 1, \quad BJ = CH, \quad (6.17)$$

は変位 potential の反射係数で書けば次の如くなる。

$$AD - BC = 1, \quad BC' = CB'. \quad (6.18)$$

(6.18) を用いると、先ず (4.14) は次の如くなる。

$$\begin{aligned} M = 1 - \{ & AA'e^{-2i\alpha_1 H} + DD'e^{-2i\beta_1 H} \\ & + (B'C' - A'D')e^{-2i(\alpha_1 + \beta_1)H} \\ & + 2CB'e^{-i(\alpha_1 + \beta_1)H} \}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

(6.19) に於て $M=0$ とし、(6.16) に挙げた如き記号の書き換えをすれば、TOLSTOY 等が ray theory によつて求めた分散性 RAYLEIGH 波の特性方程式と全く一致する。

次に (4.13) 及び (4.15) に (4.5) を代入し、再び (6.18) を用いると、(4.1) の A_1, B_1, C_1, D_1 を反射係数を *explicit* に用いて表現することが出来る。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= [\{A'e^{-2i\alpha_1 H} + D(B'C' - A'D')e^{-2i(\alpha_1 + \beta_1)H}\}e^{i\alpha_1 H} \\ &\quad + \{AA'e^{-2i\alpha_1 H} + BC'e^{-i(\alpha_1 + \beta_1)H} \\ &\quad + (B'C' - A'D')e^{-2i(\alpha_1 + \beta_1)H}\}e^{-i\alpha_1 H}]/M, \\ B_1 &= [\{AA'e^{-2i\alpha_1 H} + CB'e^{-i(\alpha_1 + \beta_1)H} \\ &\quad + (B'C' - A'D')e^{-2i(\alpha_1 + \beta_1)H}\}e^{i\alpha_1 H} \\ &\quad + (A - D'e^{-2i\beta_1 H})e^{-i\alpha_1 H}]/M, \\ C_1 &= [\{B'e^{-i(\alpha_1 + \beta_1)H} - B(B'C' - A'D')e^{-2i(\alpha_1 + \beta_1)H}\}e^{i\alpha_1 H} \\ &\quad + \{AB'e^{-i(\alpha_1 + \beta_1)H} + BD'e^{-2i\beta_1 H}\}e^{-i\alpha_1 H}]/M, \\ D_1 &= [\{BA'e^{-2i\alpha_1 H} + DB'e^{-i(\alpha_1 + \beta_1)H}\}e^{i\alpha_1 H} \\ &\quad + \{B + B'e^{-i(\alpha_1 + \beta_1)H}\}e^{-i\alpha_1 H}]/M. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

成層構造に対する ray theory の適用 (5)

北大理地球物理 田 治 米 鏡 二

(昭和 33 年 3 月 4 日受理)

An Application of the Ray Theory to Stratified Layers (5).

Kyozi TAZIME

Department of Geophysics, Faculty of Science, Hokkaido University

(Received March 4, 1958)

§ 7. 表面波の特性方程式に関連した 1 つの関係。

表面波の特性方程式は一般に次の如きものである。

$$F(\xi, \omega) = 0. \quad (7.1)$$

然るに (7.1) から次の関係を得る。

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{\partial F}{\partial \omega} \cdot \frac{d\omega}{d\xi} + \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0.$$

$$\therefore U = \frac{d\omega}{d\xi} = - \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right) / \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right) \quad (7.2)$$

或は

$$\frac{1}{U} - \frac{1}{c} = - \frac{1}{F_{\xi}(\xi, \omega)} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) F(\xi, \omega),$$

即ち

$$\begin{aligned} &\omega \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{c} \right) \\ &= - \frac{1}{F_{\xi}(\xi, \omega)} \left(\omega \frac{\partial}{\partial \omega} + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) F(\xi, \omega). \end{aligned} \quad (7.3)$$

いう迄もなく、 ω は angular frequency, ξ は境界面方向の波数である。故に (7.2) で定義した U は群速度であり、又 c は位相速度を意味する。

更に F に対する添字 ξ は偏微分の記号法に従っている。

被積分函数が $\exp \{i(\omega t - \xi x)\}$ に比例し、然も (7.1) の条件がある場合が、分散波に特有な積分表示である。この積分を厳密に行うことはむずかしい。故に saddle point 近傍の被積分函数の値を以つて、できるだけよい近似をさせる方法がとられる。今の場合 saddle point は

$$\frac{d}{d\xi} \{i(\omega t - \xi x)\} = 0, \text{ 即ち } U = \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{x}{t}$$