複合物体の弾性定数

中央大学理工学部精密機械工学科 中野迪夫・中村孝一郎・小林直太

東京大学理学部地球物理学教室 竹 内 均

(昭和 48 年 4 月 26 日受理)

Dynamical Elastic Constants of Composite Materials

Michio NAKANO, Koichiro NAKAMURA and Naota KOBAYASHI

Department of Precision Mechanics, Faculty of Science and
Engineering, Chuo University

Hitoshi TAKEUCHI

Geophysical Institute, Faculty of Science, University of Tokyo

(Received April 26, 1973)

We measured bulk density and elastic wave velocities of composite materials, matrix and inclusions of which are epoxy resins and small iron balls, air bubbles and water drops, respectively.

Using the measured data, we calculated elastic constants and compared them with the Eshelby's theory on the elastic constants of composite materials.

We found that the agreement between the experimental and theoretical results are strongly effected by the shapes and distribution of the inclusions.

昭和 45 年 10 月に行なわれた地震学会秋季講演会において、筆者らは“複合物体の剛性率”と題する研究報告を行なった。その内容は、エポキシ樹脂を matrix とし、鉄粉および小鉄球を inclusion として作成した粒子分散型複合体の剛性率の動的測定結果を Eshelby の理論式と比較したものである。

その際、剛性率だけではなく、他の弾性定数についても、同様な測定結果を示す方がよいとの示唆をいただいた。そこで今回は、前回の報告に用いた試料について測定したヤング率、体積弾性率およびポアッソン比の結果を報告する。また同時に、鉄粉、鉄球以外の鉄の小形物体を追加した試料および気泡や水泡を封入した試料などについて同様な測定を行なった結果をも併せて報告する。

試料の作成法は、前回の報告で詳細に述べてあるので、今回はその大要のみを述べる。

エポキシ樹脂を matrix、鉄を inclusion とする試料では、matrix の中に鉄球を浮かすことがもつとも難しい。この対策については、前の報告で詳細に述べておいた。鉄球以外のものは、比較的混入が容易である。

エポキシ樹脂に気泡を封入することは、鉄球を浮かす場合よりも容易である。エポキシ樹脂が上部から固結していく途中で上部が少し固まりかけたときに、注射器で空気を注入してやればよいからである。この場合、数個の気泡を封入したいために、空気の注入を数回にわたって行なつた。しかし、注入された気泡は一つのものに集まりやすいために、結果としては大きい気泡が1つか2つくらいしか封入されていない試料が多かつた。

エポキシ樹脂に水球を封入することは、非常に困難であつた。エポキシ樹脂の上部が少し固まつた時に水を注入する場合、たいへん大きな抵抗力を受ける。このことは、気泡の場合からは推測できなかった。したがつて試料も僅かに1球しか封入されていないものばかりであつた。

試料の作成を全体的に見ると、気体、液体の封入法に今後一層の工夫が必要である。Fig. 1に試料の一例を示す。

(a) Epoxy resin.	(b) Iron powder inclusion.
(c) Iron ball inclusion.	(d) Iron thin bar inclusion.
(e) Iron net inclusion.	(f) Iron staple inclusion.
(g) Air bubble inclusion.	(h) Water drop inclusion.

Fig. 1. Composite samples

弾性定数の実験値

測定で直接得られる量は、試料の質量、寸法および試料を伝わる弾性波（P波とS波）の伝播時間である。これらの量を用いて、試料の見掛けの密度（ ρ gr/cm³）およびP波とS波の伝播速度 V_p (cm/sec) と V_s (cm/sec) が計算される。

matrix および inclusion の密度はあらかじめ与えられるものとし、これらを ρ_m , ρ_i (C・G・S 単位) とすれば、上の実験結果と組み合わせて次の諸量が決められる。

- ① 見かけの容積比： v

$$v = (\rho_m - \rho) / (\rho_m - \rho_i)$$

- ② 剛性率： μ

$$\mu = \rho V_s^2$$

- ③ ヤング率： E

$$E = \mu \{3 - V_s^2 / (V_p^2 - V_s^2)\}$$

- ④ 体積弾性率： K

$$K = \{3 \rho (V_p^2 - V_s^2) - \mu\} / 3$$

- ⑤ ポアッソン比： σ

$$\sigma = \{1 - V_s^2 / (V_p^2 - V_s^2)\} / 2$$

弾性定数の計算値

matrix, inclusion および合成物のそれぞれの弾性定数をつぎのように表記する。

	密 度	剛 性 率	ヤ ン グ 率	体 積 弾 性 率	ポ ア ッ ソ ン 比
matrix	ρ_m	μ_m	E_m	K_m	σ_m
inclusion	ρ_i	μ_i	E_i	K_i	σ_i
合 成 物	ρ_{cal}	μ_{cal}	E_{cal}	K_{cal}	σ_{cal}

上の表で μ_{cal} , E_{cal} , K_{cal} および σ_{cal} は合成物の理論値であり、これらは Eshelby の理論によつて、次のようにあたえられる。

- ① 剛性率： μ_{cal}

$$\mu_{cal} = \mu_m / (1 + Bv) \div \mu_m (1 - Bv)$$

- ② 体積弾性率： E_{cal}

$$K_{cal} = K_m / (1 + Av) = K_m (1 - Av)$$

- ③ ヤング率： E_{cal}

$$E_{cal} = 9 K_{cal} \mu_{cal} / (3 K_{cal} + \mu_{cal})$$

④ ポアッソン比： σ_{cal}

$$\sigma_{cal} = 0.5 E_{cal} / \mu_{cal} - 1$$

但し、式中の β , A および B は次式を使つて計算される定数である.

$$\beta = \frac{2}{15} \left(4 - \frac{\sigma_m}{1 - \sigma_m} \right)$$

$$A = \frac{K_m - K_i}{K_m} \frac{\mu_m + 0.75 K_m}{\mu_m + 0.75 K_i}$$

$$B = \frac{\mu_i - \mu_m}{(\mu_i - \mu_m) \beta + \mu_m}$$

なお①および②の最右辺は、見掛けの容積比 v があまり大きくない場合に使用できる近似式である.

今回の試料に用いた物質の弾性的な性質を示したのが Table 1 である. この場合水の粘性は考慮していない. β , A および B は matrix と inclusion を指定すれば決まる定数である. この実験では matrix はエポキシ樹脂で, inclusion は鉄, 空気および水である. それぞれの組み合わせについて計算した β , A , B の値が Table 2 に示されている.

Table 1. Elastic constants of simple materials.

物 質 項 目	エ ポ キ シ 樹 脂	鉄	空 気	水
σ (g/cm ³)	1.18	7.80	0	1.00
V_p (km/sec)	2.68	6.69	0.33	1.50
V_s (km/sec)	1.07	3.20	0	0
E (10 ¹⁰ dyne/cm ²)	3.81	206.0	—	—
μ (10 ¹⁰ dyne/cm ²)	1.36	80.0	0	0
K (10 ¹⁰ dyne/cm ²)	6.71	242.0	—	2.20
σ	0.41	0.29	0.50	0.50

Table 2. Calculated values of A , B and β .

Matrix	エポキシ樹脂		
Inclusion	鉄	空 気	水
ρ_m (g/cm ³)	1.18	1.18	1.18
μ_m (10 ¹⁰ dyne/cm ²)	1.36	1.36	1.36
K_m (10 ¹⁰ dyne/cm ²)	6.71	6.71	6.71
σ_m	0.41	0.41	0.41
σ_i (g/cm ³)	7.80	0	1.00
μ_i (10 ¹⁰ dyne/cm ²)	80.0	0	0
K_i (10 ¹⁰ dyne/cm ²)	242.0	0	2.20
β	0.442	0.443	0.443
A	-1.23	4.69	1.38
B	-2.18	1.79	1.79

Table 3 (a) から Table 3 (e) までは、鉄を inclusion にした場合の実験結果である. 鉄粉および鉄球についての結果は以前の研究報告に掲載したものと、ほとんど変わっていない. 今回の inclusion には新しくホッチキス金具, 金網および鉄棒が加えられている. ホッチキスは小形の無定形材, 金網は繊維状物体また鉄棒は骨格的な物体を想定してえられたものである.

Table 3. Results of the experiment.

(a) Iron powder inclusion.

試料番号	1	2	3	4	5
M (g)	14.77	32.87	37.85	43.01	25.98
L (cm)	2.00	5.74	3.06	2.93	1.88
D (cm)	2.79	2.39	2.89	2.76	2.69
V (cm ³)	12.23	25.75	20.07	17.53	10.66
T_p (μ sec)	7.44	22.35	11.71	12.00	7.61
T_s (μ sec)	21.19	58.54	32.72	32.32	21.75
ρ (g/cm ³)	1.21	1.28	1.89	2.45	2.44
v (%)	0.45	1.48	10.69	19.27	19.20
V_p (km/sec)	2.69	2.57	2.61	2.44	2.47
V_s (km/sec)	0.94	0.98	0.94	0.91	0.86
$\mu \times 10^{10} \text{C} \cdot \text{G} \cdot \text{S}$	1.08	1.23	1.65	2.02	1.82
E "	3.08	3.47	4.71	5.73	5.21
K "	7.29	6.78	10.68	11.94	12.45
σ	0.43	0.42	0.43	0.42	0.43

(b) Iron ball inclusion.

試料番号	1	2	3	4	5	6
M (g)	73.29	71.74	115.00	32.20	78.15	24.03
L (cm)	7.30	7.88	9.14	2.70	5.37	1.74
D (cm)	3.30	3.05	3.66	3.46	3.71	3.46
V (cm ³)	63.04	57.57	96.16	25.39	58.05	16.36
T_p (μ sec)	27.50	29.50	34.00	10.02	20.13	6.21
T_s (μ sec)	66.65	72.05	88.15	25.40	50.30	16.70
ρ (g/cm ³)	1.16	1.25	1.20	1.27	1.35	1.47
v (%)	0.30	1.03	0.27	1.39	2.60	4.41
V_p (km/sec)	2.68	2.67	2.69	2.69	2.67	2.80
V_s (km/sec)	1.11	1.10	1.04	1.06	1.07	1.04
$\mu \times 10^{10} \text{C} \cdot \text{G} \cdot \text{S}$	1.42	1.49	1.29	1.43	1.55	1.59
E "	3.97	4.18	3.68	4.02	4.34	4.52
K "	6.45	6.89	6.94	7.29	7.56	9.40
σ	0.40	0.40	0.41	0.41	0.41	0.42

(c) Iron thin bar inclusion.

試料番号	1	2	3
M (g)	52.92	40.94	65.76
L (cm)	6.37	6.23	7.09
D (cm)	2.94	2.52	2.85
V (cm ³)	43.24	31.07	45.23
T_p (μ sec)	11.45	15.60	18.63
T_s (μ sec)	57.20	55.65	63.53
ρ (g/cm ³)	1.22	1.32	1.45
v (%)	0.63	2.14	4.11
V_p (km/sec)	5.56	3.99	3.81
V_s (km/sec)	1.11	1.12	1.12
$\mu \times 10^{10} \text{C} \cdot \text{G} \cdot \text{S}$	1.50	1.66	1.82
E "	4.45	4.82	5.28
K "	35.70	18.81	18.63
σ	0.48	0.46	0.45

(d) Iron staple inclusion.

試料番号	1	2	3	4
M (g)	18.48	25.35	36.80	36.83
L (cm)	2.33	2.95	5.29	3.64
D (cm)	2.74	2.85	2.46	2.96
V (cm ³)	13.74	18.82	25.14	25.05
T_p (μ sec)	9.58	11.65	22.68	14.45
T_s (μ sec)	20.48	26.95	47.52	33.33
ρ (g/cm ³)	1.35	1.35	1.46	1.47
v (%)	2.52	2.55	4.32	4.44
V_p (km/sec)	2.43	2.53	2.33	2.52
V_s (km/sec)	1.14	1.10	1.11	1.09
$\mu \times 10^{10} \text{C} \cdot \text{G} \cdot \text{S}$	1.74	1.62	1.81	1.76
E "	4.74	4.47	4.91	4.86
K "	5.63	6.47	5.53	7.00
σ	0.36	0.39	0.35	0.39

(e) Iron net inclusion.

試料番号	1	2	3	4
M (g)	24.05	24.20	37.82	31.16
L (cm)	3.77	3.04	4.47	3.67
D (cm)	2.58	2.92	2.96	2.96
V (cm ³)	19.71	20.36	30.76	25.26
T_p (μ sec)	16.10	13.49	18.05	15.12
T_s (μ sec)	33.27	28.13	39.97	34.34
ρ (g/cm ³)	1.22	1.19	1.23	1.23
v (%)	0.63	0.17	0.79	0.79
V_p (km/sec)	2.34	2.25	2.48	2.43
V_s (km/sec)	1.13	1.08	1.12	1.07
$\mu \times 10^{10} \text{C} \cdot \text{G} \cdot \text{S}$	1.56	1.39	1.54	1.41
E "	4.20	3.75	4.23	3.89
K "	4.60	4.17	5.51	5.39
σ	0.35	0.35	0.37	0.38

Table 4. Results of the experiment. Air bubble inclusion.

試料番号	1	2	3	4	5	6
M (g)	38.29	27.58	19.49	46.31	49.38	46.58
L (cm)	3.70	2.98	2.96	5.88	6.00	5.90
D (cm)	3.36	3.19	2.72	2.97	3.07	3.01
V (cm ³)	32.75	23.77	17.13	40.72	44.39	41.96
T_p (μ sec)	13.83	11.98	11.87	24.50	24.50	24.50
T_s (μ sec)	35.40	28.64	28.62	54.55	54.75	55.06
ρ (g/cm ³)	1.17	1.16	1.14	1.14	1.11	1.11
v (%)	0.76	1.44	3.40	3.48	5.60	5.77
V_p (km/sec)	2.67	2.48	2.49	2.40	2.45	2.41
V_s (km/sec)	1.04	1.04	1.03	1.08	1.10	1.07
$\mu \times 10^{10} \text{C} \cdot \text{G} \cdot \text{S}$	1.27	1.25	1.22	1.32	1.34	1.28
E "	3.59	3.49	3.40	3.63	3.67	3.51
K "	6.65	5.49	5.46	4.79	4.89	4.74
σ	0.41	0.39	0.40	0.37	0.38	0.38

Table 5. Results of the experiment. Water drop inclusion.

試料番号	1	2	3	4	5	6	7
M (g)	39.14	24.68	49.46	48.23	49.31	37.64	29.55
L (cm)	3.89	3.26	6.05	6.01	6.06	3.99	3.83
D (cm)	3.31	2.87	3.00	2.96	3.00	3.24	2.98
V (cm ³)	33.36	21.08	42.59	41.32	42.81	32.84	26.58
T_p (μ sec)	14.90	13.27	24.07	24.53	24.38	15.83	15.50
T_s (μ sec)	37.53	29.68	54.00	52.16	54.70	38.77	35.68
ρ (g/cm ³)	1.17	1.17	1.16	1.17	1.15	1.15	1.11
v (%)	2.81	3.93	9.55	6.18	14.61	17.98	37.08
V_p (km/sec)	2.61	2.46	2.51	2.45	2.49	2.52	2.47
V_s (km/sec)	1.04	1.10	1.12	1.15	1.11	1.03	1.07
$\mu \times 10^{10}$ C·G·S	1.26	1.41	1.45	1.55	1.42	1.21	1.28
E "	3.55	3.88	4.00	4.20	3.89	3.39	3.54
K "	6.32	5.19	5.38	4.93	5.23	5.65	5.07
σ	0.41	0.38	0.38	0.36	0.38	0.40	0.38

Eshelby の理論式で、独立変数の役割を持つ量は、見掛けの容積比 v である。また理論式は、inclusion の形状に楕円体という制限があるのみで、その配列には何の制限もない。したがって、inclusion が何らかの意味で楕円体の近似形と見なされるならば、その配列に相違があつても結果としてえられる見掛けの弾性定数には、配列の影響があらわれないはずである。このことが実さいに成立するか否かを調べるには、上の3種類の形状の inclusion は好い試料と思われる。

Table 4 には空気を inclusion にした場合の結果が示されている。この実験は多孔性複合物を扱うための予備的研究として行なつたものである。

Table 5 には水を inclusion にした場合の結果が示されている。これは含水物質の性質を調べるための予備段階として行なつた実験である。

各表の数値をグラフに示したものが Fig. 2 (a)~Fig. 4 である。これらのグラフで、太い実線で示してあるのが Eshelby の理論式による計算値である。またその両側に細い実線で示してあるのが、計算値の $\pm 5\%$ の誤差範囲を示すものである。この $\pm 5\%$ の許容限界は、試料の仕上寸法の誤差や超音波伝播時間の測定誤差などを考慮に入れて、おおよそのめやすとしたものである。

(a) rigidity

(b) bulk modulus

(c) Young's modulus

Fig. 2. Experimental and theoretical values. Iron inclusion.

Fig. 2 (a)~Fig. 2 (c) は鉄を inclusion にした場合をまとめてプロットしたものである。先の報告における理論値が理論式の最右辺の近似式を用いて計算してあるので、Fig. 2 (a) の μ と Fig. 2 (c) の K の理論式は今回もそれにならった。Fig. 2 (c) の E は、本報告での理論式をそのまま使っている。

これらの図から得られる結果を次に箇条的に述べておく。

i) 剛性率について

鉄粉、鉄球は許容限界に入っている。しかしそれ以外の inclusion では、実験値が許容限界からはみ出ているものが多い。しかもそのはずれ方は系統的に大きい方にはみ出ている。

これは、鉄粉や鉄球以外の inclusion では、その配列によつて異方性が生じているためではないかと考えられる。もしそうであれば、この現象が Eshelby の理論の適用に、ある種の制限を加える要素となりうるであろう。

ヤング率についても、同じような結果がえられている。この場合でも inclusion が鉄粉や鉄球以外の実験値は、系統的に許容限界を上まわっているのである。

ii) 体積弾性率

Fig. 2 (b) のグラフを見ると、i) で述べた現象が一層著しい。この場合、実験値が許容限界に適合する範囲は、 v が僅か 3 % 以内である。 v が 3 % 以上になると、実験値が許容限界をはるかに上まわってしまう。この原因が何であるのか、今のところまだわかっていない。その追求は、今後の大切な課題になる。

iii) ヤング率 (E) におよぼす体積弾性率 (K) のはずれの影響

K の値は ii) で示したように、理論値とたいへんくいちがつていた。それにもかかわらず、 K を使つて求めた E の値は K ほどにはくいちがつていない。その理由は次のように考えられる。

E の理論式を変形すると

$$E = \frac{9 K \mu}{3 K + \mu} \quad (\text{cal は省略})$$

となる。上式から K の変化 ΔK に対する E の変化 ΔE を計算すると、

$$\Delta E = \frac{9}{(3 K/\mu + 1)^2} \Delta K$$

となる。ふつうの弾性体では K/μ が 3~5 くらいである。したがつて ΔK の係数は、0.035 から 0.1 くらいの値をとることになる。この数値から考えると、 K の変化に対する E の変化の割合は 3~10% くらいのものである。

このように、 K の値に相当のはずれがあつても、 E に対するその影響は、高々その 10% くらいにしかすぎない。

iv) エポキシ樹脂+空気

Fig. 3 に示されるように、 $v=10\%$ くらいまでの間では、理論値と実験値とがきわめてよく一致している。これ以上 v を大きくした実験結果がないので、今後 v をさらに大きくした場

Fig. 3. Experimental and theoretical values of bulk modulus. Air bubble inclusion.

Fig. 4. Experimental and theoretical values of bulk modulus. Water drop inclusion.

合の実験データが必要である。また今回の試料は、せいぜい1つか2つの気泡しか含まれていないものばかりである。現在、多数の気泡を含む試料の作成を試みつつある。

v) エポキシ+水

Fig. 4 に示すように、 $v=20\%$ の範囲について実験結果と理論値の比較がなされている。ここで特に注目すべき現象は、 μ , E , K の実験値が、理論値に対して、きわめて規則的にはずれていることである。このはずれは、 E においてもつとも大きい。 v が大きくなると、これらのはずれは次第に小さくなっていくようである。このような現象の原因が水の粘性を無視したためのものか、あるいは他にあるのか、いまのところはつきりしたことは言えない。現在多気泡の試料を作成しているので、それが完成すれば、その気泡を液体におきかえて実験を行なう予定である。

この報告は、エポキシを matrix とし鉄、空気および水を inclusion として作った複合物体の動弾性定数を、理論と実験の両面から確かめたものである。結果としては、十分な一致がえ

られなかつた場合が多かつた。今後は実験の精度や試料の異方性などを考慮しながら、この不一致について検討してゆきたい。

文 献

- ESHELBY, J. D., 1957, The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, Proc. Roy. Soc. London, A, **241**, 376-396.
竹内 均・小林直太・園部雅之, 1970, 複合物体の剛性率, 地震 2, **24**, 313-320.