ラブ波の特性方程式を等角写像で 表わす方法 (2)

北海道大学理学部 地球物理学教室 田治米鏡二・岡田 広

(昭和 42 年 5 月 29 日受理)

A Way to Conformal Mapping of the Characteristic Equation for LOVE-type Waves (2)

Kyozi TAZIME and Hiroshi OKADA

Department of Geophysics, Faculty of Science,
Hokkaido University

(Received May 29, 1967)

Following the previous paper (TAZIME (1966)), numerical calculations have been carried out with the electronic computer. Conformal mappings of wave number ξ on frequency ω -plane are obtained in which $\gamma = \omega/\xi$ was used as a gobetween. Complete RIEMANN sheets have not been constructed. Only a cut runs from one of singular points parallel to the imaginary axis. Overlaps of ξ on ω -plane are avoided by the cut. Two sheets thus decided correspond in some respect to those exhibited by GILBERT (1964). A higher mode has been also investigated in connexion with the ground mode. Using the present mappings, the contour integration on ω -plane may be executed along any path, for instance not only the path of the stationary phase but also that of the steepest descent, when complete RIEMANN sheets will be obtained.

5. 数値計算の方針

前節 (田治米鏡二 (1966)) の (4.2) に, たとえば $\xi < 0$ なる条件を付加すれば, m_1 の自由度はなくなる. しかし, 未だこのような物理的な条件は考慮せず, 単に

$$\cos m_1 \pi > 0 \quad (5.1)$$

と仮定する. すると, (4.5) は単に

$$\phi = \text{Tan}^{-1}(y'/x') - \theta_1' \quad (5.2)$$

と書かれる. 後になつて, m_1 を奇数に変えなくなつた場合には, (5.1) の仮定から得られた図形を, 原点を中心にして, 単に π だけ回転させればよい.

今までに述べた数値計算の方針を電子計算機に実行させると, $\delta = 0$ に対する計算は行なえぬ. しかも, $\delta = 0$ 付近では図形の変化が激しくなる場合が予想される. しかし, 実用上は 1×10^{-5} を以つて 0 に代用させることができる. また, $\delta < 0.1$ に対しては, δ の刻みをこま

かくすることにより、図形の追跡をやさしくすることができる。

これまでの段階では、 η_2 や $\hat{\eta}_2$ の正負は任意であるかのごとくであつた。しかし、特性方程式 (1・1) が得られる途中で、すでに $z = \infty$ における境界条件が考慮されていたのである。

最下層内の変位を $\exp\{i(\omega t - \xi x - \eta_2 z)\}$ に比例するとみなした場合には、 $z \rightarrow \infty$ で変位が無限大にならぬような特性を持つた波のみが選ばれている。このような波は、数学的に

$$\hat{\eta}_2 \leq 0 \quad (5.3)$$

なる条件を有していなければならぬ。ただし、このことは最終的にリーマン面を作る際にふたび考慮されねばならぬので、今は (5.3) には触れず、等角写像図の作成を急ぐことにしよう。

等角写像の試算に用いた数値例は次のとおりである。

$$\rho_2/\rho_1 = 1, \quad v_2/v_1 = 2^{1/2}, \quad N'' = \pm 1. \quad (5.4)$$

$v_2/v_1 \gg 1$ であると、特異点が ω -平面の実軸に接近するので、その付近で図形が特に混み入る。試算としては、それを避けるために、 $v_2/v_1 \approx 1$ の数値例が選ばれたのである。

6. 等角写像図

6.1 γ の上半面、すなわち $\delta = 0 \sim \pi$ の間の $M(\omega, \gamma) = 0$ を ω -平面に写像してみると、Fig. 7 のごとくあつた。 γ の単位は v_1 であり座標軸の単位は v_1/H である。この図では、 $\pi/2 > \delta > 0$ を $N'' = -1$ に、 $\pi > \delta > \pi/2$ を $N'' = 1$ に対応させてある。この図形を複雑にしている最大の原因は○印で示されている特異点の存在にある。この特異点はかつて筆者等の1人(田治米鏡二(1965 a))が指摘した点に他ならぬ。単に1枚の ω -平面上に描くと、Fig. 8(a) に拡大して示してあるごとく、0.40 よりも小さい $\delta = \text{一定}$ の点線の曲線はこの点を含む閉曲線を作る。かくのごとき多価性と図形の混雑とを防ぐためには、この特異点から始まる適当な割目を入れて、リーマン面を作らねばならぬ。今のところ、いかなる条件を有する割目が最も適当であるかわからぬので、Fig. 7 に波型の線分で示してあるごとく、虚軸に平行な割目を入れて、 ω -平面を上下2枚に分けた。物理的な意義は未だ明らかでないが、こうすることによって、重なり合いのない写像図が得られた。これら上下2枚の写像図を見ると、予想どおり、 $|\gamma| = \text{一定}$ の実線の曲線群と $\delta = \text{一定}$ の点線の曲線群とは互いに直交している。すなわち、等角写像である。

Fig. 7 (下) に◎印で示されている特異点は $\xi = 0, \omega \approx 0$ に対応した点である(田治米鏡二(1965 (b))). この図に▷印で示されている点は、予期していなかつたが、やはり特異点らしい。この点近傍の拡大図が Fig. 8(b) である。

Fig. 7. Conformal mappings of γ on ω -plane where $\rho_2/\rho_1 = 1$, $(v_2/v_1)^2 = 2$ and $\delta = 0 \sim \pi$. A unit of ω is v_1/H . Parameters are $|r|/v_1$ and δ .

Fig. 8 Magnified mappings of Fig. 7 near the singular points $\circ$ and $\triangleright$. A unit of ω is v_1/H .

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E} &= \eta_1 H \sec^2 \eta_1 H + \tan \eta_1 H + \chi^2 \cot \eta_1 H, \\ \Omega &= \eta_1 H \sec^2 \eta_1 H + \tan \eta_1 H + (\chi v_1/v_2)^2 \cot \eta_1 H \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

とおくと, (3.1) から

$$-M_{\xi}(\omega, \xi) = (\xi/\eta_1^2)\mathcal{E}, \quad M_{\omega}(\omega, \xi) = \{\omega/(v_1\eta_1)^2\}\Omega. \quad (6.2)$$

同様にして,

$$-M_r(\xi, \gamma) = \{\xi\omega/(v_1\eta_1)^2\}\Omega, \quad M_{\xi}(\xi, \gamma) = (\eta_1 H/\xi) \sec^2 \eta_1 H,$$

$$-M_r(\omega, \gamma) = \{\omega^2/(\eta_1^2\gamma^3)\}\mathcal{E}, \quad M_{\omega}(\omega, \gamma) = (\eta_1 H/\omega) \sec^2 \eta_1 H.$$

ゆえに,

$$d\omega/d\gamma = \{\xi^3/(\eta_1^3 H)\} \cos^2 \eta_1 H \cdot \mathcal{E}, \quad (6.3)$$

$$d\xi/d\gamma = \{\gamma \xi^3/(v_1^2 \eta_1^3 H)\} \cos^2 \eta_1 H \cdot \Omega. \quad (6.4)$$

さて, $|\omega| \asymp \infty$ であつ $|\eta_1| = \infty$ なるためには, (1.11) と (3.2) とから

$$\sin 2\theta_1'/\sin 2\delta = (|\gamma|/v_1)^2 \cos 2\theta_1' \{(|\gamma|/v_1)^2 \cos^2 \delta - 1\}^{-1} = 0.$$

しかし, この連立方程式を満たす θ_1' は存在しない.

次に, (6.2) と (6.3) とを比較すると, (6.1) を見ればわかるごとく, $\cos \eta_1 H = 0$ は (6.3) の右辺を 0 にしない. ゆえに, $d\omega/d\xi = 0$ と $d\omega/d\gamma = 0$ とは同一の ω によつて満される. ゆえに, 予期に反した根が $d\omega/d\gamma = 0$ に含まれていたとすると, それは $\mathcal{E} = 0$ の中で見落されていたことになる. 同様に, $d\xi/d\gamma = 0$ に関しては, $\Omega = 0$ の中に見落しがあつたことになる.

以前の考察 (田治米鏡二 (1965 a)) では, $\mathcal{E} = 0$ の根を求めた際の δ は第 1 象限に限られていた. しかるに, Fig. 7 の $\triangleright$ 点は第 2 象限の δ に対応している. (P, Q) と (θ_1', θ_2') との関係は, (3.13) と (3.14) とから

Fig. 10. Conformal mappings of ξ on ω -plane where $\rho_2/\rho_1 = 1$, $(v_2/v_1)^2 = 2$ and $\delta = 0 \sim \pi$. A unit of ω is v_1/H . Parameters are ξH and ξH . Full lines indicate the real part and dotted lines the imaginary part.

$$\left. \begin{aligned} \theta_1' - \theta_2' &= \tan^{-1}(P/Q), \\ \theta_1' + \theta_2' &= \tan^{-1} \left\{ [(\rho_1/\rho_2)^2 (v_1/v_2)^2 (P^2 + Q^2) + 1] \{ (\rho_1/\rho_2)^2 (v_1/v_2)^2 (P^2 + Q^2) - 1 \}^{-1} (P/Q) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

$v_2 > v_1$ で δ が第 1, 3 象限にあれば $\theta_1' - \theta_2' < 0$ なので, (6.5) により $P/Q < 0$. δ が第 2, 4 象限にあれば $\theta_1' - \theta_2' > 0$ なので, $P/Q > 0$. このような事情のために, $\triangleright$ 印の特異点は見落されていたのである.

6.2. γ の上半面を ξ -平面に写像すると Fig. 9 のごとくなる. 前図と同じ要領で割目を入れた. ただし, 今度の特異点 $\circ$ および $\triangleright$ は $\Omega = 0$ の根であり, $\odot$ 印の特異点は $\omega = 0$, $\xi \asymp \infty$ に対応している. 次に, 理論的な考察をしやすいするために, Figs. 7 と 9 とを用いて ξ を ω -平面上に写像した. このように合成して得られたのが Fig. 10 である. 特異点の位置は Fig. 7 と全く同じであり, 割目も同じにしてある. $\circ$ 印で示した以外の特異点からも割目を入れぬと, 完全なリーマン面を作りぬ. しかし今は, 重なりのない状態で図形を大観し

Fig. 11(a). Magnified mappings of Fig. 10 near the singular point $\circ$. A unit of ω is v_1/H .

Fig. 11(b). Magnified mappings of Fig. 10 near the singular points $\circ$ and $\triangleright$. A unit of ω is v_1/H .

たいので、割目の数は最小限度に止めてある。特異点○, ◎および▷近傍の拡大図が Fig. 1 a および 11 b である。

7. モードの分類

Fig. 10 (上) を見ると、特性方程式 $M(\omega, \xi) = 0$ の実根 $\bar{\omega}$ は負の領域にしか存在せぬかのごとくである。しかし、第4節で述べた種々な自由度のために、これらの図形は実軸または虚軸に対しこれと対称な図形にもなりうる。今は未だ、その自由度に何の制限も加えていない。Fig. 10 (下) に太い点線で描いてある $\xi = 0$ の曲線は流体を扱った ROSENBAUM (1960) の複素根に対応している。ROSENBAUM によれば、この曲線と ω の実軸との交点は2重根なので、 $M_\omega(\omega, \xi) = 0$ なる条件を満している筈である。すると、 $d\xi/d\omega = 0$ なので、この交点は ξ -平面上の特異点▷に対応する。

次に、GILBERT (1964) にならつて、 $\xi = 0$ に対する ω の分類を行なつてみる。特性方程式は $\tan \eta_1 H = i(\mu_2/\mu_1)(\eta_2/\eta_1)$ であつて、この式の左辺は次のごとく実数部と虚数部とに分解される：

$$\tan \eta_1 H = (\tan \bar{\eta}_1 H \operatorname{sech}^2 \hat{\eta}_1 H + i \tanh \hat{\eta}_1 H \sec^2 \bar{\eta}_1 H) / (1 + \tan^2 \bar{\eta}_1 H \tanh^2 \hat{\eta}_1 H).$$

7.1. $\xi = 0$ でかつ $\omega \neq 0$ とすると、 $\gamma = \infty$ であつて、Fig. 10 (下) の◎印がこの点に他ならぬ。この際は、特性方程式は次のごとくなる。

$$\tan(\omega H/v_1) = i(\rho_2/\rho_1)(v_2/v_1)$$

この式の右辺の $(\rho_2 v_2)/(\rho_1 v_1)$ は音響インピーダンスと呼ばれている物理量である。上式の左辺を実数部と虚数部とに分解すると、次の連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tan(\bar{\omega} H/v_1) \operatorname{sech}^2(\hat{\omega} H/v_1) / \{1 + \tan^2(\bar{\omega} H/v_1) \tanh^2(\hat{\omega} H/v_1)\} &= 0, \\ \tanh(\hat{\omega} H/v_1) \sec^2(\bar{\omega} H/v_1) / \{1 + \tan^2(\bar{\omega} H/v_1) \tanh^2(\hat{\omega} H/v_1)\} &= (\rho_2 v_2)/(\rho_1 v_1). \end{aligned} \right\}$$

上式において、 $\bar{\omega} = 0$, $\hat{\omega} \neq 0$ とすると、 $\tanh(\hat{\omega} H/v_1) = (\rho_2 v_2)/(\rho_1 v_1) < 1$ でなければならぬ。 $\bar{\omega} \neq 0$, $\hat{\omega} = 0$ とすると、 $(\rho_2 v_2)/(\rho_1 v_1) = 0$ でなければならぬ。 $\bar{\omega} \neq 0$, $\hat{\omega} \neq 0$ とすると、 $\tan(\bar{\omega} H/v_1) = \infty$, $\tanh(\hat{\omega} H/v_1) = (\rho_1 v_1)/(\rho_2 v_2) < 1$ でなければならぬ。しかるに、(5.4) の数値例に対し許されるのは最後の場合だけである。ゆえに、

$$\bar{\omega} H/v_1 = (2n+1)\pi/2, \quad \hat{\omega} H/v_1 = (1/2) \log \{[(\rho_2/\rho_1)(v_2/v_1)+1]\{(\rho_2/\rho_1)(v_2/v_1)-1\}^{-1}\} > 0.$$

一方、今の場合は $\eta_2 = \omega/v_2$ なので、上に求めた結果により、 $\hat{\eta}_2 > 0$ 。

7.2. $\xi = 0$ でかつ $\omega = 0$ とすると、 $\gamma \neq \infty$ である。この際は、特性方程式は次のごとくなる：

$$\tan[\xi H \{(\gamma/v_1)^2 - 1\}^{1/2}] = i(\mu_2/\mu_1) \{(\gamma/v_2)^2 - 1\}^{1/2} \{(\gamma/v_1)^2 - 1\}^{-1/2}.$$

$\xi = 0$ において上式が成立するためには, $\gamma = v_2 = \text{実数}$ でなければならぬ. この際に, $\eta_2 = \xi \{(\gamma/v_2)^2 - 1\}^{1/2}$ にいきなり $\gamma = v_2$ を代入すると, $\eta_2 = 0$ となるので, この点付近の $\hat{\eta}_2$ の符号を知ることができぬ. ξ を 0 より少し大きな実数, γ を v_2 より大きな実数とすると, 特性方程式に根はない. γ を v_2 より少し小さい実数とすると, $\eta_2 = \pm i\xi \{1 - (\gamma/v_2)^2\}^{1/2}$ なので,

$$\tan [\xi H \{(v_2/v_1)^2 - 1\}^{1/2}] = \mp (\mu_2/\mu_1) \{1 - (\gamma/v_2)^2\}^{1/2} \{(v_2/v_1)^2 - 1\}^{-1/2}.$$

この式の右辺は正でなければならぬので, 正の記号を採用すべきである. すると, これに応じて, $\hat{\eta}_2 < 0$ であるべきことがわかる.

GILBERT 流にいうと, 7・1 は shear organ pipe mode であつて, リーマン面の (+) 面についている. これに反し, 7・2 は simple acoustic wave guide にはなかつた場合であるが, (-) 面についていて, 第 0 次のノルマル・モードである. GILBERT のごとく, ξ を実数に限り, 0 から次第に大きくすると, shear organ pipe mode は遂に (-) 面に移り, その際に第 1 次の rocked mode, すなわちノルマル・モード, につながる. Fig. 10 を GILBERT 流に眺めると, 上図を (-) 面に, 下図を (+) 面に対応させることができる. ただし, これは単なる形式的な対応のさせ方であつて, GILBERT の定義した (-) 面および (+) 面とは内容に喰い違いがある. なぜならば, Fig. 10 の割目は $\eta_2 = 0$ に対応する点から始まっているのではないからである.

8. γ の下半面の写像および高次のモードへの移り方

8・1. Fig. 7 に示した γ の上半面の写像の中で, $|\gamma|/v_1 = 0.6, 1.15, 1.6$ および 2.0 だけを抜き出して示すと Fig. 12 の実線のごとくなる. しかるに, (4.14) と同様にして,

$$\phi(\pi + \delta, N'', m_1 = e) = \pi + \phi(\delta, N'', m_1 = e). \quad (8.1)$$

ゆえに, γ の下半面の写像は同図に点線で示した曲線群のごとくなる.

一方, (5.1) の仮定に反し, m_1 を奇数とすると, (4.5) により

$$\phi(\pi + \delta, N'', m_1 = o) = \pi + \phi(\pi + \delta, N'', m_1 = e). \quad (8.2)$$

ただし, (8.1) および (8.2) の e と o とはそれぞれ偶数と奇数とを意味している. さて,

(8.1) と (8.2) とから

$$\phi(\pi + \delta, N'', m_1 = o) = \phi(\delta, N'', m_1 = e). \quad (8.3)$$

ゆえに, Fig. 12 の点線はふたたび実線に戻つてしまう. 実線の曲線群の傍に $\pi \rightarrow 2\pi$ と記してあるのはその状況を意味している.

$|\gamma|/v_1 = 0.6 < 1.0$ の閉曲線は特異点を全然含まぬので, 閉曲線上の δ の 0 から 2π までを

Fig. 12. Conformal mappings of a whole plane of γ on ω -plane where $\rho_2/\rho_1=1$, $(v_2/v_1)^2=2$ and $\delta=0\sim 2\pi$. A unit of ω is v_1/H .

ω -平面上に 1 対 1 に対応させることができる。これに反し、 $|\gamma|/v_1 = 2.0 \geq 1.75$ の閉曲線は $|\gamma| = \infty$ に関する特異点◎を含むので、 $\delta = 0 \sim \pi$ と $\delta = \pi \sim 2\pi$ とがそれぞれ同一の ω に対応する。すなわち、◎印で示した点は $\gamma = \infty$ に関する 2 価の分岐点である。この分岐点から始まる $\delta = 0$ の曲線を追跡すると、①、②、③、…の経路をたどり ω -平面の原点⑦で終る。同様に、 $\delta = \pi$ の曲線は①から順を追うて原点⑦に至る。

Fig. 7 について説明したごとく、Fig. 12 の実線の曲線群は $\pi/2 > \delta > 0$ を $N'' = 1$ に対応させてある。しかるに、Table 4 に挙げてあるごとく、 N'' の符号すなわち $\cos m\pi$ の符号には未だ任意性が残されている。しかも、公式 (4.11) および (4.14) の N'' には符号の制限はない。ゆえに、今までとは逆に、 $\pi/2 > \delta > 0$ を $N'' = 1$ に、 $\pi > \delta > \pi/2$ を $N'' = -1$ に対応させて写像すれば、 ω -平面の虚数軸に対称な図形が得られる。

8.2. (5.4) に挙げた数値例の中で N'' のみを変え、

$$\rho_2/\rho_1 = 1, \quad v_2/v_1 = 2^{1/2}, \quad N'' = \pm 3 \quad (8.4)$$

とすると、Table 4 について説明したごとく、ノルマル・モードを基準にした次数では、(5.4) よりも 1 次だけ高次のモードが得られる。今度の場合の γ の上半面を ω -平面に写像すると Fig. 13 のごとくなる。 $N'' = \pm 1$ の場合と同様な方針によつて、○印の特異点から虚軸に平行な割目が入れてある。

Fig. 13 Conformal mappings of γ on ω -plane where other numerical values of (5.4) are reserved but $N'' = \pm 3$. A unit of ω is v_1/H . Parameters are $|\gamma|/v_1$ and δ .

謝 辞

この論文の数値計算は 北大計算センターの NEAC 2203 G に依つた。同計算センターの関係者各位に感謝する。

文 献

- GILBERT, F., 1964, Propagation of Transient Leaking Modes in a Stratified Elastic Waveguide, *Rev. Geophys.*, **2**, 123~153.
 ROSENBAUM, J. H., 1960, The Long-time Response of a Layered Elastic Medium to Explosive Sound, *J. G. R.*, **65**, 1577~1614.
 田治米鏡二, 1965a, 群速度が 0 になる LOVE 波の周波数, *地震*, **18**, 82~93.
 " , 1965b, 特性方程式の複素根, *地震*, **18**, 133~141.
 " , 1966, ラブ波の特性方程式を等角写像で表わす方法, *地震*, **19**, 135~146.