一方、本器は子時計の歩度調整にも有用であり、リサーチ法では歩度の絶対値がわからないのと比べて、子時計の温度・電圧・負荷などの環境変化のテストや調整などに多く使われている。

Fig. 4 は本器の外観を示す。ニッケルカドミウム電池内蔵で $21 \times 17 \times 11$ cm の外形をもつ。

なお、本器で較正される子時計は、0.1 Hz, duty cycle 50% の出力をもつことを想定しているが、旧セイコー 952 水晶時計のように、1 秒出力しかないものは、その出力に (或は本器の入力に) 1/10 分周の IC (CD 4017 A など) を付加する必要がある。また 4 ケタのカウンタ IC, MSM 5502 は電源電圧 5 V で 4 MHz を数えるためには、高速のものを選別する必要があった。

文 献

- 島村英紀, 1969, 高精度の時計較正装置, 地震 2, 22, 249-251.
 森谷武男, 1974, 高性能長時間 BCD コード時計付 DAR データ・レコーダー, 地震学会講演予稿集, 1974-2, 228.

地 震 第 2 輯
 第 30 巻 (1977) 233-235 頁

Fourier 積分のための Gauss 型積分公式

東京大学理学部地球物理学教室

斎 藤 正 徳

(昭和 52 年 5 月 18 日受理)

Gauss Type Quadrature Formula
for Fourier Integral

Masanori SAITO

Geophysical Institute, University
of Tokyo

(Received on May 18, 1977)

1. 数値積分の方法の中で Gauss 型の積分公式が優れていることは良く知られている。普通に用いられているのは積分の重み函数が積分変数 x によら

ない定数の場合であるが, その他にも重み函数が $\exp(-x)$, $\exp(-x^2)$, $1/\sqrt{1-x^2}$ の場合などが知られている。

ところで地球物理学においてはスペクトルを求める場合だけに限らず, 例えば理論地震記象を計算する場合のように, Fourier 積分を数値的に計算する機会が多い。このような場合には重み函数が $\sin x$ 又は $\cos x$ である場合の公式があると便利である。

適当な変数変換を行えば Fourier 積分はすべて

$$I = \int_0^1 f(x) \cos \frac{\pi}{2} x dx \quad (1)$$

の形の積分の和によつて表わすことができる。そこで以下では上の積分のみを考える。通常の Gauss 型公式は上の積分の被積分函数全体を Lagrange 補間して得られるもので,

$$I_n = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \cos \frac{\pi}{2} x_k$$

の形をしている。これに対してここで考える方法は $f(x)$ のみを補間して近似公式を導くもので, 近似公式の形は

$$I_n = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad (2)$$

となる。これによつて計算が簡単化されると同時に精度の向上が期待される。

2. 近似公式 (2) における分点の座標 x_k , 重み w_k は, $f(x)$ が $2n-1$ 次以下の多項式に対して I_n の誤差が 0 になるという条件から定められる。良く知られているようにこのような x_k , w_k は直交多項式の理論を用いて求めることができる[森 (1973)]。

$p_n(x)$ を重み函数 $\cos(\pi/2)$ に関する区間 $[0, 1]$ における n 次の直交多項式とする。即ち

$$(p_n, p_m) = \int_0^1 p_n(x) p_m(x) \cos \frac{\pi}{2} x dx = \lambda_n \delta_{nm}$$

λ_n は $p_n(x)$ の正規化の仕方によつて異つてくるが, ここでは計算の便宜上, $p_n(x)$ の x^n の係数を 1 にえらんでおく。このような直交多項式を用いれば (2) の x_k は $p_n(x)$ の零点

$$p_n(x_k) = 0 \quad (3)$$

であり, 重み w_k は

$$w_k = \frac{\lambda_{n-1}}{p_{n-1}(x_k) p_n'(x_k)} \quad (4)$$

で与えられることが知られている。従つて問題はこのような直交多項式 $p_n(x)$ を求めることに帰着する。

昭和 52 年 5 月 12 日発表

3. ここで必要となつた, $\cos(\pi/2)x$ を重みとする直交多項式の解析的な表現は知られていないので数値的に求める他はない. それには漸化式

$$p_n(x) = (x - \beta_{n-1})p_{n-1}(x) - \gamma_{n-1}p_{n-2}(x) \quad (5)$$

を用いる. 但し

$$\lambda_n = (p_n, p_n) = (x^n, p_n) \quad \gamma_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \quad (6)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\lambda_n} (xp_n, p_n) = \frac{1}{\lambda_n} (x^{n+1}, p_n) + \nu_n$$

であり, ν_n は $p_n(x)$ の x^{n-1} の係数である. $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1$ から出発して (5), (6) を交互に用いれば $p_n(x)$ を順次求めていくことができる.

(6) に現れる内積の計算には定積分

$$C_n = \int_0^1 x^n \cos \frac{\pi}{2} x dx \quad (7)$$

の値が必要になる. C_n も簡単な漸化式を満たすが, これを正方向, つまり n の増加する方向に用いると桁落ちのために数回の反復で発散してしまう. そこで十分大きな n に対して (7) の被積分関数を級数

展開して得られる級数

$$C_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \left(\frac{\pi}{2} \right) \times \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n+2k+3} \frac{2k}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{2k+1} \right]$$

によつて C_n を計算し, 逆方向の漸化式

$$C_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{\pi}{2} \right) \left[1 - \left(\frac{\pi}{2} \right) C_{n+2} \right]$$

によつて必要な C_n を計算した. この計算においては桁落ちの心配は全くない.

漸化式 (5) は多項式の係数を求めるためにだけでなく多項式の値を計算するためにも用いられた. ある x を固定したとき, $p_0(x), p_1(x), \dots$ が Sturm 列をなすことを用いて $p_n(x)$ の零点が容易に求められる. また (5) を微分することによつて $p_n'(x)$ の値も漸化式によつて求めることができる.

4. 実際の計算はすべて 4 倍精度 (10 進約 33 桁) で行つた. 得られた直交多項式の一部を図 1 に示す. 但しここに示したのは上で定義した $p_n(x)$ ではなく

Fig. 1. Normalized orthogonal polynomial $\bar{p}_n(x)$.

Table 1. Zeroes (x_k) and weights (w_k) of quadrature formula (2)

k	x_k		w_k	
$n=4$				
1	0.06090	50247	0.15140	77351
2	0.28801	25294	0.25633	93791
3	0.59323	45020	0.18259	36148
4	0.86353	90450	0.04627	90432
$n=5$				
1	0.04208	09860	0.10583	13517
2	0.20600	83954	0.30199	70530
3	0.44758	66629	0.19756	97936
4	0.70157	18685	0.10754	68767
5	0.90336	92520	0.02367	46971
$n=6$				
1	0.03077	24191	0.07787	85276
2	0.15379	10311	0.15850	33183
3	0.34531	25568	0.18249	47757
4	0.56588	00841	0.13924	09863
5	0.77321	45152	0.06525	90431
6	0.92813	92283	0.01324	31211
$n=7$				
1	0.02346	53070	0.05960	96702
2	0.11882	80742	0.12600	52563
3	0.27263	39940	0.15932	86415
4	0.45998	75461	0.14612	18268
5	0.65263	20733	0.09640	31486
6	0.82245	94616	0.04120	51274
7	0.94453	34446	0.00794	61012
$n=8$				
1	0.01847	70802	0.04705	19295
2	0.09440	13183	0.10187	82220
3	0.21983	18812	0.13651	95090
4	0.37845	57920	0.13992	63602
5	0.55092	04421	0.11192	51692
6	0.71702	96938	0.06722	99001
7	0.85753	64119	0.02704	71076
8	0.95592	30159	0.00504	15743
$n=9$				
1	0.01492	29243	0.03806	41288
2	0.07671	93054	0.08375	62171
3	0.18056	10237	0.11659	11622
4	0.31539	52112	0.12839	30920
5	0.46764	72185	0.11584	22434
6	0.62262	99412	0.08458	63208
7	0.76569	55339	0.04765	35832
8	0.88330	72505	0.01838	62547
9	0.96414	70013	0.00334	67696
$n=10$				
1	0.01230	23387	0.03141	66834
2	0.06353	41552	0.06991	48297
3	0.15070	20526	0.09990	11863
4	0.26609	27884	0.11549	67392
5	0.39996	95718	0.11290	87381
6	0.54149	27236	0.09340	24098
7	0.67949	16680	0.06395	90334
8	0.80316	08452	0.03442	47511
9	0.90275	02276	0.01288	93080
10	0.97027	43849	0.00230	60929

$$(\bar{p}_n(x), \bar{p}_n(x))=1$$

となるように正規化したものである。表1には分点

Fig. 2. Comparison of quadrature formulas. Solid circles show errors $|\Delta I_n| = |I - I_n|$ of equation (2).

の座標 x_k と重み w_k を示してある。

Legendre 函数, Bessel 函数などを漸化式を用いて次数の増加する方向に計算していくと、桁落ちのために精度が急激に悪くなっていくことが知られている。今回の計算においても 4 倍精度で計算を行っているにもかかわらず $n > 20$ では $\lambda_n < 0$ となるような不合理が生じている。これは桁落ちのためであろう。表1の精度をチェックするためには超多倍精度による計算が必要になる。

新しい積分公式と、Simpson 法、通常の Gauss 公式との比較をいくつかの $f(x)$ について行つた。比較の一例を図2に示す。当然のことながら Simpson 法は全く問題にならないが、新しい方法は通常の Gauss 公式に比べて常に $1/2 \sim 1$ 桁精度が向上している。しかし $f(x)$ が積分区間に特異点をもつような場合には両者とも良い結果を与えない。

同じ n に対しては計算量、精度とも新しい方法の方が優れているが、 $f(x)$ の変化が激しい場合には問題が生ずる。普通の Gauss 公式の場合には元の積分区間 $[0, 1]$ を細分してそれぞれの小区間に対して低次の公式を用いることによって精度を上げることができる。しかしここで提案した方法ではそのようなことは不可能で、精度を上げるためには n を大きくする以外にはない。

計算は東京大学大型計算機センターにおいて行つた。

文 献

森 正武, 1973, 数値解析, 共立出版。