マグマ生成の数学モデル*

金沢大学理学部地学数室 河野芳輝・中井重幸
(昭和 47 年 11 月 15 日受理)

Mathematical Model of Magma Generation

Yoshiteru KONO and Shigeyuki NAKAI

Department of Earth Sciences, Faculty of Science, Kanazawa University
(Received November 15, 1972)

Melting processes within the earth will be classified ideally into the following three cases: melting in pure-phase system; in completely solid solution system; and in eutectic point system. From the mathematical point of view, these three cases can be reduced to more elementary two processes, *i.e.*, pure-phase melting (only one melting curve is defined, and temperatures are fixed at this curve until the system becomes completely molten state), and solid solution melting (two types of melting curves, solidus and liquidus, must be defined, and the temperature between these curves can be rising if heat supply is sufficient).

The pure-phase melting model can be simulated by following method; if temperature reaches the melting curve at some computational stage, the temperature is fixed at that point and an excess temperature (computed temperature minus melting temperature) is used to evaluate consumption of latent heat at that point.

On the other hand, in the solid solution melting model, slow temperature raise between solidus and liquidus can be regarded as an apparent increase of specific heat at that state. A multiplication factor of specific heat can be determined from a value of (latent heat)/(temperature difference between liquids and solidus).

Other modification of melting processes is a possible increment of thermal conductivity at molten state. An apparent increment of thermal conductivity may be estimated if convective movement occurs within the magma reservoirs.

Simulation programs for these melting processes are evaluated from heat energy conservation and from agreements of analytical and computational values at steady state.

As a result, it is confirmed that magma generation processes can be simulated by both pure phase melting model and solid solution melting model.

Melting in eutectic point system can also be simulated with a combination of the above two models.

§1. はじめに

地球内部での熱的諸過程のうちで溶融過程は多くの現象において重要な役割を果している。例えば、(1) 宇宙塵から地球を創り、その地球内部でコアとマントルを分離させる過程、(2) 始

源マントルの分化、始源地殻の形成の過程、(3) マントルからの地殻物質の分化、ゲンブ岩質のマグマの生成や地殻の再溶融の過程等である。また、(4) 溶融物質（マグマ）の移動は地球の熱史をとおして重要な熱輸送機構であり、さらに局所的には変成作用や地殻熱流量異常の原因として作用している。

このように重要な溶融過程は、単に温度が上がって物質が溶けるというような想像としてでなく、溶融過程を支配するいくつかの物理法則に基礎をおいて議論されなければならない。その上で地球内部各部分で溶融がおこるための条件、溶融が進行してゆく過程、マグマが移動する機構、マグマが結晶分化しながら固化してゆく過程などを具体的に研究したい。

溶融・固化の過程には潜熱の出入りがともない、それによつて温度分布・温度変化は大きな影響をうける。また、溶融・固化の現象は、本質的に非定常な過程である。

一方地球の場の中で考えるとき、その構成物質は一般に純相ではないので融点に幅がある（液相線、固相線）し、融点や鉱物組成は圧力の影響も受ける。さらに、生成したマグマの移動およびマグマ内での結晶分化作用や、その過程での結晶と液体のふるまい等が、熱的にも、鉱物組成的にも大きな影響を与える。

このように、地球内部での溶融・固化の過程は非定常的であり、複雑であるので、計算機用の数学モデルを作つて考える方が有利である。この報告は、上記の問題のうち、最も単純な場合について、溶融過程の検討を行なうことを目的としている。したがって、マグマの移動や結晶分化の過程についての議論は別の機会にゆずる。

計算には、金沢大学計算センター FACOM-230-35 [課題番号 4537AA9101 (中井), 4533BA 4029 (河野)] を使用した。

§ 2. 溶融過程の分類

地球科学的にみて意義がある溶融過程は、基本的には次の三通りでであろう。

(a) 系が純相の場合

物理実験で行なうスズや鉛の融点の測定や、純粋のファイアライト (Fe_2SiO_4) や石英 (SiO_2) の融点を決める場合がこれに当る。この場合、温度は融点に達したあと潜熱を吸収しおわるまで上昇しない。この系を徐々に加熱してゆくと、ある位置の温度と時間との関係は Fig. 1 (a) のようになる。

(b) 系が固溶体をなす場合

上部マントルの問題を考えるとき最も重要な成分であるオリビン ($(\text{Mg}, \text{Fe})_2\text{SiO}_4$) がこの場合に当る。簡単のため 2 成分系を考えると模式的な相図は Fig. 1 (b) のようになる。このと

Fig. 1. Phase diagrams and melting processes for various systems. (a) Pure-phase system. (b) Completely solid solution system. (c) Eutectic point system. T : temperature, t : time, T_S : solidus, T_L : liquidus, T_E : eutectic melting point.

き、成分 P の物質は、 T_S (固相線) から T_L (液相線) の間で潜熱を吸収する。その間、温度上昇は遅くなるはずである。時間との関係を Fig. 1 (b) の上図に示す。

(c) 系が共融点をもつ場合

例えばアノーサイト ($\text{CaAl}_2\text{SiO}_8$) と SiO_2 よりなる系の場合、Fig. 1 (c) に示すような相図になる。このとき、ある組成をもった物質は固相線に達したあと、共融点 E に対応する組成の液が出つくすまで温度は上昇できない。それ以後は、液相線にそつて、液相と固相が反応しながら昇温してゆくので、固溶体の場合と同様になる。したがつて、この系の温度変化は Fig. 1 (c) の上図のようになるはずである。すなわち、点 E に対応する液が出つくすまでは (a) の純相の場合と同様になり、それ以後は (b) の固溶体の場合と同様になる。

故に、溶融過程を熱的な面からのみ見る場合には、(a) と (b) の場合をあつかえばよいことになる。

§ 3. 溶融過程の数学モデルの問題点

本報告では、溶融・固化にともなう非可逆的な変化 (マグマの移動、結晶分化作用等) は考慮しないので、溶融と固化とは潜熱の符号のみが逆の過程であるとしてとらえることができる。したがつて、以後溶融過程の場合を例にとつて述べることにする。

さて、均質な媒質中の温度が上昇し、ある場所が融点に達したとしよう。潜熱を吸収しつづかないうちは、その点の温度上昇は停滞するか徐々になるはずである。(Fig. 1)

ここで計算機用の数学モデルを作る場合、次のような困難が生じることに気がつく。なお、この数学モデルを作る場合、空間を有限な大きさ ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$) の格子できざまなければならないことと、温度はこのとびとびの格子点上でしか定まらないことに注意する必要がある。

(1) 温度分布を問題にしている領域の広がり比べ、溶融がおこる領域は一般にごく一部分である。特に、溶融の初めは原理的に無限小の大きさである。したがって、微小部分である溶融域を計算にとり入れるためには、空間のきざみをそれに合つたように小さくとらなければならない。しかし、そうすることは、計算時間および計算機記憶容量の上からいつて限度がある。例えば C 層以上を考えると、その領域を 100 個にきざんでみても、 $\Delta z=4$ km となり、マグマの厚さは 0 か 4 km か 8 km か...ということになる。

(2) 溶融初期の段階を考えてみると、均質な媒質中に全く新しい媒質が生じたことになる。溶融した部分が成長し、一つの独立の媒質 (数格子点以上必要) としてあつかえるようになれば、境界条件によつて潜熱の出入りを計算にとり入れることができる。しかし、それまでの成長の過程でどう潜熱の吸収を処理するかという問題である。(1) が解決して Δz を小さくとしたとしても結局 (2) の問題からのがれることはできない。

この他、熱輸送方程式を差分的に解くことから生じる別の問題もあるが、それらは省略する。ここでは、(1) の問題は特別な場合以外、有限要素法の拡張か、計算機の進歩をまつ他ないと考え、より原理的な (2) の問題について考察する。

§4. 溶解過程の数学モデル

§2 で述べた溶解過程に対応する数学モデルは次のようになるだろう。

(A) 系が純相の場合: L-Model

融点 T_M に達すると潜熱を吸収し終るまで、温度を融点に一致させておく。各位置 (格子点) における潜熱の残存量 L_{res} を次式によつて計算する。

$$L_{\text{res}}^n = L_{\text{res}}^{n-1} - (T^n - T_M) \cdot C_p \quad (1)$$

ここで T^n は時間 $t=n \cdot \Delta t$ (Δt は時間の刻み) における温度であり、 $L_{\text{total}} > L_{\text{res}} > 0$ であれば、(1) の処理のあと $T^n \rightarrow T_M$ とする。 $L_{\text{res}}=0$ となれば完全に溶融したとみなす。このモデルのフローチャートを Fig. 2 に示す。図中の「PHASE」は媒質の状態を表わし、潜熱の残存量で定義する。すなわち、

$$\text{PHASE 1: } L_{\text{res}} = L_{\text{total}} \text{ Solid}$$

Fig. 2. Flow chart for pure-phase melting model (L-, and LK-model). L represents latent heat. (Slightly modified from REYNOLDS *et al.*, 1966).

PHASE 2: $0 < L_{res} < L_{total}$ Partial Melting

PHASE 3: $L_{res} = 0$ Total Melting

この方法を地球物理学的問題に適用した例としては、地球の熱史におけるマグマの熱輸送の役割を議論した REYNOLDS *et al.* (1966), LEE (1967, 1968) などあげることができる。

このモデルを以後、潜熱 L にちなんで L-Model と呼ぶことにする。

(B1) 系が固溶体をなす場合: C-Model

この場合、固相線と液相線の間で溶融が進行する。潜熱はこの間で吸収され温度上昇は遅くなる。このことは、見掛上、比熱が $L/\Delta T$ だけ増加したことに相当する。ここで ΔT は固相線と液相線の温度差で、 L は潜熱である。そこで、固相線をこえた部分の比熱 C_p を

$$C_p = C_{p0} + L/\Delta T = \beta \cdot C_{p0} \quad (2)$$

とおくことによつて潜熱の吸収を近似することにする。岩石の場合、 $L = 100 \text{ cal/g}$, $\Delta T = 100^\circ\text{C}$, $C_{p0} = 0.25 \text{ cal/g} \cdot \text{deg}$ 程度とすると、 $C_p = 1.25$, $\beta = 5$ となる。

このモデルを用いた地球物理学の議論には、地殻内の溶融過程をあつかつた河野 (1965) の

Fig. 3. Flow chart for solid solution melting model (C-, CK-, and KC-model).

論文がある。

このモデルを以後、C-Model と呼ぶことにする。そのフローチャートを Fig. 3 に示す。

一方、物質が溶融すると、組織が緊密化したり、対流的な運動がおこることにより見掛け熱伝導度が良くなることが期待される。例えば、マグマ層の Rayleigh 数を R_a として、TIKHONOV *et al.* (1970) は見掛けの熱伝導度 K が $K_{ef}/K=0.205 \cdot R_a^{1/4}+1$ となると述べている。 K はまわりの固体部分の熱伝導度である。この式が正しければ、マグマ層の厚さが 100 km の場合、 K_{ef} は約 3 倍になる。

そこで、L および C-Model とも、融点をこえた部分の熱伝導度を固体部分のそれよりも数倍大きくする修正モデルが考えられる。

(A2) LK-Model

L-Model の場合、融点は液相線一本であるから、それ以上の温度の部分の熱伝導度を α 倍良くすればよい。このモデルを LK-Model と呼ぶことにする。

$$T > T_M: K_{liq} = \alpha \cdot K_{sol} \quad (3)$$

(B2) CK-Model

C-Model の場合、どの融点で熱伝導度を変えるかによつてモデルが分かれる。そこで CK-Model と呼ぶモデルは次のような場合のものである。

$$T_L > T > T_S: C_{p1} = \beta \cdot C_{p\ sol}, K_1 = K_{sol}$$

$$T > T_L: C_{p2} = C_{p\ sol}, K_2 = \alpha \cdot K_{sol}$$

すなわち、完全溶融するまでは熱輸送能力が増さない場合である。

(B3) KC-Model

このモデルは、部分溶融が始まれば熱輸送能力も増すと考える場合である。すなわち、

$$T > T_S: C_p = \beta \cdot C_{p \text{ sol}}, K = \alpha \cdot K_{\text{sol}}$$

なお、熱収支の問題からはずれるが、マグマの熱輸送効果のみを見るモデルとして、KC-Model において、 $\beta=1$ とおいた場合に相当するモデルを考えておくことも有用である。すなわち、

(B4) K-Model

$$T > T_S: C_p = C_{p \text{ sol}}, K = \alpha \cdot K_{\text{sol}}$$

Table 1. Relationship between model names and parameters, α and β .

Model	$T_S < T < T_L$		$T_L < T$	
	C_p	K	C_p	K
L	1	1	1	1
LK	β	1	β	1
C	β	1	1	1
CK	β	1	1	α
K	1	α	1	α
KC	β	α	1	1

以上のような各モデルの特徴を Table 1 に掲げた。

なお、L, C 両モデルについては原理的なことは、すでに CARSLAW and JAGER (1959) の中に述べられている。ここでは、それを地球科学の問題に適用することと、両モデルをシミュレートした計算プログラムの妥当性と比較を行なうことが課題である。

また、

(C) N-Model

として、溶融過程をいつさい入れなかつた場合のモデルも考えた。このモデルは、溶融現象の特徴をとらえる上で一つの標準になる。これは、各溶融モデルにおいて $T_M \gg 1000^\circ\text{C}$ とした場合か、または、C-Model において $\beta=1$ とか、K-Model において $\alpha=1$ とした場合に相当する。

§ 5. 基本式とパラメター

一次元一層モデルとしてあつかう (Fig. 4)。このとき、基本式は非定常熱伝導方程式

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + H \quad (4)$$

である。境界条件は

$$\begin{aligned} z=0 \text{ (表面): } T &= 0 \\ z=D \text{ (底面): } Q_0 &= K(\partial T / \partial z)_D = \text{const.} \end{aligned} \quad (5)$$

とし、初期温度は、底面で融点曲線より少し低目とし、計算開始後、ただちに融点をこえるよ

うに Q_0 を与える.

$$t=0: T_0=az \quad (6)$$

式 (4) は前進型陽解法で解いた. すなわち,
 $T(z, t)=T(m \cdot \Delta z, n \cdot \Delta t)=T_m^n$ とするとき, (4)
 式より,

$$\begin{aligned} T_m^{n+1} = & T_m^n + r_m \{0.25(K_{m+1}^n - K_{m-1}^n) \\ & \times (T_{m+1}^n - T_{m-1}^n) \\ & + K_m^n (T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n)\} \quad (7) \end{aligned}$$

ただし

$$r_m = \Delta t / (\rho_m \cdot C_m \cdot \Delta z^2) \quad (8)$$

時間間隔 Δt は (4) 式の安定条件

$$(K_m / \rho_m \cdot C_m) \Delta t / \Delta z^2 \leq 1/2 \quad (9)$$

を常に満たすように各ステップ毎に選んでいる.

計算に用いた構造, 初期温度分布, 固相線 (T_S) (L および LK-Model では融点曲線), 液相線 (T_L) は, 各モデル共通である. 標準とした各パラメータを Table 2 に示す. ただし, これら構造や物性を示すパラメータは, 各種溶融モデルの比較検討のため仮に選んだものであり, 地球物理的妥当性は十分考慮されていないし, 当面その必要もないことを注意しておく.

(4) 式は熱伝導度が場所 (または温度) の関数であるときの式だから, 媒質中に熱伝導度が異なる部分があつても, ある程度は境界条件なしで計算できるはずである. しかし (4) 式を差分化した (7) 式は最も単純な差分式であるので, 溶融層ができてその境界で熱伝導度があまり大きく変化しすぎると正しい解を与えることができなくなる. $K_m = (K_{m+1} + K_{m-1})/2$ とおけば, $\alpha=2$ までは十分 (誤差 2%) であるが, それ以上だと理論解から大きくへだたる. したがって, 溶融すると熱伝導度が α 倍になるモデルの場合, 溶融層の境界で境界条件

$$(K \cdot \partial T / \partial z)_{\text{solid}} = (K \cdot \partial T / \partial z)_{\text{melt}} \quad (10)$$

すなわち, 境界点を i としたとき,

Fig. 4. Coordinate system.

Table 2. Parameters used in the present calculations.

ρ	4.0 gr/cm ³
C_p	0.25 cal/gr
K	0.005 cal/cm·sec·deg
H	0 cal/cm ³ ·sec
L	100 cal/gr
$T_S = T_M$	1000°C
T_L	1200°C
Q_0	1×10^{-6} cal/cm ² ·sec
Δz	5×10^5 cm (5 km)
D	100 km

$$K_{i-1}(T_i - T_{i-1}) = K_{i+1}(T_{i+1} - T_i) \quad (11)$$

を入れて境界温度 T_i を決めるようにした。

§6. 結 果

各モデルについて、初期温度分布から出発して、定常になるまで計算を行なった。ここで定常状態とは、温度変化が

$$|T_m^{n+1} - T_m^n| / T_m^n < 10^{-5} \quad (12)$$

になつたかどうかで判断した。

計算結果の妥当性をみる一つの基準は、計算によつて得られた定常温度分布が理論的に求められる定常解と一致しているか、あるいはそれに近づくかどうかである。溶融に際して熱伝導度が変わらない場合、Table 2 に掲げたパラメーターに対する理論的定常温度分布 T^* は

$$T^* = 20 \cdot z \text{ (km)} \quad (13)$$

である。

また、溶融とともに熱伝導度がよくなるモデルに対する理論的定常解も容易に求めることができる。各々のモデルに対する理論解は T^* とし破線で示してある。

溶融現象の特徴を見るために、溶融過程を入れなかつたモデル (N-Model) の結果も、各図に参考のために示した。溶融によつても熱伝導度が変わらないモデルの定常値は N-Model の値と一致する。

以下に示すように、ほとんどのモデルの定常値は理論解に一致した。一致しなかつたものもすべて、(12) 式の条件がゆるかつたために、一見定常になつたようにみえて計算が打切られたものである。また温度分布が T_s や T_L のすぐ近くから変化せず、ある程度 T_s や T_L をこえてから変化しているのは、格子間隔 Δz が 5 km と粗いことから生じたオーバーランである。 Δz さえ小さくすれば、この現象はなくなるはずである。

さらに、表面熱流量の時間的変化を示す図において曲線が段階的に変化しているのも、やはり Δz の大きさに関係している。すなわち、ある時間に i 番目の格子点が融点に達したとする。そこでは潜熱が吸収されるまで温度分布がほぼ固定される (L-Model) し、熱伝導度が変化して系の特性が不連続的に変化する (K の変化するすべてのモデル)。このような、 Δz だけ溶融層が前進することから生じる不連続的な変化と、そのような変化が生じた点から表面までの熱輸送の遅れ (time-lag) が段階状の変化をひきおこすのである。したがって、この場合も Δz を小さくすれば、なめらかな曲線になるはずである。

1) L-, LK-Model

Fig. 5. Time dependence of temperature distribution of L-model. Figures represent time intervals from an initial state ($t=0$). T^* shows a theoretical steady state temperature distribution.

Fig. 6. Temperature distribution of LK-model ($\alpha=4$). α is multiplied to thermal conductivity at non-molten state, and makes the one at molten state.

Fig. 7. Time dependent variations of surface heat flow of L-, and LK-models. For reference, results of N-, K- ($\alpha=4$), and C- ($\beta=2$) models are also shown. Theoretical steady heat flow is 1.0 H.F.U..

L-Model の温度分布の時間変化を Fig. 5 に示す。底からの熱流量が大きいので熱輸送が追いつかず、熔融層の温度勾配の方が大きくなっている。定常値は理論値と一致する。完全溶

Fig. 8. Temperature distribution of C-model ($\beta=2$). β is multiplied to specific heat at non-molten state, and makes the one at molten state.

融したら熱伝導度を良くする LK-Model ($\alpha=4$) の温度変化を Fig. 6 に示す。熱輸送が有効に行なわれるので、熔融層の温度勾配がゆるくなり、かつ現象は L-Model よりも速く進行していることがわかる。

Fig. 7 に、 α を変えたときの表面熱流量の時間的変化を示した。この図からも熱伝導度が良くならなければ、熔融現象によつて熱輸送が大幅におくれることがわかる。また熱伝導度の増加は、この遅れをとりもどす効果がある。比較のため、N-, K- ($\alpha=4$), および C- ($\beta=2$) Model の結果も示してある。

(2) C-, CK-Model

C-Model ($\beta=2$) の温度分布の時間的変化を Fig. 8 に示す。大体 L-Model と似た変化を示す。CK-Model ($\beta_1=2, \alpha_2=8$) も、LK-Model と同様、現象が速く進行する。表面熱流量の変

Fig. 9. Surface heat flow of C-, and CK-models. Results of N-, and K- ($\alpha=4$) models are also shown, for reference.

化も L-Model と C-Model, LK-Model と CK-Model の対応を示している (Fig. 9).

(3) K-, KC-Model

一方, 溶融による潜熱の吸収を考慮せずに, ただ融点をこえたら熱伝導度だけを良くする K-Model だと, 明らかに現象はすみやかに進行し, 潜熱を吸収している場合に比べて数倍速く定常に達する (Fig. 10). このことは, 溶融層内の対流的熱輸送効果が, 熱現象にとつていかに重要であるかをあらためて示すものである.

Fig. 10. Temperature distribution of K-model ($\alpha=4$).

Fig. 11. Temperature distribution of KC-model ($\alpha_1=4, \beta_1=4$).

溶融がおこると比熱も熱伝導度も大きくなる KC-Model のうち, 特に $\alpha=\beta$ の場合が数学的には興味深い (Fig. 11). それは式 (7) と (8) を見ればわかるように, 各々の変化を正確に相殺する場合だからである. このモデルの表面熱流量変化 (Fig. 12, KC-Model ($\alpha=\beta=4$)) に表われているように, また数式からも予想されるように, N-Model ($\alpha_1=\beta_1=1$ の場合と同等) とほぼ一致して変化している.

以上に示したように, 溶融過程は潜熱の吸収という過程を通して熱輸送過程を遅らせる. 一方, 溶融過程で発生したマグマは, その内部での対流的熱輸送によつてその遅れをとりもどさせる効果をもっている. さらに, ここでは考慮しなかつたが, マグマ層自体の移動があれば熱

Fig. 12. Surface heat flow of K- and KC-models.

Fig. 13. Temperature distribution of non-molten model (N-model).

輸送は一層効果的になるはずである。

(4) N-Model

比較のため、溶融過程の入っていない N-Model の地表熱流量は各々の図に示してある。温度分布を Fig. 13 に示す。

§7. 考 察

§6 の初めに述べたように、この問題では、空間格子間隔 Δz の大きさが、結果に無視できない影響をもたらす。その他、融点曲線の形状や物性定数の値がモデルの妥当性に関係するかもしれない。このうち、融点曲線の形状に関しては、(1) 深さと共に融点が直線的に増加する場合、(2) 同じく逆に減少する場合について検討し、実質的に無関係なことを確認した。ただし、(1) の場合、融点曲線の勾配 dT_M/dz が、

マグマ中の温度勾配 dT_m/dz よりも大きくなるとき問題が生じる。このとき、底からの熱流量を運ぶための dT_m/dz が、融点温度勾配より小さくてよい。しかし、一旦融点より下がると熱伝導度が悪くなり、したがって dT/dz が大きくなる。そこで再び融点をこえる。このように、温度は融点曲線をわずかに出たり入ったりする形になる。このような条件の場合、現実には熱伝導で熱輸送せずに対流で運ぶだろうから、温度分布は融点分布に一致するはずである。したがって上記の結果は、このような状態もシミュレートできたことを示している。

空間格子間隔 Δz の影響は、L-Model について調べてみた。Fig. 14 に Δz を 10 km, 5 km,

Fig. 14. Effects of space interval Δz upon the surface heat flow values.

および 2.5 km とした場合の表面熱流量の時間的变化を示した。定常温度分布はすべて一致した。理論的および経験的には、溶融過程が入らなければ、系を 6 点以上にわけると、温度変化に Δz の値はあまりきかない（例えば、CARSLAW and JAGER, 1959）。しかし、図に示したように、溶融過程が入ると Δz の値（すなわち格子点の数）が微妙に影響してくる。その理由は、 Δz が粗い程、格子点が一つ融点に達したかどうか、系全体に大きな割合を占めるからである。このことは §6 の前半で述べたことと同じである。

さて、各溶融モデルの妥当性を検討するための基準には、先に述べた定常値と理論値との一致以外に、熱収支が合うことという条件がある。すなわち、エネルギー保存則より、系への入力エネルギーと表面から放出された出力エネルギーとの差 H_1 は、系の温度上昇と溶融に使わ

Fig. 15. Explanatory schema of heat energy conservation. h_2 is energy consumed by temperature raise of the system. h_3 shows energy consumed by melting processes. (a) For L-model. (b) For C-model.

れたエネルギー H_2 に等しくならなければならない。この関係を図示すると Fig. 15 のようになる。すなわち

$$H_1 = \int_0^t (Q_0 - Q_s) dt \quad (14)$$

および、L-Model に対して

$$H_2 = \int_0^D \rho C_p (T - T_0) dz + \int_{z_m}^D L \cdot \rho dz \quad (15)$$

(温度上昇 h_2) (溶融 h_3)

また、C-Model に対して

$$H_2 = \int_0^D \rho C_p \cdot (T - T_0) dz + \int_{z_m}^D \rho \cdot (\beta - 1) C_p \cdot (T - T_s) dz \quad (16)$$

(温度上昇 h_2) (溶融 h_3)

となる。 D は底の位置、 z_m はマグマの上面の位置を表わす。各々について計算してみると、ほぼ定常状態に対して

$$\text{L-Model: } H_1 = 6.49 \times 10^9 \text{ cal, } H_2 = 6.75 \times 10^9 \text{ cal}$$

$$\text{C-Model: } H_1 = 7.03 \times 10^9 \text{ cal, } H_2 = 7.16 \times 10^9 \text{ cal}$$

となり、良く一致している。他のモデルについても同様である。したがって、熱収支の面からも、ここで扱ったすべての溶融過程の数学モデルは合格したといえる。

ここで扱った各種溶融モデルは、現実の溶融現象のシミュレーション・モデルとしてはごく初歩的なものである。現実には、(1) 一次元的ではなく、(2) 結晶分化作用等により、溶融・固化は必ずしも可逆的ではなく、また、(3) マグマ層自体の移動・浮上も起こることが考えられる。

(1) については、すでに §3 で述べた計算時間や記憶容量の問題の他に、マグマの形状が決して規則的な形をしていないということから生じる境界条件の複雑さの問題がある。これに(3)が重なれば、移動する不規則な形状の境界における境界条件という、いつそう困難な問題につきあたる。また(2)について、現実のマントル・地殻物質の熔融・固化をシミュレートしようと思えば、その系の相図と組成をすべて考慮に入れなければならない。相図は圧力の関数でもあるから、組成・温度・圧力の関数で、かつ多くの不連続点をもつ複雑な相図をどのように計算機に記憶させるかという問題がある。さらに、熔融・固化の過程で、当然、液相と固相各々の移動・分離がおこると考えなければならない。単純な系（例えば、完全固溶体をなす2成分系）について、上記の問題を一つずつ解決してゆくことは可能であり、フローチャートまではできている。(3)については、2種類の試みがなされている。その一つは、マグマ層内の対流的運動によつて、マグマ層の上面が溶け下面が固化する過程を考えるものである。初めからマグマ層がある場合について SHIMAZU (1961) が試み、マグマ発生からの同様な試みは河野 (1965), TIKHONOV *et al.* (1970) によつてなされている。それは次のように考える。例えば、マグマ上面 (z_m) での熱収支を考えると、境界で Δz だけ熔融するに要する熱エネルギーは、マグマ層側からの供給熱量と固体側への流出熱量との差に等しいはずである。すなわち、

$$L\rho\left(-\frac{\Delta z_m}{\Delta t}\right)=\left[K_m\left(\frac{dT_m}{dz}\right)_{z_m}+\rho_m C_m \bar{T}_m \bar{W}_m\right]-K\left(\frac{dT}{dz}\right)_{z_m} \quad (17)$$

同様にマグマ層の下面 (z_s) では、

$$L\rho\left(-\frac{\Delta z_s}{\Delta t}\right)=K\left(\frac{dT}{dz}\right)_{z_s}-\left[K_m\left(\frac{dT_m}{dz}\right)_{z_s}+\rho_m C_m \bar{T}_m \bar{W}_m\right] \quad (18)$$

ここで、 $\Delta z/\Delta t$ の負符号は境界が上方へ移動することを表わし、 $\bar{W}_m$; $\bar{T}_m$ はマグマ層中の平均対流速度と平均温度である。式 (17), (18) は、 z_s で放出された熱量が z_m に運ばれて熔融に使われることによつて、マグマ層が上昇することを表わしている。したがつて、一種のゾーン・メルティングである。 $\bar{W}$ が大きいとマグマ層自体の成長は止まり、薄くなりながら上昇してゆく。

マグマ上昇のもう一つの試みは、熱輸送の式に対流項を入れ、熔融によつて発生したマグマは、その位置でマグマ層をつくらずに、雫となつてストークスの法則にしたがつて密度差で浮上してゆくと考えられるものである (LEE, 1968)。これら2種類の方法は現実の過程の一面を各々表わしていると考えることができる。いずれにせよ、(3) だけの問題ならば、ただちに考慮することができる。

熔融過程は、地球の歴史——熱的・化学的進化——という大きな問題のみならず、現在の島弧下でのマグマ発生のメカニズムや、さらに各種の岩石形成等にとつて本質的なかわりをも

つものであるので、より現実的なシミュレーション・モデルの作製が必要である。

文 献

- CARSLAW, H. S. and J. C. JAGER, 1959, Conduction of Heat in Solids. Oxford Univ. Press, pp. 510.
- 河野芳輝, 1965, マントルからの熱流量と構造作用. 地震 2, 18, 154-168.
- LEE, W. H. K., 1967, Thermal History of the Earth. Ph. D. dissertation, Univ. of California, Los Angeles, pp. 344.
- , 1968, Effect of Selective Fusion on the Thermal History of the Earth's Mantle. Earth Planet. Sci. Lett., 4, 270-276.
- REYNOLDS, R. T., D. E. FRICKER, and A. L. SUMMERS, 1966, Effect of Melting upon Thermal History of the Earth. J. Geophys. Res., 71, 573-582.
- SHIMAZU, Y., 1966, Physical Theory of Generation, Upward Transfer, Differentiation, Solidification, and Explosion of Magmas. J. Earth Sci., Nagoya Univ., 9, 185-223.
- TIKHONOV, A. N., E. A. LUBIMOVA, and V. K. VLASOV, 1970, On the Evolution of Melting Zones in the Thermal History of the Earth. Phys., Earth Planet. Int., 2, 326-331.