非均質流体中をつたわる分散波の特性を 計算するプログラム

東京大学理学部地球物理学教室 竹内 均・斎藤正徳
中 央 大 学 工 学 部 小 林 直 太
(昭和 37 年 12 月 28 日受理)

A Computer Program to Calculate Sound Wave Dispersion Characteristics in Vertically Heterogeneous Liquid Media

Hitoshi TAKEUCHI, Masanori SAITO
Geophysical Institute, Faculty of Science, Tokyo University
Naota KOBAYASHI
Faculty of Technology, Chūō University
(Received December 28, 1962)

A computer program was made by which we can calculate sound wave dispersion characteristics in vertically heterogeneous liquid media. By this program, group velocity U is calculated without numerical differentiations. An example given by Pekeris is worked out in detail. Phase and group velocities thus obtained are shown in Table 1. Corresponding vertical particle velocity and pressure perturbation are shown in Fig. 1 and 2.

§ 1

密度 ρ や体積弾性率 λ が深さの函数としてかわつている流体中をつたわる表面波の問題は最初 Pekeris (1948) によつて論ぜられた。この研究は最近の活発な表面波研究のさきがけとなつたものである。われわれはさきに、この種の問題を統一的に電子計算機用にプログラムすることをこころみた (竹内その他, 1961)。以下は上記の問題をこの一般プログラムのわく内で処理しようとしてわれわれがおこなつたことの報告である。今後この種の問題を研究する人の役にたてば幸いである。下記のうち、数値微分によらず数値積分によつて群速度 U を求める部分は、もう 1 つのわれわれの論文 (竹内その他, 1962) の応用であり、新しい工夫だと思う。

§ 2

水平方向に x 軸を、鉛直上方にむけて z 軸をとり、各量が $e^{ikH(x-ct)}$ に比例すると仮定すると、運動方程式 $\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{grad}(\lambda \mathcal{A})$ はつぎのようになる。

$$-\rho(kHC)^2 u = ikH(\lambda \Delta), \quad -\rho(kHC)^2 w = \frac{d}{dz}(\lambda \Delta). \quad (2.1)$$

ただし

$$\Delta = ikHu + \frac{dw}{dz} \quad (2.2)$$

で、 $\lambda \Delta$ は圧力変動、 k は波数、 C は位相速度、 $\vec{u}, u, w$ は速度ベクトル、 x, z 方向の速度、 H は系の代表的な長さで、 x, z はこれを単位としている。われわれの方法(上記1961)では、 ρ, λ の不連続面があつてもそこで連続となるような量を従属変数 y としてきた。ここでもその方針にしたがつて

$$y_1 = iu, \quad y_3 = w, \quad y_4 = \lambda \Delta \quad (2.3)$$

としよう。これを用いると、(2.1), (2.2) はつぎのようになる。

$$\rho C^2 k H y_1 = y_4 \quad (2.4)$$

$$\dot{y}_3 = \widehat{33} y_3 + \widehat{34} y_4, \quad \dot{y}_4 = \widehat{43} y_3 + \widehat{44} y_4, \quad \widehat{33} = \widehat{44} = 0, \quad \widehat{34} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\rho C^2}, \quad \widehat{43} = -\rho C^2 (kH)^2 \quad (2.5)$$

ただし $\dot{}$ は z についての微分を示す。(2.5) はさきにのべた一般プログラムむきの形をしている。式中にデータ ρ, λ の z についての微分をふくまないこともさきと同じである。境界条件は、 ρ, λ の不連続面で y_3, y_4 が連続となること、自由表面で $y_4 = 0$ となることである。

微分方程式(2.5) および境界条件と同等な変分式を求めるには、(2.1) の第1, 2式にそれぞれ $-u, w$ をかけ、辺々くわえて z の全領域で積分すればよい。求める変分式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} (C \cdot kH)^2 I_1 - (kH)^2 I_2 - kH I_3 - I_4 &= 0, \\ I_1 &= \int \rho (y_1^2 + y_3^2) dz, \quad I_2 = \int \lambda y_1^2 dz, \\ I_3 &= 2 \int \lambda y_1 \dot{y}_3 dz, \quad I_4 = \int \lambda \dot{y}_3^2 dz \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

ただし $\dot{y}_3$ は(2.5)を、 y_1 は(2.6)を用いて計算するものとする。群速度

$$U = \frac{d(C \cdot kH)}{d(kH)} \quad (2.7)$$

を求めるには、(2.6)を kH で微分すればよい。変分法の原理により、このとき y の kH による変化を考えなくてよい。結果は

$$2(C \cdot kH) U I_1 - 2kH I_2 - I_3 = 0 \quad (2.8)$$

となる。 kH に対して固有値 C がきまれば、これに対するモード y_3, y_4 も求められる。した

がつて (2.8) を用いれば, 数値積分によつて容易に群速度 U が求められる.

問題によつては, ある深さ以下で ρ, λ が一定, すなわち均質と考えるとつごうのよいことがある. このときの解は (2.5) から

$$\ddot{y}_4 = -\rho(C \cdot kH)^2 \dot{y}_3 = (kH)^2 \left(1 - \frac{\rho C^2}{\lambda}\right) y_4$$

となり

$$y_4 = Ae^{\alpha H z}, \quad y_3 = -\frac{A\alpha H}{\rho(C \cdot kH)^2} e^{\alpha H z}, \quad \alpha H = kH \sqrt{1 - \frac{\rho C^2}{\lambda}} \quad (2.9)$$

と求められる. ただし A は未定定数で, $z = -\infty$ で y_3, y_4 が有限になるように, $\exp$ は $+\alpha H z$ をとつた. 均質層と非均質層の境をかりに $z=0$ にとり, 前者が $z \leq 0$ に後者が $z \geq 0$ にあるとしよう. このとき $z \leq 0$ では, 解は (2.9) となる. y の連続性を用いれば, $z=0$ では未定定数を略して $y_3 = -\frac{\alpha H}{\rho(C \cdot kH)^2}$, $y_4 = 1$ となる. これを出発値として (2.5) を積分すれば, $z \geq 0$ すなわち非均質層における解が求められる. (2.6) 中の I_1, I_2, I_3, I_4 への (2.9) の寄与を求めることも容易である.

§ 3

じつさいの計算を Pekeris の論文にある実例についておこなつた. これは均質な半無限層の上に厚さ H の均質な表面層をおいた場合の計算である. 上層, 下層での ρ, λ および音波速度 V にそれぞれ添字 1, 2 をつけると

$$\rho_2 = 2\rho_1, \quad V_2 = 1.5V_1, \quad \lambda_2 = 4.5\lambda_1 \quad (3.1)$$

になる. 上のプログラムを用い各 kH に対してえられた $\frac{C}{V_1}$, $\frac{U}{V_1}$ の値を第 1 表に示してあ

Fig. 1

Fig. 2

る. Pekeris の論文では横軸に

$$\frac{Hf}{V_1} = \frac{Hf}{C} \cdot \frac{C}{V_1} = \frac{kH}{2\pi} \cdot \frac{C}{V_1} \quad (3.2)$$

をとつてあるので, その値も計算し結果を第1表に示してある. (3.2)中の f は frequency を示している.

Table 1

kH	$\frac{C}{V_1}$	$\frac{U}{V_1}$	$\frac{Hf}{V_1}$
1.500	1.482	1.0787	0.3539
1.750	1.410	0.9287	0.3928
2.000	1.348	0.9036	0.4292
2.493	1.260	0.9037	0.5000
2.500	1.259	0.9037	0.5010
3.000	1.201	0.9151	0.5734
4.000	1.132	0.9361	0.7209
6.000	1.072	0.9602	1.023
8.000	1.045	0.9724	1.331
10.00	1.032	0.9795	1.642
12.20	1.023	0.9844	1.986

第1表の結果を Pekeris のそれとくらべると両者はよく一致している. これはわれわれのプログラム, とくに群速度の公式 (2.6) - (2.8) が有効に働いたことを示している. 第1, 2図に y_3, y_4 の深さに対する分布を示した. 縦軸は深さで, 図の最上方が表面に, 最下方が表層の下底に対応している. 図中の曲線に対応する kH 値をそえてある. 図には下層における y_3 ,

y_4 分布を与えてないが、それはただ (2.9) にしたがって深さとともに指数函数的にへつていくだけのものである。

文 献

Pekeris, C. L. 1948, Theory of Propagation of Explosive Sound in Shallow Water. Geol. Soc. Amer. Mem. **27**,

竹内均, 斎藤正徳, 小林直太 1961, 非均質弾性球の振動問題その他を計算するためのプログラム. 地震 **2**, **14**, 217-226.

Takeuchi, H., M. Saito, and N. Kobayashi 1962, Study of Shear Velocity Distribution in the Mantle by Mantle Rayleigh and Love Waves. J. Geophys. Res., **67**, 2831-2839.