分散性表面波の減衰の定数(Q)

東京大学理学部地球物理学教室 平 沢 朋 郎

佐 藤 良 輔

(昭和 38 年 2 月 7 日受理)

The Specific Dissipation Factor (Q) for Dispersive Surface Waves.

Tomowo HIRASAWA and Ryosuke SATO

Geophysical Institute, Faculty of Science, the University of Tokyo

(Received February 7, 1963)

Recently, measurements of the specific dissipation factor, Q , have been made not only for body waves, but also for surface waves, according to developments of observational techniques. For instance, Y. SATO (1958) studied G -waves by means of Fourier analysis and found that Q for G -waves depends on frequency. The velocity of surface waves generally depends upon frequency and structures of the medium under consideration. Therefore, even if Q for body waves is independent of frequency, it is natural to consider that Q for surface waves depends not only on frequency and velocity distribution but also on distribution of Q for body waves in the medium.

In this paper, assuming that Q for body waves is independent of frequency and using the equation of motion in low loss medium proposed by L. KNOPOFF (1956), the apparent frequency dependence of Q for surface waves is investigated in the following two cases.

First, the frequency dependence of Q for Love waves (Q_L) in a layered medium, in which Q 's for shear waves are Q_1 in the layer and Q_2 in the substratum, respectively, is investigated. In this case, it is, as was expected, found that Q_L varies with period even when Q for body waves is constant throughout the medium ($Q_1 = Q_2$). Q_L generally tends to Q_1 and Q_2 as the period of Love waves tend to zero and infinity, respectively, as well as the velocity of Love waves tends to shear velocities in the layer and the substratum for both limits of periods. When Q_2 is larger than Q_1 , and even when Q_2 is, strictly speaking, a little smaller than Q_1 , Q_L has a minimum value for a certain period which tends to zero as the ratio of Q_2 to Q_1 becomes very large.

Second, the frequency dependence of Q_L or Q_R (for Rayleigh waves) in a semi-infinite medium, in which the velocity of body waves and Q for body waves vary linearly with depth, is studied by using the variational methods. It is shown that the longer the period is, the smaller Q_L or Q_R is even when Q for body waves does not vary with depth.

§ 1. 序 論

近年観測技術の発達に伴ない、減衰の1つの measure である Q の測定が、実体波、表面波共に数多くなされるようになった。とりわけ、Y. SATO (1958) が G -wave の Fourier 解

析により、1つの地震から、いくつかの異なる周期に対する Q の観測結果を提出して以来、同様の試みが、表面波 (Báth and Arroyo, 1962), あるいは地球の自由振動 (Benioff, Press and Smith, 1961; Ness, Harrison and Slichter, 1961; Alsop, Sutton and Ewing, 1961) に対して行なわれるようになった。

室内実験と合わせて、 Q が周波数に関係しないという考えが一部に信じられている (たとえば Knopoff and MacDonald, 1958) 一方、たとえば Lomnitz (1962) のように、一般には Q は周波数の複雑な函数であるが、ある周波数範囲では近似的に周波数に比例するという考えもある。

ここで問題になるのは、表面波の Q の周波数依存性が実体波に対するようにそのまま媒質の Q の周波数依存性であると考えてよいかということである。一般に媒質が異なれば、同じ周波数に対しても異なる Q の値を示すのは当然である。深さによつて著しく温度、圧力が変化しているような地球内部で、 Q の値が深さによらないとは考え難い。仮りに、 Q が周波数には関係しないとしても、深さによつてその値が異なる場合には、表面波の位相速度、群速度が周波数に関係するのと全く同じように、表面波の観測から得られる Q に、見かけの周波数依存性が現われるのは当然考えられることである。実体波の Q 、すなわち媒質の Q が周波数に関係しないと仮定したとき、表面波の Q が見かけ上どんな周波数依存性を示すかを知ることが非常に重要である。

ここでは、 Q が周波数に関係しないという仮定のもとに Knopoff (1956) が導いた low loss medium における運動方程式を用いて、1層構造の Love 波、および、弾性定数が深さの1次函数である場合の Love 波、および Rayleigh 波の Q の見かけの周波数依存性を、適当な仮定のもとに計算する。

§ 2. 1層構造における Love 波の Q_L

low loss medium における運動方程式は、Knopoff (1956) によれば、

$$(\lambda + 2\mu) \left\{ 1 + \frac{1}{|\omega| Q_p} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \nabla^2 \vec{U} - \mu \left\{ 1 + \frac{1}{|\omega| Q_s} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \text{rot rot } \vec{U} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

と書くことができる。ここで $\vec{U}$ は変位ベクトル、 ρ , λ , μ は弾性定数、 Q_p , Q_s は P 波、S 波に対してそれぞれ働くと考えられる減衰をもたらす dimension のない定数である。

さて直角座標系 (x, y, z) において、自由表面を $z = -H$ 、上層と下の媒質との境界面を $z = 0$ 、鉛直下向きに z 軸をとり、 x 方向に伝播する Love 波を考えることにすれば、(1) 式より

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \left\{ 1 + \frac{1}{|\omega| Q_1} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \nabla^2 v_1 &= \rho_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \\ \mu_2 \left\{ 1 + \frac{1}{|\omega| Q_2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \nabla^2 v_2 &= \rho_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

v は y -方向の変位, $Q_{1,2}$ は S 波に対する減衰をもたらす定数, suffix 1, 2 はそれぞれ上層および下の媒質中の各量を示す.

ここで解の形を次のようにおく.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= (A e^{i\zeta \gamma_1 z} + B e^{-i\zeta \gamma_1 z}) e^{-\zeta x + i\omega t}, \\ v_2 &= C e^{-i\zeta \gamma_2 z - \zeta x + i\omega t}, \\ \zeta &= \alpha + i\beta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし, A, B, C は任意定数である.

今, $\omega \geq 0$ の場合を考えることにすると, (3) 式が (2) 式を満足するためには次の関係が必要である.

$$\left. \begin{aligned} \zeta^2 \gamma_1^2 &= \zeta^2 + \frac{\omega^2}{V_1^2} \left(1 + \frac{i}{Q_1} \right)^{-1}, \\ \zeta^2 \gamma_2^2 &= \zeta^2 + \frac{\omega^2}{V_2^2} \left(1 + \frac{i}{Q_2} \right)^{-1}, \\ V_1^2 &= \mu_1 / \rho_1, \quad V_2^2 = \mu_2 / \rho_2, \quad \frac{V_2}{V_1} > 1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また, low loss medium における定義から, Love 波の位相速度 c , Love 波の減衰を表わす量 Q_L^{-1} を次のように表わすことができる.

$$\left. \begin{aligned} c &= \omega / \beta, \\ \frac{1}{Q_L} &= 2c \cdot \frac{\alpha}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

境界条件;

$$z = -H \quad \text{で} \quad \text{stress}, \quad p_{zy} = 0$$

$$z = 0 \quad \text{で} \quad \text{stress}, \quad p_{zy} \quad \text{と変位}, \quad v \quad \text{が連続},$$

を考慮すれば, 完全弾性体の場合と全く同様に, 今考えている low loss medium における Love 波の特性式は次のように得られる.

$$\left. \tan(\zeta \gamma_1 H) = \frac{i\zeta \gamma_2 H \cdot \mu_2 \left\{1 + \frac{i}{Q_2}\right\}}{\zeta \gamma_1 H \cdot \mu_1 \left\{1 + \frac{i}{Q_1}\right\}} \right\} \quad (6)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \zeta \gamma_1 H &\equiv \xi_1 + i\eta_1, \\ i\zeta \gamma_2 H &\equiv \xi_2 + i\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおく. $z \rightarrow \infty$ で v が収束するためには $\xi_2 \geq 0$ でなければならない. また (3) の第 1 式より, ξ_1 の符号は任意であるから, $\xi_1 \geq 0$ と仮定しても差し支えない. すなわち,

$$\xi_1 \geq 0, \quad \xi_2 \geq 0. \quad (8)$$

さらに,

$$\left. \begin{aligned} \tan \xi_1 &\equiv X, & \tanh \eta_1 &\equiv Y, \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{Q_1 Q_2}}{1 + \frac{1}{Q_2^2}} &\equiv \sigma, & \frac{1}{Q_1} \cdot \frac{1 - \frac{Q_1}{Q_2}}{1 + \frac{1}{Q_1 \cdot Q_2}} &\equiv \delta, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

とおいて, (6) 式の実部と虚部から次の式が導かれる.

$$\left. \begin{aligned} (1 + X^2 Y^2) \cdot \xi_2 &= \sigma \{ (\xi_1 X - \eta_1 Y)(1 - \delta XY) - (\eta_1 X + \xi_1 Y)(\delta + XY) \}, \\ (1 + X^2 Y^2) \cdot \eta_2 &= \sigma \{ (\xi_1 X - \eta_1 Y)(\delta + XY) + (\eta_1 X + \xi_1 Y)(1 - \delta XY) \}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

一方, (4) 式と (7) 式から,

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^2 - \eta_1^2 &= a^2 \left\{ V^2 \left(1 + \frac{1}{Q_1^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{1}{4Q_L^2}\right) \right\}, \\ 2\xi_1 \eta_1 &= \frac{a^2}{Q_1} \left\{ \frac{Q_1}{Q_L} - V^2 \left(1 + \frac{1}{Q_1^2}\right)^{-1} \right\}, \\ \xi_2^2 - \eta_2^2 &= a^2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{4Q_L^2}\right) - V'^2 \left(1 + \frac{1}{Q_2^2}\right)^{-1} \right\}, \\ 2\xi_2 \eta_2 &= \frac{a^2}{Q_2} \left\{ V'^2 \left(1 + \frac{1}{Q_2^2}\right)^{-1} - \frac{Q_2}{Q_L} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし,

$$a^2 = \frac{\omega^2 H^2}{c^2}, \quad V^2 = \frac{c^2}{V_1^2}, \quad V'^2 = \frac{c^2}{V_2^2}. \quad (12)$$

(10), (11) 式によつて, 与えられた a に対して V および Q_L を求めることは原理的には可能であるが実際には大変困難である. そこで適当な近似を行なつてより簡単な形にしよう. ここで Love 波の減衰 Q_L も Q_1, Q_2 と same order であると仮定する. そのとき, $O(Q_1^{-2})$,

を無視し, (8) 式を考慮すれば (11) 式から,

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &\doteq \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{V^2-1} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{Q_1^2} \frac{\left(\frac{Q_1}{Q_L} - V^2\right)^2}{(V^2-1)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\eta_1}{\xi_1} &\doteq \frac{1}{Q_1} \cdot \frac{\frac{Q_1}{Q_L} - V^2}{V^2-1} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{Q_1^2} \frac{\left(\frac{Q_1}{Q_L} - V^2\right)^2}{(V^2-1)^2}} \right\}^{-1}, \\ \xi_2 &\doteq \frac{1}{\sqrt{2}} a \sqrt{1-V'^2} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{Q_2^2} \frac{\left(V'^2 - \frac{Q_2}{Q_L}\right)^2}{(1-V'^2)^2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\eta_2}{\xi_2} &\doteq \frac{1}{Q_2} \frac{V'^2 - \frac{Q_2}{Q_L}}{1-V'^2} \cdot \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{Q_2^2} \frac{\left(V'^2 - \frac{Q_2}{Q_L}\right)^2}{(1-V'^2)^2}} \right\}^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし,

$$V^2 \geq 1, \quad V'^2 \leq 1. \quad (14)$$

なお, $V^2-1 < 0$, $1-V'^2 < 0$ に対応する ξ_1 などは, $\frac{1}{Q_1}, \frac{1}{Q_2} \rightarrow 0$ のときに完全弾性体の場合に tend しないから採用することはできない。

さて, $X \equiv \tan \xi_1$ は多価函数であるが, ここでは first mode, すなわち, $0 \leq \xi_1 \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲だけを考える. この場合に各変数の値がとり得る範囲は次の通りである.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\geq \xi_1 \geq 0, & X &\geq 0, & \xi_2 &\geq 0, \\ 1 &\geq Y \geq -1, & \eta_1 Y &\geq 0, \\ V_2/V_1 &\geq V \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

これらの関係を使い, (10) および (11) 式から次の2つの極限的な場合における V と $1/Q_L$ の tendency が, $O(Q_1^{-2})$ の微小量が無視することによつて次のように導かれる.

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad a &\rightarrow \infty, \quad V \rightarrow 1 + \frac{\pi^2}{8a^2}, & \frac{Q_1}{Q_L} &\rightarrow 1 + \frac{\pi^2}{4a^2}, \\ \text{(ii)} \quad a &\rightarrow 0, \quad V' \rightarrow 1 - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right)^2, \\ & & \frac{Q_2}{Q_L} &\rightarrow 1 - a^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2 \left(\frac{V_2^2}{V_1^2} - 1 \right) \left(3 - 2 \frac{Q_2}{Q_1} - \frac{V_2^2}{V_1^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

この式から (13) 式中の $(Q_1/Q_L - V^2)^2$ は $(V^2-1)^2$ よりも速く 0 に近づき, $(V'^2 - Q_2/Q_L)^2$ は $(1-V'^2)^2$ と同じ割合で 0 に近づくことが知られる. したがつて V, V' のいかなる値に対し

ても同式の根号の中の第2項は $O(Q_1^{-2})$ を無視する意味において省略され得る。故に、

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &\doteq a\sqrt{V^2-1}, & \eta_1 &\doteq -\frac{1}{Q_1} \frac{1}{2\sqrt{V^2-1}} \left(V^2 - \frac{Q_1}{Q_L} \right), \\ \xi_2 &\doteq a\sqrt{1-V'^2}, & \eta_2 &\doteq -\frac{1}{Q_2} \frac{1}{2\sqrt{1-V'^2}} \left(\frac{Q_2}{Q_L} - V'^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

また、(15)、(16) 式を参照し、(10)、(17) 式から

$$(\eta_1/\xi_1)^2, (Y/X)^2, (XY)^2, \eta_1^2 = O(Q_1^{-2}) \quad (18)$$

であることも容易に知られる。したがって、

$$Y \equiv \tanh \eta_1 \doteq \eta_1 \{1 + O(Q_1^{-2})\} \quad (19)$$

と展開してよい。これらの関係を使えば、(10) 式は

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \xi_1 \tan \xi_1, \\ \eta_2 &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[\tan \xi_1 \left\{ \eta_1 + \frac{\xi_1}{Q_1} \left(1 - \frac{Q_1}{Q_2} \right) \right\} + \frac{\eta_1 \xi_1}{\cos^2 \xi_1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となる。(20)の第1式は完全弾性体中を伝わる Love 波の特性式であり、 $O(Q_1^{-2})$ の微小量を無視すれば、 Q の存在は Love 波の位相速度に関係しないという当然ではあるが重要な結果を示している。

さて、 a , V , Q_L/Q_1 を ξ_1 , ξ_2 で表わすと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\frac{V_1^2}{V_2^2} \xi_1^2 + \xi_2^2}{1 - \frac{V_1^2}{V_2^2}}}, & V &\equiv \frac{C}{V_1} = \sqrt{\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\frac{V_1^2}{V_2^2} \xi_1^2 + \xi_2^2}}, \\ \frac{Q_L}{Q_1} &= \frac{\xi_1 + A \xi_2}{\xi_2 \left(A V^2 - \frac{2}{a^2} \xi_1 \xi_2 \right) + \frac{Q_1}{Q_2} \xi_1 \left(\frac{V_1^2}{V_2^2} V^2 + \frac{2}{a^2} \xi_2^2 \right)}, \\ A &\equiv \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\xi_1 + \sin \xi_1 \cos \xi_1}{\cos^2 \xi_1}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(20) の第1式と (21) 式から、 ξ_1 を与えて $(\omega H)/c$, c/V_1 , Q_L/Q_1 を簡単に計算することができる。数値計算は、

$$\left. \begin{aligned} V_2/V_1 &= 4/3, & \mu_2/\mu_1 &= 2, \\ Q_2/Q_1 &= 0.5, & 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

の各場合に対して行なつた。Fig. 1 (a) には位相速度と群速度が参考のために示されており、横軸は $V_1 T/H \equiv 2\pi/(aV)$ であつて、dimension を持たない周期に比例する量である。これはもちろん、完全弾性体の場合の位相速度、群速度と全く同じである。Fig. 1 (b) には、同じ

(a) Phase- (c/V_1) and group-velocity (U/V_1) curves of Love waves, where T is the period and H is the thickness of the surface layer.

(b) Curves of Q_L/Q_1 , where Q_L is for Love waves and Q_1 , Q_2 for S waves.

Fig. 1. The case when $V_2/V_1=4/3$ and $\mu_2/\mu_1=2$, where V is shear velocity and μ is rigidity, and subscripts 1 and 2 represent quantities in a surface layer and substratum, respectively.

横軸に対して Q_L/Q_1 が示されている。 $Q_2/Q_1 = 1, 2$ の場合には、極小値が存在することに注目される。そのことは (16) 式からも推察される。すなわち、 $T \rightarrow 0$ のときは Q_L/Q_1 は小さい方から 1 に近づく。一方 $T \rightarrow \infty$ のときは、 Q_L の Q_2 への近づき方は $(3 - 2(Q_2/Q_1) - V_2^2/V_1^2)$ の正負に依っており、正のときは大きい方から、負のときは小さい方から 1 に近づく。したがって、 $3 - 2(Q_2/Q_1) - V_2^2/V_1^2 < 0$ の場合には（少なくとも 1 つの）極小値が存在することがわかる。

上の層と下の媒質の S 波に対する減衰 (Q^{-1}) が等しい場合 ($Q_1=Q_2$) にも Love 波の Q_L は周波数に依存することと、極小値の周期が群速度の極小値のそれに近いことは興味深い。

§ 3. 剛性率が連続的に変化している場合の Love 波の Q_L .

ここでは剛性率、および S 波に対する減衰 Q_s^{-1} が深さ z の 1 次函数であるとした場合の Love 波の減衰 Q_L^{-1} を変分法により計算する。(2-1) あるいは (2-2) 式からわかるように、 Q が周波数に関係しない、low loss medium における運動方程式は、 $e^{i\omega t}$ ($\omega \geq 0$) を仮定すると、完全弾性体における運動方程式で μ のかわりに $\mu(1+i/Q)$ を置き換えればよい。

今、簡単のために密度は一定で、 μ および Q_s^{-1} が z の 1 次函数であるとする。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0, \quad \mu = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{H}\right), \quad Q_s^{-1}(z) = \frac{1}{Q_0} \cdot \left(1 + \frac{z}{G}\right), \\ h(z) &\equiv \mu \left(1 + \frac{i}{Q_s}\right) = \mu_0 \left[\left\{1 + \frac{z}{H}\right\} + \frac{i}{Q_0} \left\{1 + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{G}\right)z + \frac{z^2}{GH}\right\} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし, ρ_0, μ_0, H, G は定数である.

x 方向に伝播する Love 波を考え, z 軸を鉛直下方にとる. y 方向の変位を v として,

$$v = v_{(z)} e^{i\omega t - \gamma z}, \quad (2)$$

ただし,

$$\gamma = \alpha + i\beta, \quad (3)$$

を仮定すると, 運動方程式は,

$$h_{(z)} \frac{d^2}{dz^2} v_{(z)} + \frac{dh_{(z)}}{dz} \cdot \frac{dv_{(z)}}{dz} + \{\rho_0 \omega^2 + \gamma^2 h_{(z)}\} \cdot v_{(z)} = 0, \quad (4)$$

である. 境界条件は,

$$z = 0 \text{ において, } \frac{dv}{dz} = 0. \quad (5)$$

これに対する変分問題の汎函数は,

$$J[v] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ (\rho_0 \omega^2 + \gamma^2 h) v^2 - h \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right\} dz. \quad (6)$$

この汎函数の停留値を見出すのに Ritz の方法を使う⁽¹⁾. 境界条件を満足する試験函数 v_1, v_2 を用いて,

$$v = A_1 v_1 + A_2 v_2 \quad (7)$$

ただし, A_1, A_2 は任意定数である. (6) および (7) 式から次の式が導かれる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial A_1} &= A_1 \left\{ \rho_0 \omega^2 \int_0^\infty v_1^2 dz + \gamma^2 \int_0^\infty h(z) v_1^2 dz - \int_0^\infty h(z) \left(\frac{dv_1}{dz} \right)^2 dz \right\} \\ &\quad + A_2 \left\{ \rho_0 \omega^2 \int_0^\infty v_1 v_2 dz + \gamma^2 \int_0^\infty h(z) v_1 v_2 dz - \int_0^\infty h(z) \frac{dv_1}{dz} \frac{dv_2}{dz} dz \right\} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial A_2} &= A_1 \left\{ \rho_0 \omega^2 \int_0^\infty v_1 v_2 dz + \gamma^2 \int_0^\infty h(z) v_1 v_2 dz - \int_0^\infty h(z) \frac{dv_1}{dz} \frac{dv_2}{dz} dz \right\} \\ &\quad + A_2 \left\{ \rho_0 \omega^2 \int_0^\infty v_2^2 dz + \gamma^2 \int_0^\infty h(z) v_2^2 dz - \int_0^\infty h(z) \left(\frac{dv_2}{dz} \right)^2 dz \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) 式の A_1, A_2 に関する行列式を 0 にする式から Love 波の c , および Q_L が求められる.

なお, 第 1 近似は (8) の第 1 式の A_1 の係数を 0 とおくことにより得られる.

境界条件 (5) を満足する試験函数を, 竹内一小林 (1959) にならつて次のようにおく.

$$\left. \begin{aligned}
 v_1 &= e^{-q\bar{\beta}z} - \frac{q}{p} e^{-p\bar{\beta}z}, \\
 v_2 &= e^{-1.25\bar{q}\bar{\beta}z} - \frac{q}{p} e^{-1.25p\bar{\beta}z}, \\
 p &= 0.8, \quad q = 0.4, \quad \bar{\beta} \equiv -i\gamma = \beta \left(1 - i\frac{\alpha}{\beta}\right).
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$O(Q_0^{-2})$ を無視し, (8) の各積分を実行すると同式の A_1, A_2 の各係数は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 a_j \left(\frac{c}{V_0} \right)^3 - \left(b_j + \frac{c_j}{\beta H} \right) + \frac{i}{Q_0} \left[\left\{ b_j + \frac{1}{2} \frac{c_j}{\beta H} \right\} \frac{Q_0}{Q_L} - \left\{ b_j \right. \right. \\
 \left. \left. + \left(1 + \frac{H}{G} \right) \frac{c_j}{\beta H} + \frac{H}{G} \frac{d_j}{(\beta H)^2} \right\} \right], \quad (10)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$c = \frac{\omega}{\beta}, \quad \frac{1}{Q_L} = 2 \frac{\alpha}{\beta}, \quad V_0^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}, \quad (11)$$

であり, また, $j=1$ は (8) の第1式の A_1 の係数, $j=2$ は第1式の A_2 , および第2式の A_1 の係数, $j=3$ は同式の A_2 の係数である. さらに,

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= 0.572 \ 9166, & a_2 &= 0.508 \ 2417, & a_3 &= 0.458 \ 3333, \\
 b_1 &= 0.606 \ 5200, & b_2 &= 0.544 \ 8718, & b_3 &= 0.499 \ 9999, \\
 c_1 &= 1.055 \ 9895, & c_2 &= 0.849 \ 0263, & c_3 &= 0.708 \ 3333, \\
 d_1 &= 1.601 \ 8337, & d_2 &= 1.149 \ 5326, & d_3 &= 0.868 \ 0555,
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である. (10) の形から $O(Q_0^{-2})$ を無視する限り, Love 波の位相速度に Q_0 は関係しないことがわかる. (12) の数値を使えば, (8) 式から作られる行列式の実部, 虚部がそれぞれ 0 となることから c/V_0 , および Q_L/Q_0 が求められる.

計算を行なったのは次の 3 つの場合である.

- (i) $H/G = 0$,
- (ii) $H/G = 1/2$,
- (iii) $H/G = -1/2$.

(i) の場合は $Q_{(z)}^{-1} = \text{const.}$ の場合で, (ii) は z が大きい程減衰が大となる場合, (iii) は逆に小となる場合である. この場合は, $z = 2H$ で減衰が 0 となり, それより大きい z に対しては振幅が増大するという実際とは矛盾したものである. しかし, 余りに長い波長を考えない限り, この議論は有効と考えられる.

Fig. 2 (a) は, $V_0 T/H$ を横軸にとつた Love 波の位相速度の分散曲線であり, Fig. 2 (b)

(a) Phase-velocity (c/V_0) curve of Love waves, where V_0 is shear velocity at $z=0$.

(b) Curves of Q_L/Q_0 for Love waves in the cases when $1/Q_S = (1+z/G)/Q_0$, where Q_S is for S waves, Q_0 and G are constants.

Fig. 2. The case when $\rho = \rho_0$ and $\mu = \mu_0(1+z/H)$, where ρ is density and ρ_0, μ_0 and H are constants. z -axis is taken vertical downwards and the free surface is $z=0$.

は、上述の各場合に対する Q_L/Q_0 の図である。佐藤 (1958) の G -wave の解析の結果では、周期が長いほど小さい Q_L を示しているが、そのような傾向からただちに、S 波に対する Q_S が深いほど小さいとはいえないことはこの図から明らかであろう。

§ 4. 弾性定数が連続的に変化している場合の Rayleigh 波の Q_R .

簡単のために次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \rho(z) &= \rho_0, \quad \mu(z) = \lambda(z) = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{H}\right), \quad Q_{P(z)}^{-1} = Q_{S(z)}^{-1} = Q_0^{-1}, \\ h(z) &\equiv \mu_0 \left(1 + \frac{z}{H}\right) \left(1 + \frac{i}{Q_0}\right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 Q_P^{-1} , Q_S^{-1} は P 波、および S 波に対して働くと考えられる減衰を表わす量である⁽²⁾。鉛直下方を z 軸とし、すべての量が y 座標によらないとする。変位の x -成分、 z -成分を u, w とすると、

$$\left. \begin{aligned} iu &\equiv U(z) e^{i\omega t - \gamma x}, \\ w &\equiv w(z) e^{i\omega t - \gamma x}, \quad \gamma \equiv \alpha + i\beta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

とおける。(2-1) 式を参照すると §3 と同様にして運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} h \frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{dh}{dz} \frac{dU}{dz} + (\rho_0 \omega^2 + 3\gamma^2 h) U - i\gamma \left(2h \frac{dw}{dz} + \frac{dh}{dz} \cdot w \right) &= 0, \\ 3h \frac{d^2 w}{dz^2} + 3 \frac{dh}{dz} \frac{dw}{dz} + (\rho_0 \omega^2 + \gamma^2 h) w - \frac{\gamma}{i} \left(2h \frac{dU}{dz} + \frac{dh}{dz} \cdot U \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \left[h \left(-\gamma w + \frac{1}{i} \frac{dU}{dz} \right) e^{i\omega t - \gamma x} \right]_{z=0} &= 0, \\ \left[h \left(3 \frac{dw}{dz} - \frac{\gamma}{i} U \right) e^{i\omega t - \gamma x} \right]_{z=0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

であり, これに対する汎函数は,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[U, w] = \frac{1}{2} \int_0^\infty & \left[\rho_0 \omega^2 (U^2 + w^2) + h \left\{ 3\gamma^2 U^2 + \gamma^2 w^2 - \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 3 \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - 2i\gamma U \frac{dw}{dz} + 2i\gamma w \frac{dU}{dz} \right\} \right] dz, \end{aligned} \quad (5)$$

となる. Love 波の場合と同様に, 試験函数を,

$$\left. \begin{aligned} U &= E_1 U_1 + E_2 U_2, \\ w &= E_1 w_1 + E_2 w_2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

と表わす. ただし, E_1, E_2 は任意定数である.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial E_1} &= E_1 \left[\int_0^\infty \left\{ \rho_0 \omega^2 (U_1^2 + w_1^2) + \gamma^2 h (3U_1^2 + w_1^2) - h (U_1'^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 3w_1'^2) - 2i\gamma h (U_1 w_1' - w_1 U_1') \right\} dz \right] \\ &+ E_2 \left[\int_0^\infty \left\{ \rho_0 \omega^2 (U_1 U_2 + w_1 w_2) + \gamma^2 h (3U_1 U_2 + w_1 w_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - h (U_1' U_2' + 3w_1' w_2') - i\gamma h (U_1 w_2' + U_2 w_1' - w_1 U_2' - w_2 U_1') \right\} dz \right] = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial E_2} &= E_1 \left[\int_0^\infty \left\{ \rho_0 \omega^2 (U_1 U_2 + w_1 w_2) + \gamma^2 h (3U_1 U_2 + w_1 w_2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - h (U_1' U_2' + 3w_1' w_2') - i\gamma h (U_1 w_2' + U_2 w_1' \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - w_1 U_2' - w_2 U_1') \right\} dz \right] \\ &+ E_2 \left[\int_0^\infty \left\{ \rho_0 \omega^2 (U_2^2 + w_2^2) + \gamma^2 h (3U_2^2 + w_2^2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - h (U_2'^2 + 3w_2'^2) - 2i\gamma h (U_2 w_2' - w_2 U_2') \right\} dz \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

この式の E_1, E_2 の係数で作る行列式が 0 となればよい. 第 1 近似は (7) の第 1 式の E_1 の係数を 0 とすることにより得られる. ただし, ダッシュは z に関する微分を表わす.

境界条件 (3) を満足する試験函数を竹内一小林 (1959) にならつて次のようにおく.

$$\left. \begin{aligned}
 U(z; m) &= e^{-m p \bar{\beta} z} - A e^{-m q \bar{\beta} z}, \\
 w(z; m) &= -B e^{-m p \bar{\beta} z} + D e^{-m q \bar{\beta} z}, \quad \bar{\beta} \equiv \beta \left(1 - i \frac{\alpha}{\beta}\right), \\
 p &= 0.8474 \ 8658, \quad q = 0.3933 \ 1990 \quad A = 0.5773 \ 5027, \\
 B &= \frac{1-A}{3(p-q)} \cdot \frac{1}{m} + \frac{q(p-q A)}{p-q} \cdot m, \\
 D &= \frac{1-A}{3(p-q)} \cdot \frac{1}{m} + \frac{p(p-q A)}{p-q} \cdot m,
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 U_1 &= U(z; m=1) & U_2 &= U(z; m=1.25) \\
 w_1 &= w(z; m=1), & w_2 &= w(z; m=1.25),
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$O(Q_0^{-2})$ を無視し, (5) の各積分を実行すると, 同式の E_1, E_2 の各係数は次のように書ける.

$$a_j \left(\frac{c}{V_0} \right)^2 - \left(b_j + \frac{c_j}{\beta H} \right) + \frac{i}{Q_0} \left\{ \left(b_j + \frac{1}{2} \frac{c_j}{\beta H} \right) \frac{Q_0}{Q_R} - \left(b_j + \frac{c_j}{\beta H} \right) \right\} \quad (10)$$

ただし,

$$c = \frac{\omega}{\beta}, \quad \frac{1}{Q_R} = 2 \frac{\alpha}{\beta}, \quad V_0^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0} \quad (11)$$

すなわち, c は Rayleigh 波の位相速度であり, また, $j=1$ は (5) の第 1 式の E_1 の係数, $j=2$ は第 1 式の E_2 , および第 2 式の E_1 の係数, $j=3$ は第 2 式の E_2 の係数を示す. さらに a_j などの数値は次の通りである.

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= 1.240 \ 8064, & a_2 &= 1.290 \ 9573, & a_3 &= 1.377 \ 9011, \\
 b_1 &= 1.048 \ 8530, & b_2 &= 1.091 \ 2455, & b_3 &= 1.204 \ 6003, \\
 c_1 &= 2.570 \ 9374, & c_2 &= 2.411 \ 0843, & c_3 &= 2.425 \ 3091.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Love 波の場合と同様に, $O(Q_0^{-2})$ を無視する限り, Q_0 の存在は位相速度に影響をおよぼさ

(a) Phase-velocity (c/V_0) curve of Rayleigh waves, where V_0 is shear velocity at $z=0$.

(b) Curve of Q_R/Q_0 for Rayleigh waves in the case when $Q_P = Q_S = Q_0$, where Q_R is for Rayleigh waves, Q_P for P waves and Q_0 is a constant.

Fig. 3. The case when $\rho = \rho_0$, $\lambda = \mu_0(1 + z/H)$, where λ is an elastic constant.

ない。もちろん、位相速度に関しては、竹内一小林 (1959) の結果と全く同じである。

さて、これらの数値を使つて得られた結果は、Fig. 3(a) が Rayleigh 波の位相速度で、Fig. 3(b) が Q_R/Q_0 である。横軸は $V_0 T/H$ をとつてあり、 V_0 は自由表面における S 波の速度である。

§ 5. 結 論

実体波の減衰の定数 Q (周波数には無関係と仮定) の深さ分布を与えたとき、表面波についての減衰の定数がどのような周波数依存性を示すかを調べた。1 層構造の Love 波、および物質定数 (Q を含めて) が深さの 1 次函数であるときの Love 波、Rayleigh 波について数値計算を行なつた主な結果は以下の通りである。

1. $O(Q^{-2})$ の微小量を見捨てるれば、表面波の位相速度は媒質の減衰に関する定数、 Q に関係しない。
2. 1 層構造の Love 波. (Q_L ; Love 波に対する減衰の定数, Q_1, Q_2 ; 上層, および下の媒質における S 波に対する減衰の定数, V_1, V_2 ; 上層, および下の媒質中の S 波の速度):
 - (a) 周期 $T \rightarrow \infty$ のとき, $Q_L \rightarrow Q_2$, $T \rightarrow 0$ のとき, $Q_L \rightarrow Q_1$ となり, 位相速度 (C) が $C \rightarrow V_2 (T \rightarrow \infty)$, $C \rightarrow V_1 (T \rightarrow 0)$ となるのと似た様相を示す。
 - (b) $Q_1 = Q_2$ の場合にも Q_L は周波数に依存する。すなわち, Q_L は位相速度に依存すると見做すことができる。
 - (c) $3 - 2(Q_2/Q_1) - (V_2/V_1)^2 < 0$ の場合には, Q_L は常に極小値を持つ。
 - (d) ここで計算した例 ($V_2/V_1 = 4/3$, $\mu_2/\mu_1 = 2$, $Q_2/Q_1 = 2$) では, Q_L の極小値を与える周期は, 群速度のそれを与える周期に非常に近い。一般に, $Q_2/Q_1 > 1$ で, Q_1 と Q_2 が same order であるならば, 計算例と同様に, Q_L の極小値に対する周期は群速度極小のそれに近いことが推察される。
3. 不均質構造における Love 波, および Rayleigh 波: 剛性率が深さの 1 次函数として増大する場合で, 媒質の Q が深さによらず一定のときにも, Love 波, および Rayleigh 波の Q_L, Q_R は周期に依存し, 長い周期ほど小さい値を示す。

最後に御指導頂いた本多教授, 浅田助教授, および終始御討議下さった海上保安庁水路部の野口岩男氏に厚く感謝する。

脚註 (1)

(4) の微分方程式, あるいは試験函数は複素数であつて, 停留値は極小値ではない. したがつて得られた Q_L の値が真の Q_L の値より大きい値を示すという保証もないし, 実は第1近似より第2近似の方がより良い精度を有するという保証もない. しかし, 位相速度に関しては竹内・小林の結果と変るところがなく, 第2近似のより良い精度が変分学により保証されている. §2 から理解されるように Q_L は位相速度の函数であるから, その精度が良い第2近似を使うことはあながち無意味とは考えられない. なお, 第1近似の結果が省略されているけれども, 位相速度の第1近似の精度が悪い長波長域を除けば, Q_L の第1近似と第2近似の差は数%を越えない.

脚註 (2)

均質な半無限媒質中での Rayleigh 波の Q_R に関する Macdonald の研究 (1959) によれば, P 波に対する Q を Q_P , S 波に対しては Q_S とすると, Q_R は次のように表わせる.

$$\frac{1}{Q_R} = \frac{1}{Q_S} \left\{ 1 + m \left(\frac{Q_S}{Q_R} - 1 \right) \right\}$$

$\lambda = \mu$ を仮定すると, $m \doteq 0.13$ となる. この場合には, Q_P に比し, Q_S が著しく大でない限り, $Q_R \approx Q_S$ となる. 逆に $Q_R = Q_S$ なら, $Q_P = Q_S$ である. Q_S/Q_P の実際の値は, 今のところ全く知られていないが, $Q_P = Q_S$ と仮定しても Q_R には大きな影響はないと考えてよさそうである.

文 献

- ALSOP, L. E., G. H. SUTTON and M. EWING 1861, Measurement of Q for Very Long Period Free Oscillations. Journ. Geophys. Res., **66**, 2911-2915.
- BATH, M. and A. L. ARROYO 1962, Attenuation and Dispersion of G Waves. Journ. Geophys. Res., **67**, 1933-1942.
- BENIOFF, H., F. PRESS and S. SMITH 1961, Excitation of the Free Oscillations of the Earth by Earthquakes. Journ. Geophys. Res., **66**, 605-619.
- KNOPOFF, L. 1956, The Seismic Pulse in Materials Possessing Solid Friction, I; Plane Waves. Bull. Seism. Soc. Amer., **46**, 175-183.
- KNOPOFF, L. and G. J. F. MACDONALD 1958, Attenuation of Small Amplitude Stress Waves in Solids. Revs. Modern Phys., **30**, 1178-1192.
- LOMNITZ, C. 1962, Application of the Logarithmic Creep Law to Stress Wave Attenuation in the Solid Earth. Journ. Geophys. Res., **67**, 365-368.
- MACDONALD, J. R. 1959, Rayleigh-Wave Dissipation Functions in Low-Loss Media. Geophys. Journ., **2**, 132-135.
- NESS, N. F., J. C. HARRISON and L. B. SLICHTER 1961, Observations of the Free Oscillations of the Earth. Journ. Geophys. Res., **66**, 621-629.
- SATÔ, Y. 1958, Attenuation, Dispersion, and the Wave Guide of the G Wave. Bull. Seism. Soc. Amer., **48**, 231-251.
- 竹内 均・小林直太 1959, 密度, 弾性率が連続的に変化している半無限弾性体の表面を伝わる波 (第1報). 地震 **2**, **12**, 115-121.