Magnitude の定義式について*

岐阜大学学芸学部地学研究室 村 松 郁 栄

(昭和 39 年 7 月 18 日受理)

On the Equation to Define the Earthquake Magnitude

Ikuei MURAMATU

Department of Earth Science, Faculty of Liberal Arts and Education
Gihu University, Gihu, Japan

(Received July 18, 1964)

Equation of earthquake magnitude is classified as follows:

$$A = C(M) r^{-\mu} \quad \text{I}$$

$$A = C(M) r^{-\nu} e^{-\kappa r}, \quad \kappa = \text{const.} \quad \text{II}$$

$$\text{and } \log C(M) = \alpha M + \beta$$

where A is the maximum amplitude and r is the hypocentral distance. However, Type I is not applicable to the large range of r and Type II is not for the large range of M . Accordingly, the following equation is proposed:

$$A = C(M) r^{-\nu} e^{-r/r_e(M)} \quad \text{III}$$

Type III is applicable to the observed values of the large range of both r and M . As examples, the results of observation for 23 large and middle earthquakes and several explosions are shown.

It is reasonable to use the velocity amplitude for A . Then, the equation of Type I is expressed by

$$0.80 M - 0.80 = \log V(\text{kine}) + 2 \log r(\text{km}) \quad (3)$$

and that of Type III is expressed by the following equations:

$$\alpha M + \beta = \log C(M) = \log (V r^\nu e^{r/r_e}) = \log (V_e r_e^\nu e^1) \quad (4)$$

where V_e is the velocity amplitude at $r = r_e$. For the data of 23 earthquakes of which the magnitudes are from 4.6 to 8.3, the values of M determined by Eq. (4) are well consistent with those by Eq. (3) and we get the following relations:

$$\log C(M) = 0.655 M - 1.719 \quad (5)$$

$$\text{and } \log r_e(\text{km}) = 0.210 M + 0.947 \quad (6)$$

where ν is appropriately assumed to be 1. Then we have the $V \sim r$ curves for various M . These curves are well consistent with the observed values of explosions and microearthquakes, too.

The original definition of M is given by the maximum amplitude at a certain distance r_0 , but it is approximately available for the small range of M . Therefore, for the large range of M , r_0 should be changed into r_e .

If the duration of the wave group of the maximum amplitude is proportional to the hypocentral distance, the total kinetic energy of an earthquake can be related to its magnitude as follows:

$$\log E(\text{erg}) = 2 \log C(M) + \log r_e(M) + \text{const.} \quad (15')$$

$$= 1.52 M + 11.8 \quad (17)$$

for the physical constants given commonly in the earth's crust.

* 昭和 39 年 5 月 9 日地震学会で発表.

Equation of Type I is applicable in the vicinity of r_e , so that the coefficient of $\log r$ is

$$-\mu = (d \log V / d \log r)_{r=r_e} = (-\nu - r/r_e)_{r=r_e} = -(\nu + 1) \quad (9)$$

Therefore, from the equations $M(V, r)$ and $M(A, r)$ of Type I and $V = A2\pi/T$, we have

$$\log T_e(\text{sec}) = 0.257 M - 1.32, \text{ at } r = r_e \quad (19)$$

From Eq. (6) and (19), we have approximately

$$r_e \simeq \text{const.} \times T_e \quad (20)$$

and accordingly, we see that the equation of Type III is due to the specific dissipation function Q^{-1} .

§ 1. は し が き

近時、微小地震の観測が盛んとなり、広い範囲の M を定める式が望まれるようになった。 M は最大振幅と距離との函数として定められるが、距離による振幅の減衰の仕方が従来の定義のように M に無関係とは仮定できないようである。この事実は既に気づかれていることであるが (和達 1931, 浅田 1957, 坪井 1957), 筆者はここに大・中地震の豊富な観測結果について、この事実を忠実に表現し、広い範囲の M を定める式を導くことを試みた。

§ 2. 実 例

Table 1. Earthquakes used for this investigation.

No.	Date	φ	λ	D (km)	M	Location	M (2)	M (3)
1	'57.12.31	35.8	136.1	20	4.6	Central Fukui	4.6	4.85
2	52. 6.26	35.5	136.6	30	4.7	West Gifu	4.7	4.6
3	53. 2. 8	34.9	137.2	20	5.0	Central Aiti	5.2	5.25
4	59. 9.23	35.7	138.4	10	5.8	Mt. Akaisi	5.7	5.7
5	60.12.26	34.2	136.2	60	6.1	Odaigahara	6.0	6.0
6	52. 3. 7	36.5	136.2	20	6.8	Daisyoozi	6.65	6.6
7	52. 7.18	34.45	135.8	70	7.0	Yosino	6.9	6.7
8	45. 1.13	34.7	137.0	0	7.1	Mikawa	6.9	6.8
9	48. 6.28	36.1	136.2	20	7.3	Fukui	7.3	7.25
10	44.12. 7	33.7	136.2	0—33	8.0	Toonankai	7.7	8.0
11	46.12.21	33.0	135.6	30	8.1	Nankai	8.0	8.15
12	41. 7.15	36.7	138.3	5—20	6.2	Nagano	6.2	6.15
13	35. 7.12	35.0	138.4	10	6.3	Sizuoka	6.3	6.2
14	36. 2.21	34.5	135.7	20	6.4	Kawati-Yamato	6.3	6.4
15	49.12.26	36.7	139.7	0—	6.7	Imaiti	6.5	6.2
16	48. 6.15	33.8	135.5	0—	7.0	Hitakagawa	6.7	6.65
17	61. 8.19	36.0	136.8	0—	7.0	Kitamino	6.95	6.75
18	39. 5. 1	40.0	139.8	0—	7.0	Oga	7.0	7.0
19	31. 9.21	36.1	139.2	10—20	7.0	Nisisaitama	7.0	7.0
20	30.11.26	35.1	139.0	0—5	7.0	Kitaizu	7.0	7.2
21	41.11.19	42.3	132.4	0—20	7.4	Hyuuganada	7.3	7.3
22	27. 3. 7	35.6	135.1	10	7.5	Kitatango	7.5	7.7
23	33. 3. 3	39.1	144.7	0—20	8.3	Sanrikuoki	8.2	8.5

2.1 大・中地震: Table. 1 に掲げられた地震は昭和以降の日本における破壊的地震すべてと岐阜県周辺の最近の中地震とである. これらの変位振幅最大値 A (3 成分中の最大値) と震央距離 Δ との値を気象庁の資料 (気象要覧, 地震月報および Catalogue) に基き全部 plot すると Fig. 1 のようになる. (ここで○印は震源距離). 更に A とそれに対応する T とより

$$V = A \cdot 2\pi / T \quad (1)$$

として速度振幅最大値を求め, 3 成分中の最大値を採用して $V \sim \Delta$ 関係を plot したのが Fig. 2 である. Fig. 1 に比べて Fig. 2 の方が点のばらつきは少ない. これは A を用いるよりも V を用いた方が実用上よいことを示している. また M を地震の波動 energy と対応させようとするとき, V の方が適当である. ここでは主に浅い地震を扱っているので Δ を r と書き直してもよい.

2.2 微小地震: 微小地震は 1963 年 8 月岐阜県およびその周辺にて, いくつかの大学および研究所により共同観測された. この観測は Time の精度がよく, また t_{p-s} も信頼しうるようである. 未だ充分広い範囲の値は得られていないが, ここに共通にとれた最初の 2 例 No. 856 および No. 884 を示した.

2.3 爆破地震動: 爆破地震動研究グループによる観測結果は広い範囲の r に亘って得られている. 最近の倉吉および紫雲寺爆破の結果は振幅に関する信頼度もよくなっているのでここにその結果を示した. なお, 横山ダムにて行なわれた数回の採石用バクハおよび赤坂石灰山の小ハッパの観測結果をも例示した (村松 1962 a). またアメリカにおける地下核爆発の変位計による観測結果 (Carder et al. 1960) を (1) 式にて速度振幅に直したものを示す. 以上の結果を Fig. 3 に示した.

§ 3. M の定義式の分類

地震の規模 M は任意の観測点における最大振幅 A (または変位 A , 速度 V , 加速度 α) と震源距離 r (または震央距離 Δ) とによつて定義されている. ここでは M および r の広い範囲に亘つて適用される $M(A, r)$ の定義式を求めようとする.

従来の $M(A, r)$ の式を大別すると次の 2 つとなる.

$$\text{I} \quad A = C(M) r^{-\mu}$$

$$\text{II} \quad A = C(M) r^{-\nu} e^{-\kappa r}, \quad \kappa = \text{const.}$$

そして共に $\log C(M) = \alpha M + \beta$

Fig. 1 (a). Relation between the maximum displacement amplitude and the epicentral distance (○ denotes the hypocentral distance).

Fig. 1 (b).

Fig. 2 (a). Relation between the maximum velocity amplitude and the epicentral distance.

Fig. 2 (b).

Fig. 3. $V \sim r$ relations of some moderately large earthquakes, microearthquakes and several explosions. $V \sim r$ curves for various M given by the definition of Type III.

にて M が定義されている。

Fig. 2 および Fig. 3 に見られるように I 型の式は r の広い範囲に対しては観測事実とのくいちがいが著しく適用不能となる。II 型の式はある M に対しては r の広い範囲に適用しうるが、 M の広い範囲に対しては著しいくいちがいを生じて適用不能となる。したがってここに II 型の式の κ を M の函数とした第 III の型の定義式が提出される。

$$\text{III} \quad A = C(M) r^{-\nu} e^{-r/r_0(M)}$$

Ⅲ型は震源距離による減衰項に M を含んでいるので M の定義としては一見不都合のようであるが、 M を parameter とした $A \sim r$ 曲線群を作っておけば、ⅠおよびⅡと同様に任意の地点の A および r より直ちに M を求めることができる。

なお、Ⅰ、Ⅱと同様に $\log C(M) = \alpha M + \beta$ として、 M は既に知られている大・中の地震の M と一致するように α, β を求める方針をとる。Ⅲ型では $r_0(M)$ が重要な役割を演ずる。

§ 4. $C(M)$ および $r_0(M)$ の値

§ 2 の 1 に述べた理由により、 M を V および r の函数として表わす。

まず、現在気象庁で用いられている坪井 (1954) の式を少し変えた式——すなわち、 A として 3 成分中の最大値を用い、 A の代りに r を用いる——を

$$M = \log A(\mu) + 1.73 \log r(\text{km}) - 0.83 \quad (2)$$

とし、この M と等しい M を与えるように $M(V, r)$ を同じくⅠ型で表わすと

$$M = 1.25 \{ \log V(\text{kine}) + 2.0 \log r(\text{km}) + 0.80 \} \quad (3)$$

をうる。これは前に (Muramatsu 1962 b) 表 1 の No. 1~No. 11 の地震を資料として求めた式であるが、ここで追加された No. 12~No. 23 の地震の M を Fig. 2 により (3) 式で求めたもの (これを $M(3)$ と記す) と Fig. 1 により (2) で求めたもの (これを $M(2)$ と記す) とは表 1 に示したごとくよく一致する。表 1 第 6 欄の M は気象庁の求めた M である。これらは皆よい一致を示しているといえるから、 $M(3)$ を従来の公表された M と同じものと考えておいて差支えない。なお、 M , $M(2)$ および $M(3)$ はそれぞれ、Fig. 1 の鎖線、Fig. 1 の実線および Fig. 2 の実線で示される。

次に、 $M(V, r)$ のⅢ型の式を求める。Fig. 2 の破線はⅢ型の式の ν を 1 と仮定して最小自乗法で引いた $V \sim r$ の曲線である。 r_0 およびそれに対応する V_0 は図中+印で示される。 r_0 は明らかに M とともに増大している。

Ⅲ型による M の定義式は

$$\log C(M) = \alpha M + \beta \quad (4)$$

$$= \log (V r^\nu e^{r/r_0}) \quad (4')$$

$$= \log (V_0 r_0^\nu e^1) \quad (4'')$$

で与えられる。したがって $\log C(M)$ は (4'') により Fig. 2 より直ちに求められる。得られた $\log C(M)$ と (3) の M との関係を示すと Fig. 4 のようになり、(4) がほぼ満足されている。これより α, β は次のように定められる。

$$\log C(M) = 0.655M - 1.719 \quad (5)$$

Fig. 4. Relation between M and $\log C(M)$.

また $r_e(M)$ は

$$\log r_e(\text{km}) = 0.210M + 0.947 \quad (6)$$

となる. この結果 $V_e(M)$ も次のようになる.

$$\log V_e(\text{kine}) = 0.455M - 3.100 \quad (7)$$

$r_e \sim M$ および $V_e \sim M$ の関係は Fig. 5 に示される. 両者の error は $\log C(M)$ において打消される傾向がある. この $C(M)$ および $r_e(M)$ を用いて M を parameter とした $V \sim r$ の曲線群を作ると Fig. 3 のようになる.

爆破地震動の観測結果は M および r の広い範囲に亘つてよくこの曲線の上についている. すなわち, 既に公表されている $M = 4.6 \sim 8.3$ の値を変えることなく 50 kg の火薬バクハに到るまでの広範囲の M に対して, 且つ 100 km から 1000 km に亘る広範囲の r に対して適用される式が導かれた.

§ 5. $r_e(M)$ の意味

i) (4)~(4')に見られるように, M は r_e およびそこでの V_e によつて定義される量である.

Fig. 5. r_e - M relation and V_e - M relation.

ii) ある狭い範囲の M に対しては近似的に

$$r_e(M) \simeq \text{const.} = r_0 = 1/\kappa \quad (8)$$

としうる. すなわち, II 型をうる. M の元来の定義は “ある一定距離 (例えば 100 km) における最大振幅” にて与えられたが, これは Fig. 2 および Fig. 4 に見られるように広範囲の M には適用され得ない.

iii) Fig. 1 および Fig. 2 に見られるように比較的 M の広い範囲に亘つて I 型の式が成立っているが, これはたまたま観測資料の r が r_0 の附近に多かつたからと考えられる. そのとき次の関係が成立つ.

$$-\mu = (d \log V / d \log r)_{r=r_0} = (-\nu - r/r_0)_{r=r_0} = -(\nu + 1) \quad (9)$$

これは I 型の式のもつ一種の統計的融通性といえる. II 型の式にはこの融通性はない. なお, (3) 式の係数 2.0 には (9) 式の意味がある.

§ 6. Energy と Magnitude との関係

1つの地震に対しては定義IIIおよび Fig. 4 より

$$V r e^{r/r_0} = C(M) = \text{const.} \quad (10)$$

であるから, 震源より発する地震波の Kinetic energy E は

$$E = \int_0^\infty \frac{1}{2} \rho v^2 c_s dt 4\pi r^2 e^{2r/r_0} \quad (11)$$

と表わされる. ここに最大動を現わす波群の継続時間 τ を導入すれば

$$E = 0.25\pi \rho c_s \tau V^2 r^2 e^{2r/r_0} \quad (12)$$

と表わされる. (11) = (12) が τ の定義である. なお, ここでは地表の振幅 V は入射波の振幅の2倍になると仮定した.

E と M との本質的な相違は, 振動の継続時間 (τ) が入ってくることにある. そしてこの τ は r に無関係ではない. いま沢山の微小地震について τ と t_{p-s} との関係を調べてみると, 地震の Type によるばらつきは著しいが, 大体

$$\tau/t_{p-s} \doteq \text{const.} = c' = 0.1 \sim 0.2 \quad (13)$$

となつている. したがつて

$$E = 0.25\pi \rho c_s c' k^{-1} r V^2 r^2 e^{2r/r_0} \quad (14)$$

ここで k は大森係数である.

M は $r = r_0$ にて定められる量であるから, E と M との関係は

$$E = 0.25\pi \rho c_s c' k^{-1} \cdot r_0 \cdot (V_0 r_0 e^1)^2 \quad (15)$$

$$\therefore \log E = 2 \log C(M) + \log r_e(M) + C'' \quad (15')$$

と表わされる. ここで

$$\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3, c_s = 3.2 \text{ km/sec}, c' = 0.2, k = 7.5 \text{ km/sec} \quad (16)$$

とすると

$$\log E(\text{erg}) = 1.52M + 11.8 \quad (17)$$

となる. (17) の係数が Gutenberg-Richter (1956) によつて与えられた式に極めて近い値となつたことは有意義である.

§ 7. III 型定義式の物理的意味 Q^{-1}

地震波の energy は拡がるとともに必ずその一部は媒質に吸収される筈である. それが一定走行距離当り一定ならば II 型となり, 1 波長当り一定ならば $r_e \propto T$ となり, 粘性によるならば Voigt 型であれ Maxwell 型であれ $r_e \propto T^2$ となる.

T と M との関係は (2) と (3) とより次式で与えられる.

$$\log T(\text{sec}) = 0.20M + 0.27 \log r(\text{km}) - 1.57 \quad (18)$$

(2') および (3) が成立するのは $r \simeq r_e$ 附近の Data についてであるから

$$\log T_e(\text{sec}) = 0.257M - 1.32 \quad \text{at } r \simeq r_e \quad (19)$$

となる. なおこれまでに多くの人々が様々な結果を得ているが, そのうちで Gutenberg のものと松本の S_1 とがここで用いた資料と同等の phase を扱っており, それぞれ

$$\log T(\text{sec}) = 0.22M - 1.5 \quad (\text{Gutenberg and Richter 1942: 最大動について}) \quad (19')$$

$$\log T(\text{sec}) = 0.33M - 1.36 \quad (\text{Matsumoto 1960: } S_1 \text{ のスペクトル}) \quad (19'')$$

である. これらの T は任意の r で与えられるものではなく, $r \simeq r_e$ にて与えられた確率が大である. したがつて (19), (19'), (19'') は同じ内容をもつ. これらの結果を (6) の $r_e(M)$ と比べると

$$r_e \simeq \text{const.} \times T_e \quad (20)$$

となるから, energy 吸収は Q^{-1} によるものと考えられる. そのとき

$$1/r_e = \pi/Q c_s T_e \quad (21)$$

であるから, これに上式の結果を入れることにより Q^{-1} の値を求めることができる. M の項はどの場合にも小さくなるので, それを無視し, かつ $\pi/c_s \doteq 1$ とすると, それぞれ

$$\pi/Q c_s \doteq Q^{-1} = 5.2 \times 10^{-3}, 3.6 \times 10^{-3} \text{ および } 4.9 \times 10^{-3}(\text{sec/km}) \quad (22)$$

をうる.

なお, $M(A, r)$ または $M(\alpha, r)$ を $M(V, r)$ に換算する場合には (19) の T_e を用いるべきことになる.

§ 8. $A(r)$, $V(r)$, $\alpha(r)$ の相違について

Fig. 1 と Fig. 2 とを比べると $A \sim r$ よりも $V \sim r$ の方が減衰が急である. $\alpha \sim r$ は更に急となる傾向がある. これらの現象は次のように説明される.

A に対応する周期を T_A とし, 同様に T_V および T_α を定義すると, 一般に

$$T_A \geq T_V \geq T_\alpha \quad (23)$$

である. 一方 $r_c \propto T_c$ であるから

$$r_{cA} \geq r_{cV} \geq r_{c\alpha} \quad (24)$$

となる. 比較は同じ範囲の r にある観測値に注目してなされるのであるから, r_c が小さい程減衰が急となつて見える.

§ 9. 附 記

地下構造は一樣でないから, 最大振幅に関する詳しい議論は困難である, すなわち, それらの phase は必ずしも同一ではなく, 走行距離もまた異なる. 震源の条件も亦変化に富んでおり, A にも T にも影響を与える. 観測点の地盤の影響も亦著しい. したがって実際の観測結果には大きなばらつきが生じてくる可能性は充分にある. しかし M の定義式は統計的性格をもつたものであるから, M および r の広い範囲に亘つて系統的な外れがなく適用されればよろしい.

なお, ここで用いた資料には計器の周期特性の補正が為されていないが, それぞれ大体忠実な範囲について議論されている.

謝 辞

爆破地震動研究グループおよび極微小地震研究グループのデータを使用させて頂いたことを感謝します.

文 献

- Asada, T., 1957, "Observation of Near-by Microearthquakes with Ultra Sensitive Seismometers", *Journal of Physics of the Earth*, **5**, 83-113.
- Carder, D. S. and Cloud, W. K., 1960, "Ground Motion Generated by Nuclear Explosions", *Proceedings of 2nd World Conference on Earthquake Engineering*.
- Gutenberg, B. and Richter, C. F., 1942, "Earthquake Magnitude, Intensity, Energy and Acceleration", *B. S. S. A.*, **32**, 163-191.
- , 1956, "Earthquake Magnitude, Intensity, Energy and Acceleration (2nd paper)", *B. S. S. A.*, **46**, 105-145.
- Kawasumi, H., 1951, "Measures of Earthquake Danger and Expectancy of Maximum Intensity throughout Japan as Inferred from the Seismic Activity in Historical Times", *B. E. R. I.*, **29**-.
- Matumoto, T., 1960, "On the Spectral Structure of Earthquake Waves —The Relation between Magnitude and Predominant Period—", *B. E. R. I.*, **38**, 13-27.

- 村松郁栄, 1962, “薬量, 距離, 振幅の関係”, 爆破地震動研究グループ会報 No. 20, 51-70.
- Muramatu, I., 1962 b, “Estimation of Earthquake Danger with Due Consideration on the Vibrational Characteristics of Earthquake Motion”, Science Report of Gifu University, Vol. 3, No. 1, 91-114. —Proceedings of National Symposium on Earthquake Engineering, Tokyo, 1962, 2-12.
- Richter, C. F., 1935, “An Instrumental Earthquake Magnitude Scale”, B.S.S. A., **25**, 1-32.
- 坪井忠二, 1954, “地震動の最大振幅から地震の規模 M を定めることについて” 地震 **2**, **7**, 135-193.
- , 1957, “地震のマグニチュードについて”, 地震 **2**, **10**, 6-23.
- Wadati, K., 1931, “Shallow and Deep Earthquakes (3rd paper)”, Geophys. Mag., **4**, 231-283.
- Catalogue of Major Earthquakes which Occurred in and near Japan (1926-1956), Japan Meteorological Agency, 1958.
- 気象要覧, 中央气象台, 1951 年まで刊行.
- 地震月報, 気象庁, 1952 年より刊行.