等質等方弾性体の運動方程式の 解についての注意 (続報)

—— 数種のローティショナルな解の間の相互関係について ——

気象庁地震課 宇 佐 美 竜 夫
福岡管区気象台 狩 野 京 一
東大地震研究所 佐 藤 泰 夫

(昭和 37 年 12 月 4 日受理)

Some Remarks on the Solutions of the Equation of Motion in an Isotropic and Homogeneous Elastic Body (II)

—Relations between Various Solutions of Rotational Type—

Tatsuo USAMI

Seismological Section, J. M. A.

Kyoichi KANO

Fukuoka District Meteorological Observatory

and

Yasuo SATÔ

Earthquake Research Institute, The University of Tokyo

(Received December 4, 1962)

It is known that the equation of motion for isotropic and homogeneous elastic medium has 8 solutions having different expressions which satisfy the condition $\Delta=0$. Six of these solutions are found to be expressed by the linear combination of the other two which can be considered as the most basic ones. Some other revisions are made on the former paper (Zisin; vol. 14 (1961), pp. 18-28).

§ 1. は し が き

筆者の一人はさきに同題目の論文*〔宇佐美 (1961)〕で等質等方弾性体の球座標における運動方程式には $\varpi \neq 0$, $\Delta=0$ を満たす 8 種類のお互いに異った表現式を持つ解があり, そのうちのいくつかはお互いに独立であることをいつた. しかし更に考察を進めた結果上記 8 種の解の相互関係が明かになったので報告すると同時に前報の一部を訂正する.

* 以後この論文を第一報という.

§ 2. いろいろな形の解の間の相互関係

第一報の式には () を, 本稿のものには [] をつけて区別する. (17)~(24) は等方等質弾性体の運動方程式

$$\rho \cdot \partial^2 \mathbf{U} / \partial t^2 = (\lambda + 2\mu) \text{grad} \cdot \text{div } \mathbf{U} - \mu \text{rot} \cdot \text{rot } \mathbf{U} \quad [1]$$

を満し, かつ体積変化 (4) が零になる解で,

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \phi \quad [2]$$

を満すところの

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{kr}} H_{n+\frac{1}{2}}(kr) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \frac{\cos}{\sin} m\phi \quad [3]$$

から, 次の式によつて求められる,

$$\left. \begin{aligned} (17) &= \text{rot}(x, y, z) \phi \\ (18) &= \text{rot} \cdot \text{rot}(x, y, z) \phi \\ (19) &= \text{rot}(0, 0, 1) \phi \\ (20) &= \text{rot} \cdot \text{rot}(0, 0, 1) \phi \\ (21) &= \text{rot}(0, 1, 0) \phi \\ (22) &= \text{rot} \cdot \text{rot}(0, 1, 0) \phi \\ (23) &= \text{rot}(1, 0, 0) \phi \\ (24) &= \text{rot} \cdot \text{rot}(1, 0, 0) \phi \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

ここに (α, β, γ) はベクトルを示し, α, β, γ はその x, y, z 成分である.

(17), (18) で示される変位を次のようにベクトル形式でかくことにする. ただし [5], [6] 式ではベクトル $(\alpha', \beta', \gamma')$ の α', β', γ' は球座標の r, θ, ϕ 成分である.

$$\mathbf{U}_{mn}^{(1)} = \left(0, mZ_n \frac{P_n^m}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin}{\cos} m\phi, Z_n \frac{d}{d\theta} P_n^m \cdot \frac{\cos}{-\sin} m\phi \right) \quad [5]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{mn}^{(2)} = & \left(-n(n+1) \frac{Z_n}{kr} P_n^m \cdot \frac{\sin}{\cos} m\phi, -\frac{1}{kr} \frac{d}{dr} (rZ_n) \frac{d}{d\theta} P_n^m \cdot \frac{\sin}{\cos} m\phi, \right. \\ & \left. \frac{m}{kr} \frac{d}{dr} (rZ_n) \frac{P_n^m}{\sin \theta} \cdot \frac{-\cos}{\sin} m\phi \right) \end{aligned} \quad [6]$$

$$\text{ここに} \quad Z_n = \frac{1}{\sqrt{kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \quad [7]$$

また $P_n^m = P_n^m(\cos \theta)$ は第一種の球函数を示す.

さて (19)~(24) と [5], [6] 式との関係を求めるに際し (21)~(24) のかわりに (21)'~(24)' を使つた. (21)~(24) は (21)'~(24)' と簡単な関係にある [宇佐美 (1961)] からで

ある。複雑な計算の結果次式が求められた。

$$(19) /k = U_{mn}^{(3)} = \pm \left[\frac{m}{n(n+1)} U_{mn}^{(2)} - \frac{n-m+1}{(2n+1)(n+1)} U_{m,n+1}^{(1)} - \frac{n+m}{n(2n+1)} U_{m,n-1}^{(1)} \right] \quad [8]$$

$$(20) /k^2 = U_{mn}^{(4)} = - \frac{n-m+1}{(2n+1)(n+1)} U_{m,n+1}^{(2)} - \frac{n+m}{n(2n+1)} U_{m,n-1}^{(2)} - \frac{m}{n(n+1)} U_{m,n}^{(1)} \quad [9]$$

$$(21)' /k = U_{mn}^{(5)} = - \frac{(n+m) \cdot (n-m+1)}{n(n+1)} U_{m-1,n}^{(2)} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+1)(2n+1)} U_{m-1,n+1}^{(1)} - \frac{(n+m)(n+m-1)}{n(2n+1)} U_{m-1,n-1}^{(1)} \quad [10]$$

$$(22)' /k = U_{mn}^{(6)} = \frac{1}{n(n+1)} U_{m+1,n}^{(2)} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} U_{m+1,n+1}^{(1)} - \frac{1}{n(2n+1)} U_{m+1,n-1}^{(1)} \quad [11]$$

$$(23)' /k^2 = U_{mn}^{(7)} = - \frac{1}{(n+1)(2n+1)} U_{m+1,n+1}^{(2)} + \frac{1}{n(2n+1)} U_{m+1,n-1}^{(2)} + \frac{1}{n(n+1)} U_{m+1,n}^{(1)} \quad [12]$$

$$(24)' /k^2 = U_{mn}^{(8)} = - \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+1)(2n+1)} U_{m-1,n+1}^{(2)} + \frac{(n+m)(n+m-1)}{n(2n+1)} U_{m-1,n-1}^{(2)} - \frac{(m+n)(m-n-1)}{n(n+1)} U_{m-1,n}^{(1)} \quad [13]$$

[8] の右辺の±は、因子 $\frac{\sin}{\cos} m\phi$ および $\frac{-\cos}{\sin} m\phi$ の上をとるときは+、下をとるときは-を意味する。また [9] 式では、(20) は第一報の (20) 式の変数 ϕ を含む因子の上下を入れかえたものである。

[8]~[13] を導くにあたつて次のような Bessel 函数および球函数に関する公式 [14]~[28] を縦横に駆使した。

$$\left. \begin{aligned} Z_n / kr &= (Z_{n+1} + Z_{n-1}) / (2n+1) \\ dZ_n / d(kr) &= (n/kr) Z_n - Z_{n+1} = Z_{n-1} - ((n+1)/kr) Z_n \\ &= (nZ_{n-1} - (n+1)Z_{n+1}) / (2n+1) \end{aligned} \right\} \quad [14]$$

$$P_n^m \cdot \cos \theta = [(n-m+1)P_{n+1}^m + (n+m)P_{n-1}^m] / (2n+1) \quad [15]$$

$$\left. \begin{aligned} dP_n^m / d\theta &= (n-m+1)P_{n+1}^m / \sin \theta - (n+1) \cot \theta \cdot P_n^m \\ &= n \cot \theta \cdot P_n^m - (n+m)P_{n-1}^m / \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad [16]$$

$$= [n(n-m+1)P_{n+1}^m - (n+1)(n+m)P_{n-1}^m]/[(2n+1)\sin\theta] \quad [17]$$

[17] は [16] の 2 式から P_n^m を消去して得られる. 更に

$$\left. \begin{aligned} P_n^{m+1} &= m \cot \theta \cdot P_n^m - dP_n^m/d\theta \\ (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1} &= dP_n^m/d\theta + m \cot \theta \cdot P_n^m \end{aligned} \right\} \quad [18]$$

$$\begin{aligned} \sin \theta \cdot P_n^m &= (n+m-1)P_{n-1}^{m-1} - (n-m+1)\cos \theta \cdot P_n^{m-1} \\ &= [-(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1} + (n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}]/(2n+1) \end{aligned} \quad [19]$$

[19] を得るのに [15] を使った.

また

$$dP_{n+1}^{m-1}/d\theta = (m-1)\cot \theta \cdot P_{n+1}^{m-1} - P_{n+1}^m$$

[18] の第 2 式と [16] の第 1 式を使うと

$$\begin{aligned} &= [\sin \theta \cdot dP_n^m/d\theta \cdot (m-n-2 + (m-1)\cot^2 \theta) + \cos \theta \cdot P_n^m \cdot \{(n+1)(n-m+2) \\ &\quad - (m-1)(n+1-m/\sin^2 \theta)\}]/[(n-m+1)(n-m+2)] \quad [20] \\ dP_{n-1}^{m-1}/d\theta &= (m-1)\cot \theta \cdot P_{n-1}^{m-1} - P_{n-1}^m \end{aligned}$$

[18] の第 2 式と [16] の第 2 式を使うと

$$\begin{aligned} &= \left[\sin \theta \cdot dP_n^m/d\theta \cdot (n+m-1 + (m-1)\cot^2 \theta) \right. \\ &\quad \left. + \cos \theta \cdot P_n^m \cdot \left(-n(n+m-1) + (m-1)\left(n + \frac{m}{\sin^2 \theta}\right) \right) \right]/[(n+m)(n+m-1)] \quad [21] \end{aligned}$$

$$dP_{n+1}^{m+1}/d\theta = -(m+1)\cot \theta \cdot P_{n+1}^{m+1} + (n+m+2)(n-m+1)P_{n+1}^m$$

[18] の第 1 式と [16] の第 2 式を使うと

$$\begin{aligned} &= \sin \theta \cdot dP_n^m/d\theta \cdot (n+m+2 + (m+1)\cot^2 \theta) \\ &\quad + \cos \theta \cdot P_n^m \cdot \{(n+1)(n+m+2) - (m+1)(n+1+m/\sin^2 \theta)\} \quad [22] \end{aligned}$$

$$dP_{n-1}^{m+1}/d\theta = -(m+1)\cot \theta \cdot P_{n-1}^{m+1} + (n+m)(n-m-1)P_{n-1}^m$$

[18] の第 1 式と [16] の第 2 式を使うと

$$\begin{aligned} &= \sin \theta \cdot dP_n^m/d\theta \cdot (-n+m+1 + (m+1)\cot^2 \theta) \\ &\quad + \cos \theta \cdot P_n^m \cdot \{(n-m-1) + (m+1)(n-m/\sin^2 \theta)\} \quad [23] \end{aligned}$$

以上の外に次の式も使う

$$(n+m)\sin \theta \cdot P_n^{m-1} = P_{n+1}^m - \cos \theta \cdot P_n^m \quad [24]$$

$$\begin{aligned} P_n^m &= \frac{P_{n+1}^{m+1} - \cos \theta \cdot P_n^{m+1}}{(n+m+1)\sin \theta} = \frac{P_{n+1}^{m+1} - \{(n-m)P_{n+1}^{m+1} + (n+m+1)P_{n-1}^{m+1}\}/(2n+1)}{(n+m+1)\sin \theta} \\ &= \frac{P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1}}{(2n+1)\sin \theta} \quad [25] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dP_n^m/d\theta &= (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1} - m \cot \theta \cdot P_n^m \\
&= (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1} - m \cot \theta \cdot ((m-1) \cot \theta \cdot P_n^{m-1} - dP_n^{m-1}/d\theta) \\
&= m \cot \theta \cdot dP_n^{m-1}/d\theta + \{(n+m)(n-m+1) - m(m-1) \cot^2 \theta\} P_n^{m-1} \quad [26]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta \cdot dP_n^m/d\theta &= m \cot \theta \cdot \cos \theta \cdot P_n^m - \cos \theta \cdot P_n^{m+1} \\
&= \frac{m \cot^2 \theta}{n+m+1} (P_{n+1}^{m+1} - \cos \theta \cdot P_n^{m+1}) - \cos \theta \cdot P_n^{m+1} \\
&= \frac{m \cot^2 \theta}{n+m+1} P_{n+1}^{m+1} - \left(1 + \frac{m \cot^2 \theta}{n+m+1}\right) \frac{(n-m)P_{n+1}^{m+1} + (n+m+1)P_{n-1}^{m+1}}{2n+1} \\
&= -\frac{n+m+1+m \cot^2 \theta}{2n+1} \cdot P_{n-1}^{m+1} + \frac{m \cot^2 \theta - n+m}{2n+1} P_{n+1}^{m+1} \quad [27]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \theta \cdot dP_n^m/d\theta &= \cos \theta \cdot \{(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1} - m \cot \theta \cdot P_n^m\} \\
&= \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n+m+m \cot^2 \theta)}{2n+1} P_{n+1}^{m-1} \\
&\quad + \frac{(n+m)(n+m-1)(n-m+1-m \cot^2 \theta)}{2n+1} P_{n-1}^{m-1} \quad [28]
\end{aligned}$$

さて [8]~[13] を求めるには $\mathbf{U}^{(1)}$ の u 成分が零であるから、まず u 成分を使つて $\mathbf{U}^{(3)} \sim \mathbf{U}^{(8)}$ と $\mathbf{U}^{(2)}$ の関係を求め、ついで $\mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(5)}, \mathbf{U}^{(7)}$ では v 成分を、 $\mathbf{U}^{(4)}, \mathbf{U}^{(6)}, \mathbf{U}^{(8)}$ では w 成分をつかつて $\mathbf{U}^{(1)}$ との関係を求めるとよい。

たとえば [8] 式は次のようにして求められた。まず u 成分をとると容易に

$${}_u \mathbf{U}_{mn}^{(3)} = -\frac{m}{kr} Z_n P_n^m \cdot \frac{\sin m\phi}{\cos m\phi} = \pm \frac{m}{n(n+1)} {}_u \mathbf{U}_{mn}^{(2)} \quad [29]$$

したがつて v 成分は

$${}_v \mathbf{U}_{mn}^{(3)} \mp \frac{m}{n(n+1)} {}_v \mathbf{U}_{mn}^{(2)} = \left(-\frac{m}{kr} Z_n P_n^m \cdot \cot \theta + \frac{m}{n(n+1)} \left(\frac{Z_n}{kr} + \dot{Z}_n \right) P_n^{m'} \right) \frac{\sin m\phi}{\cos m\phi}$$

[14], [15], [17] を使うと

$$\begin{aligned}
&= \left\{ -\frac{m(Z_{n+1} + Z_{n-1})}{2n+1} \cdot \frac{(n-m+1)P_{n+1}^m + (n+m)P_{n-1}^m}{(2n+1) \cdot \sin \theta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{n(n+1)} \cdot \frac{(n+1)Z_{n-1} - nZ_{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{n(n-m+1)P_{n+1}^m - (n+1)(n+m)P_{n-1}^m}{(2n+1) \cdot \sin \theta} \right\} \frac{\sin m\phi}{\cos m\phi} \\
&= \frac{m}{(2n+1)^2} \left\{ -\frac{(n-m+1)(2n+1)}{n+1} \frac{P_{n+1}^m}{\sin \theta} Z_{n+1} - \frac{(n+m)(2n+1)}{n} \frac{P_{n-1}^m}{\sin \theta} Z_{n-1} \right\} \frac{\sin m\phi}{\cos m\phi} \\
&= \mp \left\{ \frac{n-m+1}{(2n+1)(n+1)} {}_v \mathbf{U}_{m,n+1}^{(1)} + \frac{n+m}{n(2n+1)} {}_v \mathbf{U}_{m,n-1}^{(1)} \right\} \quad [30]
\end{aligned}$$

w 成分については、

$$\pm \left\{ \frac{m}{n(n+1)} {}_w \mathbf{U}_{mn}^{(2)} - \frac{n-m+1}{(2n+1)(n+1)} {}_w \mathbf{U}_{m,n+1}^{(1)} - \frac{n+m}{n(2n+1)} {}_w \mathbf{U}_{m,n-1}^{(1)} \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{m^2}{n(n+1)} \left(\frac{Z_n}{kr} + \dot{Z}_n \right) \frac{P_n^m}{\sin \theta} - \frac{n-m+1}{(2n+1)(n+1)} Z_{n+1} \cdot P_{n+1}^{m'} - \frac{n+m}{n(2n+1)} Z_{n-1} \cdot P_{n-1}^{m'} \right\} \cos m\phi \quad [31]$$

を計算する.

[14], [16] を使うと

$$\begin{aligned} &= \left\{ -\frac{m^2}{n(n+1)} \left(\frac{Z_n}{kr} + \dot{Z}_n \right) \frac{P_n^m}{\sin \theta} \right. \\ &\quad - \frac{n-m+1}{(2n+1)(n+1)} \left(\frac{n}{kr} Z_n - \dot{Z}_n \right) \left((n+1) \cot \theta \cdot P_{n+1}^m - (n+m+1) \frac{P_n^m}{\sin \theta} \right) \\ &\quad \left. - \frac{n+m}{n(2n+1)} \left(\dot{Z}_n + \frac{n+1}{kr} Z_n \right) \left((n-m) \frac{P_n^m}{\sin \theta} - n \cot \theta \cdot P_{n-1}^m \right) \right\} \cos m\phi \\ &= \left\{ -\frac{P_n^m}{\sin \theta} \cdot \dot{Z}_n + \dot{Z}_n \left(\frac{n-m+1}{2n+1} P_{n+1}^m + \frac{n+m}{2n+1} P_{n-1}^m \right) \cot \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{Z_n}{kr} \left(-\frac{n(n-m+1)}{2n+1} P_{n+1}^m + \frac{(n+m)(n+1)}{2n+1} P_{n-1}^m \right) \cot \theta \right\} \cos m\phi \end{aligned}$$

[15], [17] から

$$\begin{aligned} &= \left\{ -\dot{Z}_n \cdot \frac{P_n^m}{\sin \theta} + \dot{Z}_n \cdot P_n^m \cdot \cos \theta \cdot \cot \theta - \frac{Z_n}{kr} P_n^{m'} \cdot \sin \theta \cdot \cot \theta \right\} \cos m\phi \\ &= \left\{ -\dot{Z}_n \cdot P_n^m \cdot \sin \theta - \frac{Z_n}{kr} P_n^{m'} \cdot \cos \theta \right\} \cos m\phi = {}^u U_{mn}^{(3)} \quad [32] \end{aligned}$$

これで [8] が証明された. ここに

$$\dot{Z}_n = \frac{d}{d(kr)} Z_n(kr), \quad P_n^{m'} = \frac{d}{d\theta} P_n^m \quad [33]$$

を意味する.

次に [13] 式を求めてみる. まず u 成分から

$$\begin{aligned} {}^u U_{mn}^{(8)} &= \left\{ \left(\frac{Z_n}{k^2 r^2} - \frac{\dot{Z}_n}{kr} \right) \left(\frac{m P_n^m}{\sin \theta} + \cos \theta \cdot P_n^{m'} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2\dot{Z}_n}{kr} - n(n+1) \frac{Z_n}{k^2 r^2} \right) \cdot P_n^m \cdot \sin \theta \right\} \frac{\sin m-1 \phi}{\cos m-1 \phi} \quad [34] \end{aligned}$$

[14] および [18] の第1式と [15], [17] から得られる [35] 式

$$\begin{aligned} P_n^m &= (m-1) \cot \theta \cdot P_{n-1}^{m-1} - P_n^{m-1'} \\ &= (m-1) \cot \theta \cdot \frac{(n-m+2) P_{n+1}^{m-1} + (n+m-1) P_{n-1}^{m-1}}{(2n+1) \cos \theta} \\ &\quad - \frac{n(n-m+2) P_{n+1}^{m-1} - (n+1)(n+m-1) P_{n-1}^{m-1}}{(2n+1) \sin \theta} \end{aligned}$$

$$= \{-(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1} + (n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}\} / [(2n+1) \cdot \sin \theta] \quad [35]$$

それに [28], [19] 式を使えば [34] は

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2n+1)} \left\{ (n+2)(n-m+1)(n-m+2) \frac{Z_{n+1}}{kr} P_{n+1}^{m-1} \right. \\ &\quad \left. - (n-1)(n+m)(n+m-1) \frac{Z_{n-1}}{kr} P_{n-1}^{m-1} \right\} \frac{\sin \overline{m-1} \phi}{\cos \overline{m-1} \phi} \\ &= -\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+1)(2n+1)} {}^u U_{m-1, n+1}^{(2)} + \frac{(n+m)(n+m-1)}{n(2n+1)} {}^u U_{m-1, n-1}^{(2)} \quad [36] \end{aligned}$$

したがって, w 成分は

$$\begin{aligned} &{}^w U_{mn}^{(8)} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+1)(2n+1)} {}^w U_{m-1, n+1}^{(2)} - \frac{(n+m)(n+m-1)}{n(2n+1)} {}^w U_{m-1, n-1}^{(2)} \\ &= \left\{ -(m-1) \left(\frac{\dot{Z}_n}{kr} P_n^m + \frac{Z_n}{k^2 r^2} P_n^{m'} \cdot \cot \theta \right) + Z_n \cdot P_n^m \left(1 - \frac{m(m-1)}{k^2 r^2 \sin^2 \theta} \right) \right. \\ &\quad - \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+1)(2n+1)} (m-1) \left(\frac{Z_{n+1}}{kr} + \dot{Z}_{n+1} \right) \frac{P_{n+1}^{m-1}}{\sin \theta} \\ &\quad \left. + \frac{(n+m)(n+m-1)}{n(2n+1)} (m-1) \left(\frac{Z_{n-1}}{kr} + \dot{Z}_{n-1} \right) \frac{P_{n-1}^{m-1}}{\sin \theta} \right\} - \frac{\cos \overline{m-1} \phi}{\sin \overline{m-1} \phi} \end{aligned}$$

ここで [14], [18] の第一式, [26], [16] の第 1, 第 2 式を使つて, 上式中の Bessel および Legendre 函数を, Z_n, P_n^{m-1} およびその微係数で表わすと, 次の項以外は係数が零になり

$$= \frac{(m+n)(m-n-1)}{n(n+1)} Z_n \cdot P_n^{m-1'} \cdot \frac{\cos \overline{m-1} \phi}{\sin \overline{m-1} \phi} = \frac{(m+n)(m-n-1)}{n(n+1)} {}^w U_{m-1, n}^{(1)} \quad [37]$$

を得る. 最後に v 成分を考える.

$$\begin{aligned} &{}^v U_{mn}^{(8)} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+1)(2n+1)} {}^v U_{m-1, n+1}^{(2)} - \frac{(n+m)(n+m-1)}{n(2n+1)} {}^v U_{m-1, n-1}^{(2)} \\ &\quad - \frac{(n+m)(m-n-1)}{n(n+1)} {}^v U_{m-1, n}^{(1)} \\ &= \left\{ -\frac{\dot{Z}_n}{kr} (P_n^{m'} \cdot \sin \theta + P_n^m \cdot \cos \theta) - (m-1) \frac{Z_n}{k^2 r^2} \left(m \frac{\cot \theta}{\sin \theta} \cdot P_n^m + \frac{P_n^{m'}}{\sin \theta} \right) \right. \\ &\quad - \left(1 - \frac{n(n+1)}{k^2 r^2} \right) Z_n P_n^m \cdot \cos \theta - \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{(n+1)(2n+1)} \left(\frac{Z_{n+1}}{kr} + \dot{Z}_{n+1} \right) P_{n+1}^{m-1'} \\ &\quad + \frac{(n+m)(n+m-1)}{n(2n+1)} \left(\frac{Z_{n-1}}{kr} + \dot{Z}_{n-1} \right) P_{n-1}^{m-1'} \\ &\quad \left. - \frac{(m-1)(n+m)(m-n-1)}{n(n+1)} Z_n \frac{P_n^{m-1}}{\sin \theta} \right\} \frac{\sin \overline{m-1} \phi}{\cos \overline{m-1} \phi} \end{aligned}$$

[14], [20], [21], [18] の第 2 式をつかつて, この式の Bessel および Legendre 函数を Z_n, P_n^m およびその微係数に変換すると容易に零となることが分る.

これで〔13〕が証せられた。その他の〔9〕～〔12〕式も同じようにして証明せられる。

§ 3. 最も基本的な解

〔18〕～〔13〕式により (19)～(24) が〔5〕,〔6〕式 (第一報の (17), (18)) の一次式で表わされることが分つた。第一報で (17)～(20) の $r = \infty$ での減少の仕方が異なるから、これらはお互いに独立であるといつたのは誤りで、(19), (20) は (17), (18) の一次式で、たまたま、ある成分では $r = \infty$ で $1/r$ のオーダーで減少する項が相殺され零になるのを見落したからである。したがって

お互いに独立な解は (17), (18) の二つだけになる。

この事から〔3〕を〔4〕に代入して形式的に得られる $\varpi \neq 0, \Delta = 0$ を満す解 (17)～(24) のうちで、(17), (18) を最も基本的な解とみて差支えないと思われる。このことは (17), (18) が上記 (17)～(24) の 8 つの解のうち最も表現が簡単であり、 $r = \infty$ における各成分の減少の仕方が最も遅いことからいえる。

われわれは次数 m がある定つた値 m_0 をとるような場合を問題にすることがよくある。〔3〕,〔4〕式から分るように (17)～(24) は同じ m_0 をもつ ϕ から求められる解であるが、(21)～(24) は次数が $m_0 + 1$, および $m_0 - 1$ の最も基本的な解 (17), (18) の一次式で示されるということに注意する必要がある。

〔4〕式から分るように (21), (22) は y 軸方向に向いたベクトル ϕ から、(23), (24) は x 軸方向のベクトル ϕ から導かれる。また後者は軸を中心に 90° 回転すれば前者になるから (21) と (23), (22) と (24) は同じ筈である。このことは (21), (22) の ϕ を $\phi + \frac{\pi}{2}$ とすれば (23), (24) になることから分る。

§ 4. 第一報の訂正

第一報の § 5 と § 6 の二節を削除する。

§ 5. 結 論

第一報で等方等質弾性体の運動方程式の $\varpi \neq 0, \Delta = 0$ を満足する解として示した (17)～(24) のうち、後の方 (19)～(24) は (17), (18) の一次結合で表わされることがわかつた。したがって (17), (18) を $\varpi \neq 0, \Delta = 0$ を満す基本的な解と考えてよいと思われる。

第 1 報で求め、また本稿で論じた 8 個の解 ((17)～(24);〔4〕) は

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } a) = \mu \text{rot} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot } a \quad [38]$$

を満足するベクトル α から

$${}_1U = \text{rot } \alpha, \quad {}_2U = \text{rot} \cdot \text{rot } \alpha \quad [39]$$

によつて求められたものである。したがつて [38] を満すベクトルの個数に応じて多種類の ${}_1U, {}_2U$ の表現がえられることになる。われわれは、その中の 2 個が独立であることを本稿で示したが、なお、この他にも [38] を満す独立なベクトル α があるのか、あるとすれば、それはいくつか、またそれから求められる変位 ${}_1U, {}_2U$ は (17), (18); [5], [6] とどのような関係にあるのかという問題は未解決のように思われる。御教示をいただければ幸である。

参 考 文 献

宇佐美竜夫 1961. 等質等方弾性体の運動方程式の解についての注意, 地震 2, 14, 18.

第 一 報 の 正 誤 表

頁	行または式	誤	正
22	(18) の w 成分	$\frac{\sin}{-\cos} m\phi$	$\frac{\sin}{-\cos} m\phi$
"	(21) の w 成分	$-\frac{Z}{r} P' \sin \theta$	$-\frac{Z}{r} P' \sin \theta$
"	(20) の v 成分 3 行目	$P \sin \theta -$	$\cdot P \sin \theta -$
"	(22) の u 成分 2 行目	$-m(m+1) \frac{Z}{r^2}$	$-n(n+1) \frac{Z}{r^2}$
23	(23)' の u 成分 1 行目	$\frac{\sin \theta}{mP}$	$\frac{mP}{\sin \theta}$
24	1 行目	1 行目を全部 25 頁の 1 行目と 2 行目の間に入れる	
24	下から 11 行目	J. A. Stratton	J. A. Stratton
27	" 8 行目	御数示	御教示
28	" 3 行目	Stratton, J. A.	Stratton, J. A.