確率過程としてみた地震現象

神戸大学理学部地球科学教室 大 内 徹

(昭和53年3月27日受理)

A Stochastic Modeling of Earthquake Frequencies

Toru OHUCHI

Department of Earth Sciences, Faculty of Science,
Kobe University

(Received March 27, 1979)

The frequency of earthquake occurrence in a given region can be formulated as

$$dn(t)/dt = rn[1 - (n/k)^\alpha]/\alpha$$

where $n(t)$ is the number of earthquakes per unit time, r , k and α are constants. Empirically determined values of α range from 0.67 to 1.0. This is a generalization of the modified Omori formula for aftershocks, the latter being an approximation of the former for $n \gg k$. This formula adequately describes the initial increasing and latter decreasing activities during the Matsushiro and Wakayama swarms as well as aftershocks of large earthquakes.

When random external force is added to this system as a driving mechanism, the equation above becomes

$$dv(t)/dt = -r[1 - \exp(\alpha v)]/\alpha + R(t)$$

where $v = \ln(n/k)$ and $R(t)$ is the random Gaussian noise. Repetitive seismic patterns with bursts, which are commonly observed in real earthquake sequences, are predicted from this formulation under stationary conditions. These formulations appear to be quite promising in helping to understand macroscopic features of microearthquake activities.

§ 序

近年生物物理学をはじめとして、純粋物理学以外の様々な分野で力学モデルの導入とそれに基づく確率・統計論的研究が急速に進展しつつある。例えば Volterra や Lotka 等による生体集団に関する数学的な議論はよく知られている〔芦田他 (1975) 参照〕。KERNER (1957, 1959) や LEIGH (1968) はそれらの力学系に基づく統計力学を展開した。GOODWIN (1963) はタンパク生合成系の反応システムについて、また COWAN (1970) は神経回路網の研究に同様な試みを行つている。

地震現象にもこれらの現象との間に多くの類似点を見出すことができるので、同様な取り扱い

いができれば、地震現象に対するマクロ的な面からの理解に対して大いに役に立つと思われる。本論文では、確率論的力学モデルを用いて、マクロ的な観点から地震活動を記述していくことを試みることにする。

§ Brown 運動と地震現象

ある地域の地震活動に着目し、この地域を地震を発生する一つのシステム（系）と考え、この系が従うマクロ的な動的挙動を捉えることを考える。本節ではまずこの地震活動を記述していく上で、その背景となる「Brown 運動」の概念について述べることにする。

地震現象はいうまでもなく極めて複雑なものである。それは多くの要因が複雑に絡み合ったものであろうし、支配するパラメータは無数に考えられる。また、地震現象において考えるどんな系も、それが本質的に開いた系であるということも問題を決定的に難しくしている。ある系と外界との物質並びにエネルギーの出入は多様である。これらの現象に本質的な役割りをしている部分系とその外界という形で境界を設定することはもともと困難なことであり、たとえば境界が設定されたとしても、その外界の影響をいくつかの少数のパラメータで反映させることは非常に難しいように思われる。

このように、地震現象においては、場の設定も含めて、そこでマクロなレベルで成立するであろう法則を見出していくことは極めて困難なことであり、一見とりとめのない問題のようにも思われる。

このような地震現象を記述していく上で重要な手掛りとなるのが「Brown 運動」の概念である。「Brown 運動」とはもともと無数の液体分子とコロイド粒子からなる複雑な運動をコロイド粒子だけに投影したものをさすが、さらに一般的に多数の自由度をもつ系の運動を少数の物理量として捉えたものを広義の意味で「Brown 運動」という。問題は対象をそのある断面への射影において捉えることであり、射影された過程でどんな法則によつて記述されるかということに帰結される。

我々の課題は、いうまでもなく、実際の地震現象を「Brown 運動」としていかに記述していくかということである。すなわち複雑きわまりない地震現象をいかにして少数の直接観測にかかる簡単な物理量でいかに表現していくかということに帰する。

ここで重要になるのが対象に対する、いわゆる「粗視化 (coarse graining)」である。すなわち対象を時間的空間的にある程度粗く見るることによつてこのような記述が可能になるということである（詳しくは久保 (1972) 参照）。このような取扱いは、地震現象を扱う上では、現実にはかなり一般的に行われているものであるが、ここではそれが本質的に重要な意味をもつ

ことになる。

地震現象を実際に記述していく上で、我々がまず当面する困難は、それを投影する物理量として何を考えるべきかである。次に問題となるのは、その物理量が従う、例えばコロイド粒子の「Brown 運動」における Langevin 方程式に相当するような法則を見出すことができるかどうかということである。

§ 地震発生システム

本節では、ある地域（系）で単位時間に発生する地震数 $n(t)$ の変動に着目し、それを記述する力学モデルを考えていくことにする。ここで地震数 $n(t)$ を選んだのは、それが現在地震学においては最も信頼できる直接の観測量であることと、それに対して多くの経験則が知られているからである。簡単のため、最初はまず決定論的な立場から出発することにして、 $n(t)$ は一般に次の一階の微分方程式で表現されるものとする。

$$\frac{dn(t)}{dt} = F(n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \quad (1)$$

α_i は関数 F を規定するパラメータであり、系の応力等諸々の状態の性質を反映する。関数 F は一般に非線型性を示すであろうから、(1) 式の一般的な解を求めることは困難である。

しかし、地震現象においては、以下に示すような、いくつかの重要な性質が経験的に知られているので、それらを手掛りとして関数 F の形を推定していくことができる。

- (i) 続発性：地震には起こると引き続き起りやすくなる性質がある。
- (ii) 抑制性：地震の発生は蓄積された歪エネルギーを減少させることによつて新たな地震の発生を抑制する効果を持つている。
- (iii) 大森及びその改良公式：大地震の余震等の減少は

$$n(t) = \frac{A}{t+c} \quad (2)$$

あるいはその改良公式

$$n(t) = \frac{A}{(t+c)^p} \quad (2)'$$

に従う。

このうち、(i) の続発性と (ii) の抑制性はまさに地震現象における系を特徴づける正と負の帰還 (feed back) 機構となつている。この相反する地震の 2 つの性質はある意味で、ここで考えた系における「自然の調節機構」となつていて、本質的な重要性を持つと考えられる。

議論を進めるために関数 $F(n, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ は n のみによるような自律系を考える。そして

地震の続発性 (i) を考慮に入れて、地震数 $n(t)$ の時間変化は $n(t)$ に比例するものとする.

$$\dot{n}(t) \propto n(t)$$

したがって、これは

$$\dot{n}(t) = nF_1(n) \quad (3)$$

と表わすことができる. $F_1(n)$ を原点のまわりに Taylor 展開すると、
と書くことができる.

$$\dot{n}(t) = n(c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \dots) \quad (4)$$

次に、地震数が大きくなればなるほどそれだけ地震が起こりにくくなるような抑制効果が働くであろうから、

$$\frac{\partial F_1(n)}{\partial n} < 0 \quad (5)$$

という形で抑制性 (ii) を取り入れることにする. (4) 式の右辺の第 2 項までとつて、この条件を考えに入れると、最も簡単な形式として

$$\frac{dn(t)}{dt} = rn \left(1 - \frac{n}{k} \right) \quad (6)$$

が得られる. 但し、ここで、 $c_0 = r$, $c_1 = -r/k$ である. この式は logistic 型と呼ばれ、元来は生体の個体数の変動を記述するために用いられた〔例えば太田 (1975) 参照〕ものである.

(6) 式は求積法で容易に解くことができる.

$$n(t) = \frac{k}{\left(\frac{k}{n_0} - 1 \right) e^{-rt} + 1} \quad (7)$$

この logistic 方程式の解は初期値 n_0 と k の値の兼ねいで二つのパターンを取り得る.

(イ) $n_0 < k$: Fig. 1 上図に示すような S 字型の成長曲線を描く.

(ロ) $n_0 > k$: Fig. 1 下図に示すように両対数で表示すると直線的に減少して一定の停留値 k に漸近する.

さて、(6) 式は現実の地震活動を果してどの程度よく表現し得るであろうか. 大地震の余震の減少則はよく説明し得るであろうか. また、Fig. 2 a, b に示すような松代や和歌山の群発地震や大地震の際における地震の増加の仕方や減少の様子等に対してはどうであろうか. 以下実際の地震活動と (6) 式の logistic 式との関連を見ていくことにする.

(イ) のようなパターンは、例えば松代の群発地震の際の初期の過程に見ることができる. 1965 年 8 月のこの群発地震の起り始めから、気象庁の松代観測所で観測された日別の地震数の変動 (有感及び無感地震) の 5 日ごとの移動平均をとつたものを Fig. 3 に示す.

Fig. 1. Examples of the logistic function $n(t)$ (see eq. (7)). Top; increasing case ($n_0 < k$), bottom; decreasing case ($n_0 > k$).

Fig. 2a. Daily frequency of earthquakes recorded at Matsushiro Seismological Observatory, JMA.

Fig. 2b. Annual frequency of felt earthquakes recorded at Wakayama Seismological Observatory, JMA.

Fig. 3. Initial stage of the Matsushiro earthquake swarm, which shows a typical logistic (S type) pattern. Dashed line denotes a theoretical logistic curve.

(ロ)のような例は松代や和歌山の群発地震の後期に典型的なものを見ることができる。Fig. 4a は松代の群発地震の際 1966 年 9 月の 2 回目の活動のピークから今日に至るまで気象庁の松代観測所で記録した日別の地震数（有感と無感地震）の減少を示したものである。パラメータを適当に選ぶことにより，logistic 曲線（図中点線）を驚くほどよく適合させることができる。同様に，和歌山の群発地震活動のやはり 2 回目のピークの 1954 年 7 月から気象庁の和歌

Fig. 4a. Daily frequency of earthquakes for the later stage of the Matsushiro swarm after September 1966. Dashed line shows theoretical logistic curve with parameters as given.

Fig. 4b. Monthly variation of the number of earthquakes during the later stage of Wakayama swarm after July of 1954.

山観測所における月別の地震頻度（有感及び無感地震）を Fig. 4b に図示した。これにもまた logistic 曲線との非常に良い一致を見ることができる。以上データは気象庁・松代群発地震調査報告（1968）及び全国有感・無感地震回数表（1976）によつた。

（ロ）のパターンについては大地震の余震の際にも多くの類例を見ることが出来る。Fig.

Fig. 5a. Aftershocks of the 1891 Nobi earthquake. Dashed line is a fitted logistic curve.

Fig. 5b. Aftershocks of the 1962 Miyagi earthquake. Dashed line is a fitted logistic curve.

5a は濃尾地震 (1891, $M=7.5$, $p=1.05$) の余震の減少を示すが、本震の発生後今日に至るまで、logistic 曲線に良く従って減少していることがわかる。Fig. 5b は宮城県北部地震 (1962, $M=6.5$, $p=1.0$) の例である。しかし、すべての余震の減少に対して logistic 曲線をあては

Fig. 6. Aftershocks of the 1964 Niigata earthquake. Note that no logistic curves [eq. (7)] can be fitted to the aftershocks when the value of p deviates from 1.0.

めることが可能というわけではない。新潟地震 (1964, $M=7.5$, $p=1.4$) の余震に対しては、パラメータをどのように選んでも logistic 曲線をうまく合わせることができず、logistic 曲線は現実のデータから大きくはずれる (Fig. 6)。

一般に改良大森公式における p 値が 1 程度であれば余震の減少に対する logistic 曲線の適合度は非常に良いが、新潟地震のように、 p が 1 から大きくはずれるような場合にはうまく合わせるできない。より一般的に余震の減少則を説明するためには (6) の logistic 式を少し修正する必要がある。なお余震のデータについては Utsu (1969) のものをそのまま用いた。

§ 修正モデルと改良大森公式

前節ではある地域 (系) における地震数の変化が従うであろう式として logistic 方程式を導き、それが松代や和歌山の群発地震の増加や減少をよく説明しうることを示した。しかし、この式では余震のうち p の値が 1 に近いものに対してよく表現しうることを示した。しかし、この式では余震の減少のうち p の値が 1 から大きくはずれるものについてはうまく合わせることができ

ない。一方、logistic 系とよく似た性質を示す方程式系もいくつか知られているので、本節では以上のことをふまえて、さらにモデルの一般化について考えてみたい。

(6) 式と良く似た性質を示すものとしては、例えば次の Gompertz のものが良く知られている〔例えば、太田 (1975)〕。

$$\frac{dn}{dt} = -rn \ln\left(\frac{n}{k}\right) \quad (8)$$

GOEL et al. (1971) はこれらの方程式の一般化である次式

$$\frac{dn}{dt} = rn\{1 - (n/k)^\alpha\}/\alpha \quad (9)$$

を提案した。(9) 式で $\alpha=1$ とすると (6) 式に、 $\alpha \rightarrow 0$ とすると (8) 式になる。(6)、

(8) 及び (9) 式は元来生体数の変動を記述するために考えられたものであるが、実は地震現象をも良く表現し得ることを以下に示すことにしよう。

一般的な (9) 式を基にして議論していくことにしよう。(9) 式の解は

$$n(t) = \frac{n_0}{\left[\left\{ 1 - \left(\frac{n_0}{k} \right)^\alpha \right\} e^{-rt} + \left(\frac{n_0}{k} \right)^\alpha \right]^{1/\alpha}} \quad (10)$$

で与えられ、初期値 n_0 と k の値の兼ね合いで、 $\alpha=1$ の際の logistic 式と同様な 2 つの基本的パターンを取り得る。この一般化された式を用いることにより、現実の地震活動をより良く表現することが可能となる。実際 $\alpha=0.7$ とすることにより、前節で示した新潟地震に対しても、非常に良く合わせる事が可能となる (Fig. 7)。このように、パラメータ α を導入し、自由度を一つ増すことにより、ほとんど全部の余震現象を記述することが可能となつた。さらに、(9) 式から経験則として良く知られた改良大森公式 (2)' を直接導くことができる。次にこのことを示そう。

(9) 式において、余震の過程を考える際に、最終的な値 k に対して n が充分大きい期間を考えれば、 $n \gg k$ すなわち $n/k \gg 1$ として (9) 式の右辺の第 2 項に対して第 1 項は無視できる。したがって、近似的に

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= rn\{1 - (n/k)^\alpha\}/\alpha \\ &\approx -\frac{r}{\alpha k^\alpha} n^{1+\alpha} \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。この一階の微分方程式は簡単に解くことができ、

$$n(t) = \frac{A'}{(t+c')^{1/\alpha}} \quad (12)$$

Fig. 7. Same as in Fig. 6. Dashed line shows a curve calculated from the modified logistic equation (9).

となつて直ちに改良大森公式が得られる。(2)'式と比較することにより、

$$\alpha = \frac{1}{p} \quad (13)$$

となるから α は直観的にも理解しやすい意味を持つことになる。 $\alpha=1$ とすると $p=1$ となるから、(11) 式は塩冶 (1901) 等が余震に対して導いた式と同等のものとなり、(12) 式は大森公式となる。 p の値は一般に 1 よりやや大きいかせいぜい 1.5 程度であるから [Utsu (1969)], α の値としては 1~0.67 程度が考えられる。

最後に一般化された (9) 式が大地震の際の前震の増加の仕方もよく説明することができることを示すことにしよう。前震の中には本震が近づくにつれてほぼ指数関数的に地震活動が増加していくパターンを示すものが良くみられる。茂木 (1967) はこれを前震の C 型と呼んでいる。このような前震過程を考える場合には、 k は仮想的に極めて大きいと考えても良いであろう。この場合地震数の増加する初期の段階においては $n/k \ll 1$ と考えられるから (9) 式の右辺の第 2 項は無視されて、

$$\frac{dn}{dt} \approx \frac{r}{\alpha} n \quad (14)$$

となる。これから

$$n(t) = A'' e^{(r/\alpha)t} \quad (15)$$

が得られ、C型の前震活動が表現される。この前震活動はそのまま指数関数的に増加し続けることはなく、ある時点で本震の発生に至ってしまうことになる。

§ 確率過程としての取り扱い

今まで、松代や和歌山における非常に大規模な群発地震活動の例や大地震の前・余震過程をもとに、地震数の変動が一般に従うであろう法則の定式化を試みてきた。これは、地震現象に対して極めて理想的な、ある意味で断熱的な系を設定した場合に相当し、また決定論的な議論でもあつた。したがって、現実の地震活動をより一般的に考えていくためには外界からの影響を何らかの形で取り込む必要があり、本質的に確率事象としての取り扱いが必要になるであろうと思われる。

例えば、ある地域（系）の地震活動に直接間接に影響を及ぼすであろう外界からの要因として、ちよつと考えるだけでも、

(A) 潮汐 (B) 火成活動 (C) 気象条件 (D) プレーートの運動 (E) 系の近傍の地震活動 (F) その他……等をあげることができる。これらの影響は極めて複雑であり、それらを考慮して、簡単な形でモデルの中に取り入れていくことは非常に難しいであろう。さらに系そのものの変動も考慮に入れる必要がある。

そこで、以上述べたような要因は系の環境の変動も含めて、すべて外界からの作用とみなし、その外力は完全に不規則なものであると考えることにする。

まず、 $v = \ln(n/k)$ として (9) 式を書き改めると、

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{r}{\alpha} (1 - e^{\alpha v}) \\ &= -\frac{r}{\alpha k} \frac{\partial G(v)}{\partial v} \end{aligned} \quad (16)$$

但し

$$G(v) = \frac{k}{r} (e^{\alpha v} - \alpha v)$$

となるから、これに不規則な外力を反映する項を加えると、この系の地震活動を表現する式として

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{r}{\alpha k} \frac{\partial G(v)}{\partial v} + R(t) \quad (17)$$

が得られる。ここで $R(t)$ は Gauss 性の白色雑音であり、

$$\begin{aligned} \text{平均: } \text{Ave } [R(t)] &= 0 \\ \text{分散: } \text{Var } [R(t)] &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (18)$$

である。(17) 式は無数の水の分子とコロイド粒子からなる系の「Brown 運動」を記述する Langevin 方程式と同じ形になっている。右辺の初めの項は媒質による抵抗を表わす項に対応している。なお、 $G(v)$ の e^{av} を Taylor 展開して 2 次の項まで考えれば (17) 式は Brown 粒子の運動に対するものと全く同じ形となる。

以上のことをまとめると、地震活動においては (6) 式あるいは (9) 式が内在的に成り立つものと考え、外界からの影響や系そのものの変動をひつくるめて、これを不規則な揺らぎとみなすことにするわけである。そのときの地震活動が (17) の確率的運動方程式で表わされるとするのである。

(17) 式において、 $R(t)$ は統計的な性質のみがわかっているだけであるから、その解は時刻 t において v がいろいろな値をとる確率分布 $P(v, t)$ で与えられる。(17) の確率微分方程式からこの $P(v, t)$ の従ういわゆる Fokker-Planck の式には容易に移行することができる〔詳しくは、LEIGH (1969), GOEL et al. (1971) 参照〕。

$$\frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{r}{k\alpha} \frac{\partial G}{\partial v} P \right] \quad (20)$$

いま定常状態が実現しているとする、 $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$ として、

$$\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial v} = - \frac{2r}{\sigma^2 k\alpha} \frac{\partial G}{\partial v} \quad (21)$$

が得られる。この解として、

$$P(v) = a \exp \left[- \frac{2r}{\sigma^2 k\alpha} G(v) \right] \quad (22)$$

が定常状態を考えた際の v 確率分布を与えることになる。(22) 式は KERNER (1959), GOEL et al. (1971) や LEIGH (1969) が生体系について導いたものと同等のものである。

平衡状態における Brown 粒子の速度が Maxwell-Boltzmann 分布に従うということは、Brown 粒子に対する Langevin 方程式をもとにして導くことができる。(22) 式はこの Maxwell-Boltzmann 分布と完全に対応させて考えることができる。

ここで、

$$\theta = \sigma^2 k\alpha / 2r \quad (23)$$

とおくと、これは熱統計力学における温度に相当するもので、地震現象におけるある系の状態

Fig. 8. Probability distributions of $x=n/k$ for various values of k/θ .

を反映する重要なパラメータと考えられる。

最後に $x=n/k$ に対する分布を与えることにしよう。 n に対する分布は規格化因子

$$a = \alpha s^s / \Gamma(s) \quad (s = k/\alpha\theta)$$

を考慮すると (23) 式から

$$P(n)dn = \frac{\alpha}{n\Gamma(s)} \left[s \left(\frac{n}{k} \right)^\alpha \right]^s \times \exp \left[-s \left(\frac{n}{k} \right)^\alpha \right] dn \quad (24)$$

で与えられるから、

$$P(x)dx = \frac{\alpha}{x\Gamma(s)} (sx^\alpha)^s \cdot \exp(-sx^\alpha) dx \quad (24)'$$

が得られる。ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数である。Fig. 8 に $\alpha=1$ としたときの、 $s=0.8, 1.5, 5, 10$ のそれぞれの場合に対する $P(x)$ を示す。

§ 統計的特性 (I)

定常状態を想定することにより、地震現象に対して考えた系の統計的に重要な性質をいくつか導くことができる。ここでは KERNER (1957, 1959) と GOEL et al. (1971) に従って議論を進めることにする。

まず、(22) 式を用いて $e^{\lambda v}$ の期待値を求める。

$$\begin{aligned}
 \langle e^{\lambda v} \rangle &= a \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda v} \exp[-s(e^{\alpha v} - \alpha v)] dv \\
 &= \frac{a}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda v'/\alpha} \exp[-s(e^{v'} - v')] dv' \\
 &= \frac{a}{\alpha} \int_0^{\infty} u^{(\lambda/\alpha + s - 1)} e^{-su} du
 \end{aligned}$$

ここで, $v' = \alpha v$, $u = e^{v'}$ とした. 次に規格化因子を考慮すると

$$\langle e^{\lambda v} \rangle = \frac{a}{\alpha} \frac{\Gamma\left(s + \frac{\lambda}{\alpha}\right)}{s^{\lambda/\alpha + s}} = \frac{\Gamma\left(s + \frac{\lambda}{\alpha}\right)}{s^{\lambda/\alpha} \Gamma(s)} \quad (25)$$

が導かれる.

この (25) 式を利用することにより以下の諸量の統計的な平均値を知ることができる.

$$\langle n \rangle = \langle k e^v \rangle = k \frac{\Gamma(s + 1/\alpha)}{s^{1/\alpha} \Gamma(s)} \quad (26)$$

$$\langle n^2 \rangle = \langle k^2 e^{2v} \rangle = k^2 \frac{\Gamma(s + 2/\alpha)}{s^{2/\alpha} \Gamma(s)} \quad (27)$$

$$\langle v \rangle = \frac{\partial}{\partial \lambda} \langle e^{\lambda v} \rangle \Big|_{\lambda=0} = \{\phi(s) - \ln \theta\} / \alpha \quad (28)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \langle e^{\lambda v} \rangle \Big|_{\lambda=0} = \phi'(s) / \alpha^2 + \langle v \rangle^2 \quad (29)$$

但し, ここで ϕ はディガンマ関数, ϕ' はトリガンマ関数を表わす.

次に

$$\begin{aligned}
 \left\langle v \frac{\partial G}{\partial v} \right\rangle &= a \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{dG}{dv} e^{-G/\theta} dv \\
 &= a \left\{ -\theta [v e^{-G/\theta}]_{-\infty}^{\infty} + \theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/\theta} dv \right\} \\
 &= \theta
 \end{aligned}$$

から

$$\left\langle k \left(\ln \frac{n}{k} \right) \left\{ \left(\frac{n}{k} \right)^{\alpha} - 1 \right\} \right\rangle = \theta \quad (30)$$

が得られる.

すでに述べたように, 実際の余震の減少の例では p は大体 1 程度か大きいもので 1.5 程度であるから, それに対する α の値は (13) 式から 1~0.67 の間の値となる. また, 松代や和歌山の群発地震では α が 1 の logistic 式が良く成り立つことを考えると, 一般の地震活動の統計的な性質をみていくうえでは, α の値として 1 をとつても本質を見失うことはないと思わ

れる。このことは s が充分大きいとき、すなわち θ が k に比して充分小さければ、さらに妥当なものとなるだろう。そうすると (26) と (27) 式から

$$\langle n \rangle = k \quad (31)$$

$$\left\langle \frac{(n-k)^2}{k} \right\rangle = \theta \quad (32)$$

が得られて、 k は n の集合平均の値、 θ は n の k のまわりの分散という簡単で、直観的に見通しのよい関係式が得られる。

集合平均と時間平均が等しいというエルゴード性を仮定すれば、ある地域（系）の長期にわたる地震数の変動を観察したデータからまずその平均を計算することにより、もとの運動方程式の停留値 k を知ることができる。さらに、この k の値を用いて、観測データから (27) ~ (30) 式で与えられる量の長時間平均を求めて、その地域（系）に対するパラメータ θ の値を求めることができる。また同時にエルゴード性も含めて今まで展開してきた理論を検討することもできる。

§ 統計的特性 (II)

地震数の確率分布が定常状態を仮定した場合の (22) 及び (24), (24)' 式に従うとしたときに、その系の地震活動のさらに興味ある特性を統計的に導くことができる。ここでは簡単のために $\alpha=1$ とする。Fig. 8 は (24)' 式で与えられる $x=n/k$ の確率分布を、それぞれ k/θ の値が 0.8, 1.5, 5, 10 の 4 つの場合について図示したものである。図からすぐわかるように、一般に $P(x)$ はその平均値 1 に対して非対称な形をなす。 k/θ が大きければ x は 1 のまわりを、したがって、地震数はその平均値 k の付近を変動している。 k/θ が小さくなるほどこの偏りは大きくなり、 x が 0 に近い値をとる率が大きくなることが予想される。 k/θ が 1 より小さくなると、すなわち θ が k より大きくなると地震がほとんどなくなってしまうことも考えられるようになる。

このような統計的な特性について KERNER (1959) の方法に習つてもう少し詳しくみてみることにしよう。

いま、ある地域（系）の地震数 n を長時間 T にわたつて観測したとする。時間 T の中で地震数 n がその平均値 k より小さい値をとる時間を T_- とし、 k より大きい値をとる時間を $T_+ = T - T_-$ とする。 n が k より小さいときには $v = \ln(n/k) < 0$ であるから関数 $h(v)$ を

$$h(v) = \begin{cases} 1 & (v < 0) \\ 0 & (v \geq 0) \end{cases} \quad (33)$$

Fig. 9. Mean below-average (T_-/T) and above-average (T_+/T) as functions of k/θ (after KERNER, 1959).

で定義すると, T_-/T の時間平均はエルゴード性を仮定して

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{T_-}{T} \right\rangle_t &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(v) dt = a \int_{-\infty}^{\infty} h(v) e^{-a/\theta} dv \\ &= \frac{q^a}{\Gamma(q)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-q(e^v - v)] dv \end{aligned} \quad (34)$$

と計算される. ここで $q = k/\theta$ である. 積分変数を $qe^v = w$ と変換すると

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{T_-}{T} \right\rangle_t &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^q e^{-w} w^{q-1} dw \\ &= I(\sqrt{q}, q-1) \end{aligned} \quad (35)$$

となる. ここで関数 $I(a, b)$ は

$$I(a, b) = \frac{1}{\Gamma(b+1)} \int_0^{a\sqrt{b+1}} e^{-w} w^b dw$$

で定義される不完全 Γ 関数である. $T_+/T = 1 - T_-/T$ から $\langle T_+/T \rangle_t$ が求められる. これらを図示すると Fig. 9 のようになる.

一般に, $0.5 < T_-/T < 1$ で, $n < k$ である時間の方が長く, その傾向はパラメータ θ の値が大きいほど, したがって q が小さいほど顕著になる. θ が小さく q が大きいときには地震数 n が平均値より小さい値をとる時間と平均値より大きい値をとる時間の割合はそれほど違わない. θ が大きくなり q が小さくなってくると, 平均値より小さい値をとる時間の方が圧倒的

Fig. 10. Mean amplitudes of oscillation above (A_+) and below (A_-) average. (after KERNER, 1959).

に大きくなる。平均値は一定であるから、このことは、地震数はほとんどの時間この平均値を下回った値をとっているが、ときどき急激に地震数がこの平均値を大きく上回った値をとって補うような活動のパターンが見られることを意味している。このようなパターンは現実の地震活動にかなり一般的に見られるものである。

次に、地震数が平均値より大きいときの平均値からのはずれの度合

$$\frac{n-k}{k} = e^v - 1 \quad (v > 0)$$

を再び長時間平均で調べることにする。これを A_+ と書くと、

$$\begin{aligned} A_+ &= \int_+ \left(\frac{n}{k} - 1 \right) dt / \int_+ dt \\ &= \int_+ (e^v - 1) dt / \int_+ dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (1-h) (e^v - 1) dt / \frac{T_+}{T} \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、積分の添字は $n > k$ ($v > 0$) であるような時間にわたつての積分をとることをあらわす。ここで再びエルゴード性を用いると

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{1}{(T_+/T)} a \int_0^\infty (e^v - 1) e^{-q/T} dv \\ &= \frac{1}{(T_+/T)} \frac{q^q e^{-q}}{q \Gamma(q)} \end{aligned} \quad (37)$$

同様にして、地震数が平均値より小さいときの振幅の度合の平均値 A_- が計算される。 A_+

Fig. 11a. Number of earthquakes per 5 days recorded at Kamitakara Observatory ($S-P < 6$ sec) from 1971 to 1973. Dashed line shows the average value.

Fig. 11b. Number of earthquakes per 5 days registered at the Hoshina (Matsushiro) station of the Earthquake Research Institute from January to December of 1975. Dashed line shows the average value.

及び A_- を $q=k/\theta$ の関数として図示したものが Fig. 10 である. この場合でもやはり, θ が大きく q の小さいところでは A_+ は A_- に比較して著しく大きな値をとることがわかる.

以上 $\alpha=1$ としたが, 地震現象として考える $\alpha=1\sim 0.67$ としてもほとんど同様な結果が得られる.

§ 実際のデータに対する適用

本節では今まで述べてきた統計的理論を現実の地震系列に適用し, 理論と実際の比較をすることにする.

実例として, まず上宝における京都大学の地殻変動観測所で記録された, 1971 年初めから

1973 年末までの間の微小地震 ($S-P < 6$ 秒) の 5 日ごとの頻度をとることにする (Fig. 11a). 図から見る限り, この期間における地震活動はほぼ定常であり, 前節までに述べてきたような統計的性質を充分満足しているように思われる. そこで, この時系列の時間平均

$$\langle n \rangle_T = k$$

によつて平均値を計算する. 次に

$$\langle (n-k)^2/k^2 \rangle_T$$

及び

$$\left\langle \left(\ln \frac{n}{k} \right) \left(\frac{n}{k} - 1 \right) \right\rangle_T$$

から求めた $q = k/\theta$ の値を q_1, q_2 とし, A_+/A と T_+/T から求めた q の値を q_3, q_4 とする. それぞれの q の値に対する θ の値を $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ として, 実際のデータの時間平均から得られた k や q と θ の値を表 1A に示す. この例では T_+/T から求めた q_4 と θ_4 が他と幾分離れた値をとるが, それでも全体として q や θ の値はかなり良く一致しているように思われる.

Table 1

(A)		(B)	
$k=16.6$		$k=65.2$	
$q_1=2.5$	$\theta_1=6.7$	$q_1=14.5$	$\theta_1=4.5$
$q_2=3.1$	$\theta_2=5.4$	$q_2=14.7$	$\theta_2=4.4$
$q_3=2.9$	$\theta_3=5.7$	$q_3=15.3$	$\theta_3=4.3$
$q_4=1.5$	$\theta_4=11.7$	$q_4=13.9$	$\theta_4=4.7$
AVE $q=2.5$	AVE $\theta=6.7$	AVE $q=14.6$	AVE $\theta=4.5$

次に, 松代の東京大学地震研究所保科観測点で記録された, 1975 年 3 月 25 日から 12 月 29 日までの 5 日ごとの地震数をとことにしよう (Fig. 11b). データは東京大学地震研究所北信微小地震・地殻変動観測所の観測報告によつた. この系列では揺らぎが余り大きくないといえ, 地震数の平均値のまわりの変動は小さい. 前の例と同様に実際のデータの時間平均から得られた k, q, θ の値を表 1B に示す. この例では推定された q や θ の値は非常に良い一致を示す.

以上の 2 例において, 別々の計算によつて求められた q や θ の値が良い一致を示すということは, 少なくともこれらの例においては, 理論と実際が良く合っていることを示しているように思われる.

現実のデータに対する理論の適用はそれほど容易なことではない. それは, 長時間にわたつて均質なデータを得ることが意外に困難であることや, データの取り扱い, 例えば領域の設定

や地震の数のとり方等に、いろいろと難しい問題があるからである。しかし、今後議論を進展させていくためには、さらに多くの実際のデータとの比較が必要であろう。それについては将来の課題としていきたい。

§ 結論と討論

ある地域（系）における地震活動を、そこで発生する地震数に着目して、その変動として捉えることを試みた。(7) 式の logistic 式や (9) のその修正式は松代や和歌山における群発地震活動や大地震の前後の地震活動の消長を非常によく表現することができる。(6) 式や (9) 式に統計的な揺らぎが加わつたとする (17) の確率微分方程式は、地震現象において考えた小さい系（地域）が他の部分（外界）と相互作用しながら時間発展していく様子を示す。この式はコロイド粒子の「Brown 運動」を記述する Langevin 方程式に相当するものであり、まさに、地震現象を「Brown 運動」として記述するものに他ならない。

定常状態を仮定することにより、この確率微分方程式から導かれた、活動の間欠的な急増 (burst) を伴った特徴的なパターンは、現実の地震活動ではかなり一般的なものであり、少なくとも定性的には、その特性をよく捉えているといつてもよいように思われる。

地震活動に周期性があるとかないとかは地震学における大きな問題の一つであり、古来議論の絶えることのなかつた問題である。また、しばしば地震活動と地球潮汐との関連が議論されたり、気象や火成活動あるいは太陽の黒点数との関連が考えられたりしてきた。しかし、こういった地震活動にある程度共通な特質が、地震の続発性とその反対の抑制性に基づく logistic 式やその修正式に不規則な統計的揺らぎが加わつたとする確率微分方程式から帰結されるということは余りに興味あることといわなければならない。

このようなパターンはもともと KERNER (1957, 1959) が生体数の変動を説明するため Volterra の力学から統計力学的取扱いによつて導いたものであるが、GOODWIN (1963) はタンパク生合成系の反応系でも同様な振舞いがみられることを示している。ここに、我々は地震現象と世の中の諸現象との間に存在する意外な類似性を見ることができる。

本論文で導入されたパラメータ θ が地震活動の何を表わすのかは、今のところ明確ではない。熱統計力学ではこれは温度に相当するわけである。それを知るためには、地震の発生が何によるのかを明らかにしなければならない。地震の発生が何によるのかについてもやはり多くの議論がある。古くは塩冶 (1901) の地殻不平均の概念があるがその物理的意味は曖昧である。KUSAKABE (1904) や NAGUMO (1966) は地震の発生頻度は地殻の歪（塑性歪）の時間変化に比例するとした。すなわち ϵ を歪（塑性歪）とすると

$$n \propto \dot{\epsilon}$$

今この関係式を一般に認めることにすると、地震数の分散は地殻の歪変化の分散を表わすことになる。したがってパラメータ θ は直ちに地殻の変形運動の揺らぎを直接反映する重要なパラメータということになるだろう。もしそうだとすると、我々が述べたような方法によつて、実際の地震の発生数の時系列を用いて地殻の状態を直接知る可能性が得られたことになる。

今後このような議論を発展させていくためには、まだ多くの理論的及び実際のデータとの直接的定量的な対応を通した検討が必要となるであろう。しかしながら現実のデータと理論との比較はデータの取り扱いも含めて、いろいろと難しい問題があつて容易ではない。しかし、将来こういつた研究を発展させていくことは地震現象をマクロ的な観点から整理していく上での大きな手掛りとなると思われる。

謝 辞

本研究を進めるにあたり東京大学地震研究所の南雲昭三郎教授と同理学部の斎藤正徳助教授には討論をしていただき、多くの貴重な御教示をいただきました。また同工学部の甘利俊一助教授には論文を読んでいただき大変有益な助言をいただきました。厚く感謝いたします。

上宝の地震データについては京都大学防災研究所の石川有三氏のデータを使わせていただきました。神戸大学理学部の三東研究室の皆様にはいろいろ助言していただきました。あわせて御礼申し上げます。

文 献

- 芦田 広・川崎広吉・丹須紀六迷, 1975, 生態系の構造, 安定性, 効率(I), 生物物理, **15**, 1-12.
- COWAN, J. D., 1970, Statistical Mechanics of Nervous Nets, in "Some Mathematical Problems in Biology", vol. 2, Am. Math. Soc., 1-57.
- 塩治応太郎, 1901, 余震について(1), 震災予報告, **35**, 35-56.
- GOEL, N. S., S. C. MAITRA, and E. W. MONTROLL, 1971, On the Volterra and Other Nonlinear Models of Interacting Populations, Rev. Modern Phys., **43**, 231-276.
- GOODWIN, B. G., 1963, Temporal Organization in Cells, Academic Press.
- KERNER, E. H., 1957, A Statistical Mechanics of Interacting Biological Species, Bull. Math. Biophys., **19**, 121-149.
- KERNER, E. H., 1959, Further Considerations on the Statistical Mechanics of Biological Associations, Bull. Math. Biophys., **21**, 217-255.
- 久保亮五, 1972, 統計物理学, 岩波講座, 現代物理学の基礎 **6**, 246-250.
- KUSAKABE, S., 1904, Modulus of Elasticity of Rocks and Velocity of Seismic Waves with a Hint to the Frequency of Aftershocks, Publ. Earthq. Inv. Comm., No. 17.
- Leigh, E. R., 1968, The Ecological Role of Volterra's Equations, in "Some Mathematical Problems in Biology", vol. 1. Am. Math. Soc., 1-61.
- 茂木清夫, 1967, 前震・群発地震について, 地震II, **20**, 特集号, 143-146.
- NAGUMO, S., 1966, Deformation of an Anisotropic Visco-elastic Medium due to Internal Force

under Initial Stress and Its Significance in the Activities of Earthquake Swarms, Bull. Earthq. Res. Inst., 44, 1623-1664.

太田邦昌, 1975, 個体成長の古典的モデルとダイナミカルシステム, 生物科学, 27, 103-112.

Utsu, T., 1969. Aftershocks and Earthquake Statics (I), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. VII (Geophys.), 3, 129-195.