非均質弾性球の振動問題その他を計算 するためのプログラム

東京大学理学部地球物理学教室 竹 内 均
" 斎 藤 正 徳
中央大学工学部精密工学科 小 林 直 太

(昭和 36 年 10 月 25 日受理)

A Computer Program for Studying Free Oscillations of Heterogeneous Elastic Spheres and Surface Wave Propagations Along a Free Surface of Semi-infinite Heterogeneous Elastic Media

Hitoshi TAKEUCHI, Masanori SAITO

Geophysical Institute, Faculty of Science, Tokyo University

Naota KOBAYASHI

Department of Precision Mechanics, Faculty of Technology, Chūo University

(Received October 25, 1961)

Problems of spheroidal and torsional oscillations of heterogeneous elastic spheres and Rayleigh and Love wave propagations along a free surface of semi-infinite heterogeneous elastic media are programmed for an electronic computer in a systematic way. Following the way by Alterman and others in their study on the spheroidal oscillations of the earth, we have chosen our dependent variables so that they are continuous at discontinuity surfaces within the media. By doing so, we can obviate the need of differentiating the empirically determined quantities ρ (density), λ and μ (elastic constants). Starting values in practical numerical integrations are conveniently calculated by an assumption that the medium is homogeneous from some depth.

§ 1.

弾性球の振動や Rayleigh 波, Love 波の伝播の問題が, 最近では電子計算機を用いて敏速に解かれるようになった. 筆者らの手もとにも, NEAC-2203 を用いて, 地球ののびちみ振動, ねじれ振動, Rayleigh 波, Love 波の問題を解くためのプログラムがそなえてある. このプログラムは, そのうちのほんの 1 部をいれかえるだけで, たとえばのびちみ振動用から Love 波用にうつれるようにつくられている. これを用いて行なつた計算の 1 部については, すでに 1961 年秋の地震学会で報告した. 以下はこのプログラムをつくる基礎になつた考えや数式についての報告である. 今後この種の問題を解く人の参考になれば幸いである.

§ 2.

地球では密度 ρ や弾性率 λ, μ が球の中心からの距離だけの函数であると考えられる。こういう構造をもつた弾性球ののびちじみ振動に対する基本式は次の形に書ける (Alterman その他, 1959)。

$$\dot{y}_l = \frac{dy_l}{dr} = \sum_m \widehat{lm} y_m. \quad (2.1)$$

ここに r は地球の中心からの距離を地球の半径 a を単位としてあらわしたもの、 y_l は (2.2) に示す未知函数、 $\widehat{lm}$ は (2.3) に示す既知函数である。

$$\begin{aligned} y_1 &= U, \quad y_2 = \lambda \left(\dot{y}_1 + \frac{2}{r} y_1 - \frac{N^2 y_3}{r} \right) + 2\mu \dot{y}_1, \\ y_3 &= V, \quad y_4 = \mu \left(\dot{y}_3 + \frac{y_1}{r} - \frac{y_3}{r} \right), \\ y_5 &= aP, \quad y_6 = \dot{y}_5 - 4\pi G a^2 \rho y_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \widehat{11} &= \frac{-2\lambda}{(\lambda+2\mu)r}, \quad \widehat{12} = \frac{1}{\lambda+2\mu}, \quad \widehat{13} = \frac{\lambda N^2}{(\lambda+2\mu)r}, \\ \widehat{21} &= -\sigma^2 a^2 \rho - 2 \frac{\rho g a}{r} - 2 \widehat{41}, \quad \widehat{22} = -\frac{4\mu}{(\lambda+2\mu)r}, \quad \widehat{23} = N^2 \widehat{41}, \\ \widehat{24} &= \frac{N^2}{r}, \quad \widehat{26} = -\rho, \quad \widehat{31} = -\frac{1}{r}, \quad \widehat{33} = \frac{1}{r}, \quad \widehat{34} = \frac{1}{u}, \\ \widehat{41} &= \frac{\rho g a}{r} - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r^2}, \quad \widehat{42} = -\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)r}, \\ \widehat{43} &= -\sigma^2 a^2 \rho + \frac{4N^2\mu(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)r^2} - \frac{2\mu}{r^2}, \quad \widehat{44} = -\frac{3}{r}, \quad \widehat{45} = -\frac{\rho}{r}, \\ \widehat{51} &= 4\pi G a^2 \rho, \quad \widehat{56} = 1, \quad \widehat{63} = -\frac{4\pi G a^2 \rho N^2}{r}, \quad \widehat{65} = \frac{N^2}{r^2}, \\ \widehat{66} &= -\frac{2}{r}, \quad \text{その他の } \widehat{lm} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.2) 中の U, V, P は、変位の球座標 (r, θ, ϕ) 成分 (u_r, u_θ, u_ϕ) および地球変形によつて生じた引力のポテンシャル K を

$$\begin{aligned} u_r &= U(r) S_n(\theta, \phi), \quad u_\theta = V(r) \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta}, \\ u_\phi &= \frac{V(r)}{\sin \theta} \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \phi}, \quad K = P(r) S_n(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (2.4)$$

とおいたときにでてくる函数、 G は万有引力の定数 $= 6.67 \times 10^{-8} \text{ c. g. s.}$ 、 g は重力の加速

度, n は球函数 $S_n(\theta, \phi)$ の次数を示す. また $N^2 = n(n+1)$ で, $U, V, P \propto e^{i\sigma t}$ (σ : 振動数) と仮定している. みたすべき境界条件は, 球中の不連続面において

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 = \text{連続} \quad (2.5)$$

なることおよび球表面 $r=1$ において

$$y_2 = y_4 = y_6 + (n+1)y_5 = 0 \quad (2.6)$$

なることである. (2.1)~(2.6) は, 地球潮汐についての筆者の論文 (1950) において

$$r^{n-1}F_n(r) = V, \quad nr^{n-1}F_n(r) + r^{n+1}G_n(r) = U, \quad K_n(r)r^n = P \quad (2.7)$$

と置いてえられる関係式である. また計算に便利のように変数変換を行なつたので, (2.1)~(2.6) にでてくる y と, Alterman らの原論文にでてくる y とは定数倍だけちがつてくる. 前者を $y_l(O)$, 後者を $y_l(P)$ とするすと, 次の関係がえられる.

$$\begin{aligned} [y_1(P), y_3(P)] &= [y_1(O), y_3(O)], \\ [y_2(P), y_4(P), y_5(P)] &= 1/a \\ [y_2(O), y_4(O), y_5(O)], y_6(P) &= 1/a^2 y_6(O) \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.1)~(2.6) の特色は, (2.5) のように不連続面において連続となる量を未知函数にえらんであること, および (2.3) に示した係数 $\widehat{lm}$ 中に実験的に与えられる量 ρ, λ, μ の微分をふくまないことである. この特色はじつさいの数値計算において便利に用いられる.

§ 3.

前節のおわりでのべた特色をいかすために, 地球のねじれ振動, Love 波, Rayleigh 波の問題を (2.1)~(2.6) と同じ形に書き下しておこう.

球のねじれ振動:

変位成分 (u_r, u_θ, u_ϕ) を

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{V(r)}{\sin \theta} \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \phi}, \quad u_\phi = -V(r) \frac{\partial S_n(\theta, \phi)}{\partial \theta} \quad (3.1)$$

とし

$$y_1 = V, \quad y_2 = \mu \left(\dot{y}_1 - \frac{y_1}{r} \right) \quad (3.2)$$

としたとき, 基本式は

$$\dot{y}_1 = \widehat{11} y_1 + \widehat{12} y_2, \quad \dot{y}_2 = \widehat{21} y_1 + \widehat{22} y_2 \quad (3.3)$$

$$\widehat{11} = \frac{1}{r}, \quad \widehat{12} = \frac{1}{\mu}, \quad \widehat{21} = \frac{(N^2 - 2)\mu}{r^2} - \sigma^2 a^2 \rho, \quad \widehat{22} = -\frac{3}{r} \quad (3.4)$$

となる. 境界条件は, 球中の不連続面で

$$y_1, y_2 = \text{連続} \quad (3.5)$$

自由表面 $r=1$ で

$$y_2 = 0 \quad (3.6)$$

となることである。

つぎに ρ, λ, μ が深さの函数である場合の Love 波, Rayleigh 波の問題を考える。水平に (x, y) 軸, 鉛直に z 軸をとり, 変位の (x, y, z) 成分を (u, v, w) とし, 適当な長さ H を単位としてあらわした z を, あらためて z と書くことにする。

Love 波 :

$$v = e^{ik(x-ct)} v(z), \quad y_1 = v, \quad y_2 = \mu \dot{y}_1 \quad (3.7)$$

とすれば, 基本式は

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{\mu} y_2, \quad \dot{y}_2 = (kH)^2 (\mu - \rho c^2) y_1 \quad (3.8)$$

となる。境界条件は, 不連続面で

$$y_1, y_2 = \text{連続} \quad (3.9)$$

自由表面で

$$y_2 = 0 \quad (3.10)$$

となることである。

Rayleigh 波 :

$$u, w \propto e^{ik(x-ct)}, \\ y_1 = U = iu, \quad y_3 = w, \quad y_2 = \mu(\dot{y}_1 - kHy_3), \quad y_4 = (\lambda + 2\mu)\dot{y}_3 + \lambda kHy_1 \quad (3.11)$$

とすれば, 基本式は

$$\dot{y}_l = \frac{dy_l}{dz} = \sum_m \widehat{l}_m y_m, \\ \widehat{12} = \frac{1}{\mu}, \quad \widehat{13} = kH, \quad \widehat{34} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad \widehat{31} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot kH, \\ \widehat{43} = -\rho c^2 (kH)^2, \quad \widehat{42} = -kH, \quad \widehat{21} = (kH)^2 \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} - \rho c^2 \right\}, \\ \widehat{24} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot kH, \quad \text{その他の } \widehat{l}_m = 0 \quad (3.12)$$

となる。境界条件は, 不連続面で

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = \text{連続} \quad (3.13)$$

自由表面で

$$y_2 = y_4 = 0 \quad (3.14)$$

となることである。

このようにして、球のねじれ振動、Love 波、Rayleigh 波の問題を、球ののびちぢみ振動の問題 (2.1), (2.5) と同一の形式に帰することができた。係数 $\widehat{lm}$ 中に ρ, λ, μ の微分をふくまないことも、前と同じである。(2.1) の形の連立常微分方程式は、Runge-Kutta 法を用いて解くのに適している。われわれのプログラムもこれを用いてつくられ、係数 $\widehat{lm}$ を計算する部分をのぞいて、他の部分は個々の問題をはなれた一般の形につくられている。

§ 4.

たとえば (2.1) ~ (2.6) は、波数 n を与えてそれに対応する振動数 σa をきめる固有値問題となる。これを解くさいに、ある球面 $r=r'$ より中の部分を近似的に ρ, λ, μ が一定の均質球と考えることが多い。じつさい問題としては、固有値 σa に対する変位振幅が適当に小さくなる深さに対応した r を r' とすればよい。 σa がきまらなければ、それに対する変位振幅分布もきまらず、したがって r' もきまらないという見方もある。しかし逐次近似的に進めば、この困難はさけられる。

自身の引力を考えにいれたときの均質弾性球の振動は、Love (1911) によつてくわしく研究されている。以下は、上に用いた記号を用いて彼のえた結果を整理し、これを電子計算機のプログラムに便利なように書き下したものである。2 次方程式

$$\begin{aligned} \mu(\lambda+2\mu)X^2 + \left\{ \frac{16}{3}\pi G\rho^2 a^2 \mu + (\lambda+3\mu)\rho\sigma^2 a^2 \right\} X \\ + \left\{ (\rho\sigma^2 a^2)^2 + \frac{16}{3}\pi G\rho^2 a^2 \cdot \rho\sigma^2 a^2 - N^2 \left(\frac{4}{3}\pi G\rho^2 a^2 \right)^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

の 2 根を

$$X = -\alpha^2 a^2, \quad -\beta^2 a^2 \quad (4.2)$$

としよう。 ρ, λ, μ は均質球の密度、弾性率で、 a を $r=1$ に対応した地球の半径とする。 a が $r=r'$ に対応した均質球の半径でないことに注意しよう。(4.2) で求めた、 $\alpha a, \beta a$ に対応して 2 つの独立解がある。それらに対する積分定数をそれぞれ A, B とし、 A, B 解とよぶことにしよう。以下 A 解に対する結果だけをしるすが、 B 解に対する結果は $\alpha a \rightarrow \beta a$ というおきかえによつてえられる。

$$\alpha a r = x, \quad \bar{g} = \frac{4}{3}\pi G a^2 \rho, \quad \mu(\alpha a)^2 - \rho(\sigma a)^2 = f, \quad f - \bar{g}\rho(n+1) = T \quad (4.3)$$

としたとき

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{r} \left[n T j_n(x) - f x j_{n+1}(x) \right], \\ y_2 &= \frac{1}{r^2} \left[\{ 2\mu n(n-1) T - (\lambda+2\mu) f x^2 \} j_n(x) + 2\mu (N^2 \bar{g} \rho + 2f) x j_{n+1}(x) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= \frac{1}{r} [Tj_n(x) + \bar{g}\rho x j_{n+1}(x)], \\
y_4 &= \frac{\mu}{r^2} [\{2(n-1)T + \bar{g}\rho x^2\}j_n(x) - 2(f + \bar{g}\rho)xj_{n+1}(x)], \\
y_5 &= 3\bar{g}fj_n(x), \\
y_6 &= \frac{1}{r} 3\bar{g}^2\rho N^2 j_n(x)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

となる。もう1つの独立解に対する積分定数を C とし、 C 解とよぶことにする。 C 解は次のようになる。

$$\begin{aligned}
y_1 &= nr^{n-1} = ny_3, \\
y_2 &= 2\mu n(n-1)r^{n-2} = \frac{2\mu(n-1)}{r} y_1 = ny_4, \\
y_3 &= r^{n-1}, \\
y_4 &= 2\mu(n-1)r^{n-2} = \frac{2\mu(n-1)}{r} y_3, \\
y_5 &= \{\bar{g}n - (\sigma a)^2\}r^n \\
y_6 &= \{\bar{g}(n-3) - (\sigma a)^2\}nr^{n-1}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

たとえば地球核を半径 b の均質球と仮定して、われわれの数値積分をどのように進めるかを考えてみよう。まず与えられた核内での ρ, λ, μ の値を用い、問題の波数 n に対してある振動数 σ を仮定して、核表面 $r = \frac{b}{a} - 0$ での $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ を計算する。このさい定数 A, B, C が未定に残る。なお $r = \frac{b}{a} - 0$ の -0 は、それが核内から核表面に近づくことを示している。同様にしてマントルから核表面に近づくことを $r = \frac{b}{a} + 0$ で示せば、境界条件 (2.5) によつて、 $r = \frac{b}{a} + 0$ における $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ が未定定数 A, B, C を用いてあらわされる。このような出発値を用いて (2.1) ~ (2.3) を数値積分すれば、3つの独立解がえられ、たとえば $r=1$ における $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ が未定定数 A, B, C を用いてあらわされる。したがつて境界条件 (2.6) は、 A, B, C に関する斉次の連立1次方程式となる。この連立方程式の係数でもつてつくつた行列式は、一般には0とならないであろう。これは最初に仮定した振動数 σ が固有値でないからで、行列式 = 0 となるような σ を求めれば、それが求める固有値となる。

核内で $\mu=0$ のときは、(4.1) の根 X は

$$-X = \alpha^2 a^2 = \frac{\rho \left\{ \sigma^2 a^2 + \frac{16}{3} \pi G \rho a^2 - N^2 \left(\frac{4}{3} \pi G \frac{\rho a^2}{\alpha a} \right)^2 \right\}}{\lambda} \tag{4.6}$$

1つだけになる。すなわち独立な解の1つがなくなる。これは地球潮汐の問題でもおこつたことで、この場合には B 解 $= 0$ とすればよい。すなわち核内での解中の未定定数が A, C の2つになる。このとき核表面で (u_θ, u_ϕ) は連続でなくてよいから、境界条件 (2.5) の第3番目のものは、これをみたさなくてよい。残る5つの境界条件を用いれば、 $r = \frac{b}{a} + 0$ における y_1, y_2, y_4, y_5, y_6 が未定定数 A, C を用いてあらわされる。 $r = \frac{b}{a} + 0$ における y_3 も未定であるから、 $r = \frac{b}{a} + 0$ において $y_3 = 1, y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$ であるような解にかかる未定定数を B とすれば、これで未定定数が3つそろふ。これから後は、先にのべたのと同様にして固有値 σ がきまる。

n が大きくなると、ある適当な r 、たとえば $r = r'$ より小さい r に対して、 U, V がじつさい上 0 になる。この場合には $r \leq r'$ に完全剛体球があると考え、いろいろのとりあつかいが簡単になる。完全剛体球では $\lambda, \mu \rightarrow \infty, U, V, \dot{U}, \dot{V} \rightarrow 0$ ゆえ、(2.2) 中の $y_1, y_3 \rightarrow 0, y_2, y_4 =$ 不定となる。また (2.1) 中の最後の式は $\dot{y}_5 + \frac{2}{r} \dot{y}_5 - \frac{n(n+1)}{r^2} y_5 = 0$

$\therefore y_5 \propto r^n$ となる。このようにして $r = r'$ における3つの境界条件

$$y_1, y_3, ry_6 - ny_5 = 0 \quad (4.7)$$

がえられる。すなわち $r = r'$ における y_2, y_4 、および y_5 (あるいは y_6) が独立にえらびうる量となる。これらにかかる任意定数を A, B, C とすれば、後は前と全く同様にして固有値方程式がえられる。完全剛体核を考えてえられる利点は、この場合 (4.4), (4.5) とちがつて、 A, B, C にかかる係数が簡単に計算できることである。

固い地球の上に海がのつかつた場合のように、 $0 \leq r \leq r'$ に固体球があり、 $r' \leq r \leq 1$ に液体球殻があるときのことも考えておく必要がある。この場合 $r' \leq r \leq 1$ に対する基本式は、(2.1) ~ (2.3) において $\mu = 0$ とおいてえられる。すなわち $y_4 \equiv 0$ となり、 $\dot{y}_3$ に対する式は $0 + 0$ 型の不定形となる。また $y_4 \equiv 0$ なる式を $\dot{y}_3$ について解くと、(4.8) 中の最後の式がえられる。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \widehat{11} y_1 + \widehat{12} y_2 + \widehat{13} y_3, \\ \dot{y}_2 &= \widehat{21} y_1 + \widehat{23} y_3 + \widehat{26} y_6, \\ \dot{y}_5 &= \widehat{51} y_1 + \widehat{56} y_6, \\ \dot{y}_6 &= \widehat{63} y_3 + \widehat{65} y_5 + \widehat{66} y_6, \\ y_3 &= \widehat{31} y_1 + \widehat{32} y_2 + \widehat{35} y_5 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= U, \quad y_2 = \lambda \left(\dot{y}_1 + \frac{2}{r} y_1 - \frac{N^2 y_3}{r} \right), \\
 y_3 &= V, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = aP, \\
 y_6 &= \dot{y}_5 - 4\pi G a^2 \rho y_1
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{11} &= -\frac{2}{r}, \quad \widehat{12} = \frac{1}{\lambda}, \quad \widehat{13} = \frac{N^2}{r}, \\
 \widehat{21} &= -\sigma^2 a^2 \rho - \frac{2\rho g a}{r}, \quad \widehat{23} = \frac{\rho g a}{r} N^2, \\
 \widehat{26} &= -\rho, \quad \widehat{51} = 4\pi G a^2 \rho, \quad \widehat{56} = 1, \\
 \widehat{63} &= -\frac{4\pi G a^2 \rho}{r} N^2, \quad \widehat{65} = \frac{1}{r^2} N^2, \quad \widehat{66} = -\frac{2}{r}, \\
 \widehat{31} &= \frac{1}{\sigma^2 a^2} \cdot \frac{g a}{r}, \quad \widehat{32} = -\frac{1}{\sigma^2 a^2} \cdot \frac{1}{r\rho}, \quad \widehat{35} = -\frac{1}{\sigma^2 a^2} \cdot \frac{1}{r}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

固体と液体の境 $r=r'$ における境界条件は

$$y_1, y_2, y_5, y_6 = \text{連続} \tag{4.11}$$

$$y_4 = 0 \tag{4.12}$$

なることである。この節のはじめにのべたことから明らかなように、 $r=r'-0$ における $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ は未定定数 A, B, C を用いてあらわされる。(4.11) および (4.8) の最後の式を用いれば、 $r=r'+0$ における y_1, y_2, y_3, y_5, y_6 が A, B, C を用いてあらわされる。これだけの出発値があれば、(4.8)~(4.10) を用いて $r' \leq r \leq 1$ における積分を逐行し、たとえば $r=1$ における y_1, y_2, y_3, y_5, y_6 を A, B, C を用いてあらわすことができる。最後に $r=r'$ における境界条件 (4.12) および $r=1$ における境界条件 (2.6) 中の $y_2 = y_6 + (n+1)y_5 = 0$ が、固有値方程式を与える。

§ 5.

ある深さより深い部分を均質弾性体でおきかえる近似法を、前節でしばしば用いた。今節ではこの考えをねじれ振動、Love 波、Rayleigh 波の問題に適用してみよう。まずねじれ振動について考える。 ρ, μ が一定なる均質球に対する (3.2)~(3.4) の解は

$$y_1 = j_n \left(\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \sigma a r \right), \quad y_2 = \mu \left(\frac{dy_1}{dr} - \frac{y_1}{r} \right) \tag{5.1}$$

となる。したがって核を均質球と考えた場合、境界条件 (3.5) により、核表面 $r = \frac{b}{a} + 0$ における y_1, y_2 は (5.1) に等しくなる。このような出発値を用い、(3.3), (3.4) を数値積分したときに、 $r=1$ で (3.6) をみたすように固有値 σ をきめればよい。

(3.7) の前でのべた z 軸を鉛直上方にとり, $z \geq 0$ の領域に不均質弾性体が, $z \leq 0$ の領域に半無限均質弾性体があると仮定しよう. Love 波を考えると $z \leq 0$ に対する (3.8) の解は

$$y_1 = e^{\beta H z}, \quad \beta > 0, \quad \beta^2 = k^2 \left\{ 1 - \left(\frac{c}{V_s} \right)^2 \right\}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (5.2)$$

ゆえ, $z = -0$ における y_1, y_2 は

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \mu \beta H \quad (5.3)$$

となる. $z = -0$ は, 境界面 $z = 0$ へ $z < 0$ の側から接近した極限を示している. 同様にして $z = +0$ を定義すれば, 境界条件 (3.9) により, $z = +0$ における y_1, y_2 も (5.3) に等しくなる. 出発値 (5.3) を用いて (3.8) を数値積分し, 境界条件 (3.10) をみたすように固有値 c をきめるのが, ここでの問題である. $z \leq 0$ に流体 (あるいは完全剛体) があるときの境界条件が, $z = 0$ で $y_2 = 0$ (あるいは $y_1 = 0$) であることは, ねじり振動のときと同様である.

Rayleigh 波の問題で $z \leq 0$ に対する (3.12) の解は

$$\begin{aligned} y_1 &= -kHAe^{\alpha H z} + \beta HBe^{\beta H z}, \\ y_3 &= \alpha H A e^{\alpha H z} - kHB e^{\beta H z}, \\ \alpha^2 &= k^2 \left\{ 1 - \left(\frac{c}{V_p} \right)^2 \right\}, \quad \beta^2 = k^2 \left\{ 1 - \left(\frac{c}{V_s} \right)^2 \right\}, \\ V_p &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

となる. これを用いれば, $z = -0$ における y_1, y_2, y_3, y_4 は

$$\begin{aligned} y_1 &= -kHA + \beta HB, \quad y_3 = \alpha HA - kHB, \\ y_2 &= \mu [-2kH \cdot \alpha HA + \{(kH)^2 + (\beta H)^2\}B], \\ y_4 &= \{(\lambda + 2\mu) \cdot (\alpha H)^2 - \lambda(kH)^2\}A - 2\mu \cdot kH \cdot \beta HB \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる. 境界条件 (3.13) を用いれば, (5.5) を $z = +0$ における出発値として, $+0 \leq z$ において (3.12) の数値積分を行なつてよい. その結果自由表面における y_1, y_2, y_3, y_4 が未定定数 A, B を用いてあらわらわされ, 境界条件 (3.14) を用いて固有値 c がきめられる. $z \leq 0$ に完全剛体があるときには, $z = 0$ における境界条件が $y_1 = y_3 = 0$ となる. $z \leq 0$ に流体がある場合には, 変位の横波的部分がないわけで, (5.4), (5.5) において $B = 0$ とおけばよい. 境界条件 (3.13) は $y_2 = 0, y_3, y_4 =$ 連続となり, y_1 は連続でなくてよい. この境界条件および (5.5) を用いれば, $z = +0$ における y_3, y_4 が未定定数 A によつてあらわされる. $z = +0$ で $y_2 = y_3 = y_4 = 0, y_1 = 1$ なる解にかかる未定定数を B とすれば, 未定定数が 2 つそろふ. これから後は前と同様にして固有値 c がきまる.

固体層 $0 \leq z \leq z'$ の上に流体層がある場合を考えよう。流体層中では、(4.8)~(4.10) とにた次の関係がなりたつ。

$$y_1 = U, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = w, \quad y_4 = \lambda(\dot{y}_3 + kHy_1) \quad (5.6)$$

$$y_3 = \widehat{34} y_4, \quad \dot{y}_4 = \widehat{43} y_3,$$

$$\widehat{34} = -\frac{1}{\rho c^2} + \frac{1}{\lambda}, \quad \widehat{43} = -\rho c^2 (kH)^2 \quad (5.7)$$

固体と液体との境 $z = z'$ における境界条件は

$$y_3, \quad y_4 = \text{連続} \quad (5.8)$$

$$y_2 = 0 \quad (5.9)$$

となることである。上にくりかえしてのべたように、 $z = z' - 0$ における y_3, y_4 は未定定数 A, B を用いてあらわされる。したがって境界条件 (5.8) および微分方程式 (5.7) を用いれば、 $z' + 0 \leq z$ における y_3, y_4 が未定定数 A, B を用いてあらわされる。最後に $z = z'$ における境界条件 (5.9), および自由表面における境界条件 (3.14) 中の $y_4 = 0$ が固有値方程式を与える。

§ 6.

上にのべた諸公式にもとずき NEAC-2203 を用いて計算するためのプログラムが、すでに完成している。のびちじみ振動、ねじれ振動、のびちじみ型あるいはねじれ型の静的変形については、このプログラムを用いすでに相当長時間の計算を行なつた。§ 1 にのべたように、その結果の 1 部については、1961年秋の地震学会で報告済みである。これからも逐次報告するつもりである。

参 考 文 献

- Alterman, Z., H. Jarosch, and C. L. Pekeris, 1959, Oscillations of the earth. Proc. Roy. Soc. London, A, 252, 80—95.
 Love, A. E. H., 1911, Some problems of geodynamics. Cambridge University Press.
 Takeuchi, H., 1950, On the earth tide of variable density and elasticity. Trans. Amer. Geophys. Union., 31, 651—689.