寄 書

振動する水底によつて 発生する Water Waves について(2次元の場合)

東京大学地震研究所

桃 井 高 夫

(昭和36年10月18日受理)

On Water Waves Generated by a Vibrating
Bottom (Two Dimensional Case)

Takao MOMOI

Earthquake Research Institute of
Tokyo University

(Received Nov. 18, 1961)

1. 著者はある区間内 ($x_0 > x > -x_0$) (参照: Fig. 1) だけ一様に振動する Bottom によつて発生する Water wave について考えた。振動する bottom の長さとの進行波の Wave number との間に特殊な関係があるとき、進行波は消え、振動する bottom の近傍の disturbance だけが残る。また、bottom の近傍の Water wave の one cycle の変化が得られている。

2. 基本方程式と Boundary Condition.

$$\partial\Phi/\partial t = -g\zeta \quad (z=0), \quad (1)$$

$$\partial\zeta/\partial t = \partial\Phi/\partial z \quad (z=0), \quad (2)$$

$$\text{or} \quad \partial^2\Phi/\partial t^2 + g \cdot \partial\Phi/\partial z = 0 \quad (z=0), \quad (3)$$

$$\text{また, } \left. \begin{aligned} \partial\Phi/\partial z &= \eta \quad (x_0 > x > -x_0) \\ &= 0 \quad (|x| > x_0) \end{aligned} \right\} \quad (z = -H) \quad (4)$$

$$(\partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial x^2) \Phi = 0. \quad (5)$$

ここで、 Φ は Velocity potential; t は時間の変数; g は重力の加速度; ζ は Wave height; x と z は Fig. 1 の如くとられた座標; H は水深; η は Vibrating bottom の変位速度である。

我々は今、振動している場合を扱っているので、(3)、(4) と (5) は次のごとくなる。

$$-\omega^2 \Phi + g \cdot \partial\Phi/\partial z = 0 \quad (z=0), \quad (3')$$

$$\left. \begin{aligned} \partial\Phi'/\partial z &= \eta' \quad (|x| < x_0) \\ &= 0 \quad (|x| > x_0) \end{aligned} \right\} \quad (z = -H), \quad (4')$$

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2) \Phi' = 0. \quad (5')$$

ここで、ダッシンをつけられた函数は各函数から因数 $e^{-i\omega t}$ をおとした函数である。簡単のために後の計算ではすべてダッシンを省略した。

3. 振動領域 ($|x| < x_0$) に於ける解

(4') に於ける η' は常数なので (振動 factor がおとされているから)、(3'), (4') を充す方程式 (5') の特解は $\eta(z + g/\omega^2)$ で与えられる。この特解に、 $\eta=0$ とおいた homogeneous boundary condition (3'), (4') を充す一般解を加えた解が振動領域に於ける一般解である。そして homogeneous boundary condition を充す一般解は Havelock (1929) にならつて次のごとく与えられる、すなわち、

$$\begin{aligned} & (B_0^{(1)} e^{ia_0 x} + C_0^{(1)} e^{-ia_0 x}) \cosh a_0 (H+z) \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} (B_s^{(1)} e^{-a_s x} + C_s^{(1)} e^{a_s x}) \cos a_s (H+z), \end{aligned}$$

ここで、 $a_r (r=0, 1, 2, \dots)$ は $\omega^2 = ag \tanh aH$ の解; $B_r^{(1)}, C_r^{(1)} (r=0, 1, 2, \dots)$ は任意常数。

かくして、振動領域 ($|x| < x_0$) に於ける一般解は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= (B_0^{(1)} e^{ia_0 x} + C_0^{(1)} e^{-ia_0 x}) \cosh a_0 (H+z) \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} (B_s^{(1)} e^{-a_s x} + C_s^{(1)} e^{a_s x}) \cos a_s (H+z) \\ &+ \eta(z + g/\omega^2), \end{aligned} \quad (6)$$

ここで super-suffix (1) は振動領域に於ける函数を示す。

4. 非振動領域 ($|x| > x_0$) に於ける解

この領域に於ける一般解は section 3 に於ける homogeneous boundary condition に対する一般解と全く同じである。そしてこの解は $x = \pm \infty$ で $e^{\pm ia_0 x}$ (複号同順) の形をしていなければならない。すなわち進行波だけが残る。その Potential は次のようである。

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \Phi_{(+)}^{(2)} \\ \Phi_{(-)}^{(2)} \end{aligned} \right\} &= \left\{ \begin{aligned} B_0^{(2)} e^{+ia_0 x} \\ C_0^{(2)} e^{-ia_0 x} \end{aligned} \right\} \cosh a_0 (H+z) \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} B_s^{(2)} e^{-a_s x} \\ C_s^{(2)} e^{+a_s x} \end{aligned} \right\} \cos a_s (H+z) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $B_r^{(2)}, C_r^{(2)} (r=0, 1, 2, \dots)$ は任意常数; $\Phi_{(+)}^{(2)}$

Fig. 1.

は $x > 0$ 側の Velocity potential; $\Phi_{(-)}^{(2)}$ は $x < 0$ 側の Velocity potential; super-suffix (2) は非振動領域に於ける函数を示す.

5. 任意常数の決定

$x = x_0$ に於ける pressure の連続性, すなわち $\Phi_{(+)}^{(1)} = \Phi_{(+)}^{(2)}$ と velocity の連続性, すなわち $\partial\Phi^{(1)}/\partial x = \partial\Phi_{(+)}^{(2)}/\partial x$, とから, (6) と (7) を用いて次の二式を得る.

$$\begin{aligned} & (B_0^{(1)} e^{ia_0 x_0} + C_0^{(1)} e^{-ia_0 x_0}) \cosh a_0 (H+z) \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} (B_s^{(1)} e^{-a_s x_0} + C_s^{(1)} e^{a_s x_0}) \cos a_s (H+z) \\ & + \eta (z + g/\omega^2) \\ & = B_0^{(2)} e^{ia_0 x_0} \cosh a_0 (H+z) \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} B_s^{(2)} e^{-a_s x_0} \cos a_s (H+z) \\ & ia_0 (B_0^{(1)} e^{ia_0 x_0} - C_0^{(1)} e^{-ia_0 x_0}) \cosh a_0 (H+z) \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} a_s (-B_s^{(1)} e^{-a_s x_0} + C_s^{(1)} e^{a_s x_0}) \cos a_s \\ & \quad (H+z) \\ & = ia_0 B_0^{(2)} e^{ia_0 x_0} \cosh a_0 (H+z) \\ & - \sum_{s=1}^{\infty} a_s B_s^{(2)} e^{-a_s x_0} \cos a_s (H+z), \end{aligned}$$

ところで, 函数系 $\{\cosh a_0 (H+z), \cos a_s (H+z)\}$ ($s=1, 2, 3, \dots$) は区間 $-H \leq z \leq 0$ で直交するので, 上の二式に夫々函数 $\cosh a_0 (H+z)$, $\cos a_s (H+z)$ ($s=1, 2, 3, \dots$) をかけて $-H$ から 0 まで積分すると次の式を得る.

$$\left. \begin{aligned} B_0^{(1)} e^{ia_0 x_0} + C_0^{(1)} e^{-ia_0 x_0} - L_0 &= B_0^{(2)} e^{ia_0 x_0} \\ B_s^{(1)} e^{-a_s x_0} + C_s^{(1)} e^{a_s x_0} - L_s &= B_s^{(2)} e^{-a_s x_0} \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} B_0^{(1)} e^{ia_0 x_0} - C_0^{(1)} e^{-ia_0 x_0} &= B_0^{(2)} e^{ia_0 x_0} \\ B_s^{(1)} e^{-a_s x_0} - C_s^{(1)} e^{a_s x_0} &= B_s^{(2)} e^{-a_s x_0} \end{aligned} \right\},$$

ここで

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{-4\eta}{\sinh 2a_0 H + 2a_0 H} \left\{ -\frac{1}{a_0} (\cosh a_0 H - 1) + \frac{g}{\omega^2} \sinh a_0 H \right\} \\ L_s &= \frac{-4\eta}{\sin 2a_s H + 2a_s H} \left\{ \frac{1}{a_s} (\cos a_s H - 1) + \frac{g}{\omega^2} \sin a_s H \right\} \end{aligned}$$

$$(s = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

同様に $x = -x_0$ に於ける pressure と Velocity の連続性とから次の式を得る.

$$\left. \begin{aligned} B_0^{(1)} e^{-ia_0 x_0} + C_0^{(1)} e^{ia_0 x_0} - L_0 &= C_0^{(2)} e^{ia_0 x_0} \\ B_s^{(1)} e^{a_s x_0} + C_s^{(1)} e^{-a_s x_0} - L_s &= C_s^{(2)} e^{-a_s x_0} \\ B_0^{(1)} e^{-ia_0 x_0} - C_0^{(1)} e^{ia_0 x_0} &= -C_0^{(2)} e^{ia_0 x_0} \\ B_s^{(1)} e^{a_s x_0} - C_s^{(1)} e^{-a_s x_0} &= -C_s^{(2)} e^{-a_s x_0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(8) と (10) を解いて, 常数は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} B_0^{(1)} &= C_0^{(1)} = \frac{L_0}{2} e^{ia_0 x_0} \\ B_s^{(1)} &= C_s^{(1)} = \frac{L_s}{2} e^{-a_s x_0} \\ B_0^{(2)} &= C_0^{(2)} = i \cdot L_0 \sin a_0 x_0 \\ B_s^{(2)} &= C_s^{(2)} = -L_s \sinh a_s x_0 \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

6. 発生波理論形式

(11) を (6) および (7) に代入すると, 振動および非振動領域の Velocity potential は次のようになる.

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= L_0 \cos(\omega t - a_0 x_0) \cos a_0 x \cdot \cosh a_0 (H+z) \\ &+ \cos \omega t \cdot \sum_{s=1}^{\infty} L_s e^{-a_s x_0} \cosh a_s x \cdot \cos a_s (H+z) \\ &+ \cos \omega t \cdot \eta' (z + g/\omega^2), \\ \Phi_{(\pm)}^{(2)} &= L_0 \sin(\omega t \mp a_0 x) \cdot \sin a_0 x_0 \cdot \cosh a_0 (H+z) \\ &- \cos \omega t \cdot \sum_{s=1}^{\infty} L_s e^{\mp a_s x} \sinh a_s x_0 \\ &\quad \cdot \cos a_s (H+z), \end{aligned}$$

但し, 複号同順で Real part のみ考えている.

上の二式を (1) に代入すれば, 振動および非振動領域に於ける波高が得られる. すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{(1)} &= (\eta'/\omega) \sin \omega t \\ &+ (\omega L_0/g) \sin(\omega t - a_0 x_0) \\ &\quad \cdot \cos a_0 x \cosh a_0 H \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & + (\omega/g) \sin \omega t \cdot \sum_{s=1}^{\infty} L_s e^{-a_s x_0} \\ & \quad \cdot \cosh a_s x \cdot \cos a_s H \\ \zeta_{(\pm)}^{(2)} = & - (\omega/g) L_0 \cos(\omega t \\ & \quad \mp a_0 x) \sin a_0 x_0 \cosh a_0 H \\ & - (\omega/g) \sin \omega t \cdot \sum_{s=1}^{\infty} L_s \cdot \sinh a_s x_0 \\ & \quad \cdot e^{\mp a_s x} \cos a_s H \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

但し、複号は同順で、 $\zeta^{(1)}$ は振動域の波高； $\zeta_{(+)}^{(2)}$ は $x > 0$ 側の、 $\zeta_{(-)}^{(2)}$ は $x < 0$ 側の非振動域に於ける波高を示す。

7. (12) 式の各項の物理的意味

Bottom の変位を D とすれば、 $D = D_0 \sin \omega t$ (D_0 は constant) で表わされ、また $\eta = \partial D / \partial t$ で与えられるので、 $\eta' = D_0 \cdot \omega$ となる。従つて $\zeta^{(1)}$ の第一項は $D_0 \sin \omega t$ となり、Bottom 同じ phase で振動する波を示す。第二項、すなわち

$$(\omega L_0 / g) \sin(\omega t - a_0 x_0) \cos a_0 x \cosh a_0 H$$

は Bottom と $a_0 x_0 + \pi$ の phase difference をもつた（後に数値を与えられる時にわかるように L_0

は後に与える数値に対して負となっている）standing wave を示す。 $\zeta^{(1)}$ の以上二つを除いた他の項は振動域に於ける disturbance を示す。

$\zeta_{(\pm)}^{(2)}$ の第一項は振動域から遠ざかる進行波を示し、第二項以下は振動域近傍の disturbances を示し、振動域を遠ざかると exponential に減衰する。また $\zeta_{(\pm)}^{(2)}$ の第一項、すなわち進行波は $\sin a_0 x_0$ の factor を含み、 $a_0 x_0 = m\pi$ ($m=1, 2, 3, \dots$) のとき $\sin a_0 x_0$ となり進行波は消える。

8. 数値的考察

数値的考察のために、著者は次の値を用いた。すなわち、Depth of water (H) = 31.2 cm; Period of Bottom Vibration (T) = 1 sec; Width of Vibrating Region ($2x_0$) = 100 cm; Amplitude of Vibrating Bottom (D_0) = 1 cm; $g = 980.5 \text{ cm/sec}^2$ 。このとき、(12) 式は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)} = & \sin \omega t \\ & - 0.67982 \sin(\omega t - 2.2662) \cos(0.045323x) \\ & - 0.004728 \sin \omega t \cdot \cosh(0.086765x) \\ & + 0(0.000001), \end{aligned} \quad (13)$$

Fig. 2. Variation of a wave height versus one cycle vibration of a bottom ($D_0 \sin \omega t$).

- ①: Wave at $t=0$, ②: Wave at $t=0.25$, ③: Wave at $t=0.33$,
④: Wave at $t=0.44$ ⑤: Wave at $t=0.50$, ⑥: Wave at $t=0.75$
⑦: Wave at $t=0.83$, ⑧: Wave at $t=0.94$

↗: Boundary point separating the vibrating and the non-vibrating region or $x=x_0$.
(Only positive side of x is shown in the above figure.)

$$\begin{aligned}
 \zeta_{(\pm)}^{(2)} = & 0.52204 \cos \{ \omega t \mp 0.045323 x_0 \} \\
 & + 0.18347 \sin \omega t \cdot e^{\mp 0.086765 (x \mp x_0)} \\
 & - 0.035082 \cdot \sin \omega t \cdot e^{\mp 0.19474 (x \mp x_0)} \\
 & + 0.01463 \cdot \sin \omega t \cdot e^{\mp 0.29775 (x \mp x_0)} \\
 & - \dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

但し、複号は同順とす。

周期 one cycle に対する振動域近傍の波高の変化は、上の (13), (14) を用いて Fig. 2 に示され

るごとく与えられる。

終りに、東大地震研の高橋教授、相田氏、羽島氏および東大理学部高野氏に、種々の議論を感謝する。

参 考 献 文

Havelock, T. H. 1929, Forced Surface-Waves on Water. Phil. Mag. Vol. VIII, 569-576.