溝を通過するレイリー波群について (II)

関西大学工学部物理学教室	藤	井	和	成
関西大学工学部土木工学教室	滝	本	孝	哉
関西大学工学部土木工学教室	中	山	善	律
関西大学工学部物理学教室	中	野	正	吉

(昭和 54 年 8 月 10 日受理)

Group of Rayleigh Waves Transmitted across a Trench on the Surface of Elastic Half-space (II)

Kazunari FUJII

Department of Physics, Faculty of Technology, Kansai University

Takaya TAKIMOTO

Department of Civil Engineering, Faculty of Technology, Kansai University

Yoshinori NAKAYAMA

Department of Civil Engineering, Faculty of Technology, Kansai University

Masayoshi NAKANO

Department of Physics, Faculty of Technology, Kansai University

(Received August 10, 1979)

It is pointed out that the transmission coefficients empirically obtained in (I) take the larger values in general those derived from theory by MAL and KNOPOFF (1965), which suggests the considerable effects of certain converted waves on behaviors of group of transmitted Rayleigh waves. An experiment denotes that two phases, SR and RS , are most significant among all the converted waves, on the transmission along a step from elevated to depressed side and vice versa, respectively, and hence, group of transmitted Rayleigh waves consists of the following four phases; $R+tr. R$, $RS+RRRS$, $SR+SRRR$ and SRS . The transmission coefficients of these phases are separately estimated through another experiment, sum of which almost coincides with the original coefficient in (I).

1. はじめに

(I) でもとめたレイリー波群の総括的な透過率の中には、使用した測定値の振幅スペクトルにすでに転化波 (converted waves) が含まれているため終始レイリー波の形で伝わる波だけでは説明できない量が内在している。(II) では波群を構成する波の種類をまづ決定し、種類別に透過率をもとめてそれらが全体の透過現象にどの程度寄与しているかを考察した。自由表面上の圧力型波源による転化波の役割について、一応定量的な結論がえられたように思われる。なお現象は(I)同様すべて二次元問題として取扱い、また $|R(\omega, h)|$, $|R(\omega)|$, $\bar{R}$, $tr. R$ などの記号はそのまま (I) の意味で用いた。

ステップを透過するレイリー波についての MAL and KNOPOFF (1965) による理論的な透過

昭和 54 年 5 月 3 日発表

率は、転化波を考慮に入れない場合のかなり正確な結果を与える【数値解析との比較, MUNA-SINGHE and FARNELL (1973) など】から、以下の考察にしばしば用いた。 $\bar{R}$ 波の解析的な解については McGARR and ALSOP (1967) による別の立場があるがここでは用いなかた。これらの解の比較など今後考えてみたいと思つている。

ステップ透過の際の主要な転化波の種類は既に KATO and TAKAGI (1956) により詳しく指摘されている。われわれも全く同様に走時曲線をしらべることでそのうち特に大きな影響を持つ位相をもとめた。また主要な転化波の、ステップの位置による透過率の変化を実験的にもとめるに当つて、(I) の実験同様素子を固定状態のままに置くなど精度を一様に保つための種々の配慮を行つた。

後述のように以上の考察ではきわめて浅い溝での透過率の説明が不十分である。これはこのような範囲に MAL-KNOPOFF の式を用いることの不適当さに最大の原因があると思われるが、今後別の立場から検討しなければならない問題の一つと考えている。

2. レイリー波群を構成する波

MAL and KNOPOFF によれば、自由表面に沿つて進む角振動数 ω のレイリー波 (平面波) が高さ h のステップを透過する場合、透過レイリー波は $\bar{R}$ と $tr. R (=RRR)$ の二種の波からなると見ることができる。 h の波長に対する相対的大小によりとくに $\bar{R}$ 波が大きく影響されるが、 h が中間的な値のときの透過レイリー波と元のレイリー波の振幅比 (ステップに対する透過率) は、高い側から低い側 (以後 E-D と略する) またはその逆 (D-E と略する) のいずれの透過についても

$$t_0(h/\lambda) = |R'/R + A_0 A_1 \exp i(\phi_0 + \phi_1) \cdot (1 - R'/R) \exp i\omega h/V_R| \quad (1)$$

で与えられる。ここに R'/R は $\bar{R}$ 波のみの透過率 (振幅比および位相差) で、 $A_0 \exp i\phi_0$ 、 $A_1 \exp i\phi_1$ はそれぞれ上の平面レイリー波が 90° および 270° の角を回る際の振幅比と位相差である。

したがつて伝搬するレイリー波がパルスの場合にはその振幅スペクトル $|R(\omega)|$ で重味をつけた t_0 の平均値

$$\bar{t}_0(h) = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |R(\omega)| t_0(h/\lambda) d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} |R(\omega)| d\omega} \quad (2)$$

によって (I) と同様にステップに対するパルスの透過率を定義することができる。また深さ h 、横幅 d の溝を越えるときの透過率については、(I) で述べたように d の影響をほぼ無視

Fig. 1. The transmission coefficients of harmonic (A) and pulsative (B) Rayleigh waves empirically obtained in (I), with the theoretical ones only consisting of $\bar{R}$ and $tr. R$ waves, derived by theory of Mal and Knopoff (continuous lines).

できるため E-D, D-E 透過の組み合わせとして,

$$T_0(h/\lambda) = \{t_0(h/\lambda)\}^2 \quad (3)$$

パルス透過率はその平均値

$$\bar{T}_0(h) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |R(\omega)| \{t_0(h/\lambda)\}^2 d\omega \bigg/ \int_{\omega_1}^{\omega_2} |R(\omega)| d\omega \quad (4)$$

という結果が得られる。

Fig. 1(A), (B) は (I) でもとめた透過率の実験値 T , $\bar{T}$ に上記の T_0 , $\bar{T}_0$ を示す曲線をそれぞれ描き加えたものである ($A_0 A_1 \exp i(\phi_0 + \phi_1)$ には高さ $h=6 \text{ cm}$ の E-D 透過の実験 (後述, Fig. 2 参照) における $tr. R$ 波の記録からえた値を用いた. $A_0 A_1 \exp i(\phi_0 + \phi_1) = 0.198 e^{1.334i}$). 曲線と点分布が示す変動は両図とも互いに良く似ているが, h/λ , h/λ_0 のほぼ全域に亘って T , $\bar{T}$ の値の方が大きく T_0 , $\bar{T}_0$ との差が優に 0.1 に達する点も多い. すなわち T_0 , $\bar{T}_0$ は溝に対する透過率の表現としては不十分であり, その原因は T , $\bar{T}$ をもとめた $|R(\omega, h)|$ の中に転化波が含まれているためと考えられる.

溝を透過するレイリー波群の中の, $\bar{R}$, $tr. R$ 以外の波をもとめるために, まづステップを通過する主要な波の種類をそれらの走時によつて調べてみた. Fig. 2 (A) は E-D 透過の実験装置と記録の一部分を示したものである. ステップの高さは 6 cm で, これだけの高さがあれば

Fig. 2. Dispositions of source and receiver for the experiments to find a few dominant phases out of the group of Rayleigh waves, transmitted along a step from elevated to depressed side (A) and from depressed to elevated side (B), with typical seismic records in both cases.

Fig. 3. The time-distance curves of the dominant phases denoted in the records of Fig. 2, in cases of transmissions from elevated to depressed side (A) and vice versa (B), respectively.

tr. R (=RRR) 波は十分離れて固立し、また $\bar{R}$ 波は実際上消滅する (パルスの卓越波長は $\lambda_0 = 2.5 \text{ cm}$ である。(I) 参照)。受振器はステップの下端より 2 cm の位置から 2 cm 間隔で 20 cm の位置にまで移動させる。記録に現われる顕著な位相の最初の山 (Δ , $\circ$ 印) の走時を取れば Fig. 3 (A) のようになるが、走時曲線との比較からそれらが *SR* (転化波)、および *RRR* 波であることが分かる (*SR* 波に先行する小さい波 ($\times$ 印) は *PR* 波である)。D-E 透過

Fig. 4. Rays of four phases governing the group of transmitted Rayleigh waves across a trench: $\bar{R}+tr.R$ (pure Rayleigh phases), $S\bar{R}+SRRR$ (converted phases from S), $\bar{R}S+RRRS$ (converted phases to S) and SRS . Among the converted phases to S two others with different rays may be comprehended; those converted to body wave (P or S) at the lower corner of trench, brought to the free surface and again converted to Rayleigh wave there, then reaching the receiver.

の場合について同様の実験を行えば、Fig. 3(B) のようになり RS および RRR が主要な波であることが示される。以上の事実からかなり高い（波長に対して）ステップの主要透過波群は転化波 SR ないし RS と RRR 波から構成されること、したがってステップの透過ではつねに $\bar{R}$, RRR , SR ないし RS が主位相であるとの結論がえられる。

Fig. 4 はこの結論に従って溝の透過波を構成する4種類の波を図示したものである。レイリー波群はほぼこの4種類の波によつて構成されているものと思われる。ただし下段の2図面が示す波の中には破線で描かれているように溝の右下端から実体波に転化後ふたたび自由表面でレイリー波に転化するという位相が考えられる(D-E透過におけるこの位相を R^* と名づける)。Fig. 5(A) は位相 R^* の効果を確認するための実験を示したもので、スリットを刻まないときの記録は(B)図上方、スリットを刻んで R^* 波の到達を防いだときの記録は下方のようになり

Fig. 5. (A) Dispositions of source, slit and receiver for the experiment to cancel two phases stated in Fig. 4 out of the record of RS . The slit is to cross the paths of these phases. (B) Seismic records at the above receiver in cases of the slit being absent (above) and cut in (below), respectively. A considerable effect of these phases can be seen by comparing both records.

両者にはかなりの差違が認められる。しかし次節に述べる透過率測定の実験で RS 波と R^* 波を分離することは実際上不可能であり、依つてこれらは同種の波であると見なし一括して RS 波と考え解析を行つた。なお P 波との転化による波は一般に小さくて無視できる上に、走時が早いので (I) で定義したレイリー波群に属さぬものが多い。いづれにしてもそれらは透過波の主要部にはならない。

3. SR , RS 波の透過率測定

E-D 透過の際の SR 波の透過率は次のように表わすことができる。E 側表面上の波源素子とステップの下端を結ぶ直線が自由表面となす角を θ 、波源と下端間の距離を r とする。 SR 波は距離 r を S 波で、その後 D 側表面に沿つてレイリー波で進むから D 側表面での振幅スペクトルは、 r が十分大きくかつ媒質が完全弾性体ならば、

$$|R_c(\omega)| = |S(\omega)| f(\theta) r^{-1/2} \cdot g(\theta)$$

で与えられる。ここに $f(\theta)$ は S 波としての指向性、 $g(\theta)$ は S 波からレイリー波への転化率を表わして、ともに ω には無関係な θ のみの関係と考えてよい。ステップの高さを h とすれば $r = h / \sin \theta$ であり、 SR 波のパルス透過率は

$$\begin{aligned} \bar{t}_{SR}(h, \theta) &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} |R_c(\omega)| d\omega \bigg/ \int_{\omega_1}^{\omega_2} |R(\omega)| d\omega \\ &= h^{-1/2} \cdot f(\theta) g(\theta) \sin^{1/2} \theta \int_{\omega_1}^{\omega_2} |S(\omega)| d\omega \bigg/ \int_{\omega_1}^{\omega_2} |R(\omega)| d\omega \end{aligned} \quad (5)$$

となる。実測のスペクトル $|r_c(\omega)|$ 、 $|r(\omega)|$ からこの値をもとめるには

$$\begin{aligned} |R_c(\omega)| &= |r_c(\omega)| \exp \{ \alpha(\omega)(x - h/\tan \theta) + \beta(\omega) \cdot h/\sin \theta \} \\ |R(\omega)| &= |r(\omega)| \exp \{ \alpha(\omega)x \} \end{aligned}$$

という補正が必要である。 x は波源受振器間の水平距離を意味している。

同様に D 側表面上の波源が放射するレイリー波がステップの下端に到り、自由表面と角 θ をなす受振器 (E 側表面上) の方向に、転化率 $h(\theta)$ で S 波に転化して進むとすると、その振幅スペクトルは受振器の測定値が上下成分であることを考慮すれば、

$$|S_c(\omega)| = |R(\omega)| h(\theta) \cos \theta \sin^{1/2} \theta \cdot h^{-1/2}$$

となることが分かる。したがつて RS 波のパルス透過率は

$$\bar{t}_{RS}(h, \theta) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |S_c(\omega)| d\omega \bigg/ \int_{\omega_1}^{\omega_2} |R(\omega)| d\omega = h(\theta) \cos \theta \sin^{1/2} \theta \cdot h^{-1/2} \quad (6)$$

で与えられる。実測値からこの値をもとめるには先と全く同じ補正が必要である。

さて Fig. 4 に示された、溝を通過する 4 種の主要な位相のうち $\bar{R}+tr. R$ の透過率については前節で述べた (T_0 および $\bar{T}_0$). 他の波のパルス透過率の近似値は上の $\bar{t}_{SR,RS}$ と、先述の $\bar{t}_0(h)$ との積としてそれぞれ以下のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}\bar{T}_{\bar{SR}+SRRR}(h, \theta) &= \bar{t}_{SR}(h, \theta) \bar{t}_0(h), & \bar{T}_{\bar{RS}+RRRS}(h, \theta) &= \bar{t}_{RS}(h, \theta) \bar{t}_0(h) \\ \bar{T}_{SRs}(h, \theta) &= \bar{t}_{SR}(h, \theta) \bar{t}_{RS}(h, \theta)\end{aligned}\quad (7)$$

これらの値は $\bar{t}_{SR,RS}$ を実測すればえられるが、上式から明らかなように $\bar{t}_{SR,RS}$ は同一の θ に対して

$$\bar{t}_{SR,RS}(h', \theta) = (h/h')^{1/2} \bar{t}_{SR,RS}(h, \theta) \quad (8)$$

という関係を満足するからステップの高さを一定にして種々の θ に対する $\bar{t}_{SR,RS}(h, \theta)$ を測定しておけば、高さが変化した場合の値は (8) 式から簡単に導けることになる。なお本来の正弦波透過率を知るためには $t_{SR,RS}(h, \theta, \omega)$ を測定し、 $t_0(h/\lambda)$ との積を作ればよいが、(I) で述べたように実測のスペクトルの比から透過率を個々の ω の関数として定めることは精度上困難なので、一応 $\bar{t}_{SR,RS}$ でそれらを近似させることにした。従って正弦波の透過率は $\bar{t}_{SR,RS}$ と $t_0(h/\lambda)$ の積で与えられる。

Fig. 6 は $h=6\text{ cm}$ に固定して種々の θ に対する $\bar{t}_{SR}$ および $\bar{t}_{RS}$ の値を測定した実験装置図である。先述のように h のこの程度の値についてはすでに $\bar{R}$ 波は實際上消滅するから E-D 透過波は SR と RRR , D-E 透過波は RS と RRR からなると見てよい。ステップの上部が突き出してあるのは RRR の走時を長くして SR, RS との分離を完全にするためであり、このようにして R_1, R_2 ではほぼ SR, RS のみの記録を読み取ることができる。最初平坦な表面上に S, R_1, R_2 を設置し R_1, R_2 での記録の一致をたしかめつつ $|R(\omega)|$ を 10 回測定した後 E-D では S, D -E では R_1, R_2 を固定しておいて図のようなステップを作る。破線のように順次媒質を切り落してステップを移動させ (θ を変え), その都度スペクトルをもとめて $\bar{t}_{SR,RS}$ を計算し両側の

Fig. 6. Dispositions of sources and receivers and geometries of the edge of medium, for the experiments to measure the transmission coefficient of SR along a step from elevated to depressed side (A) and that of RS from depressed to elevated side (B). The $tr. R$ phases much later arrive than SR or RS , for the "roofs" projecting from the upper part of elevated side.

Fig. 7. Variations of the transmission coefficients of SR (A) and RS (B), with the angles of radiation and emergence, respectively. The angles are measured from the free surface to the direction of S on both cases.

受振器での値の平均を取る。(I)の実験と同様に全実験を通して素子が固定されたままなので精度はある程度保持される。また両側で受振することは素子の接着状態、媒質への加工等のチェックに役立つ。

Fig. 7 は上の実験結果を、横軸に θ を取ってプロットした図である。最初 θ について単調増加に変動するがさらに θ が増加すると極値を持つようである。さし当り必要なのは $5^\circ \sim 20^\circ$ の値であるからこの範囲の測定値に最小自乗法を用い、実験式 $a\theta^p$ (θ は度) を仮定して関数形を定めた。図に書かれた式がその結果であり、図中の曲線がそのグラフである。

4. 溝を越える転化波の透過率

前節末にもとめた $\bar{t}_{SR,RS}(6, \theta) = a\theta^p$ を用いれば、レイリー波群に含まれる 3 種の転化波 ($S\bar{R} + SRRR, \bar{R}S + RRRS, SRS$) の透過率が (7) 式からもとまる。たとえば状態 (h, θ) での $S\bar{R} + SRRR$ のパルス透過率は

$$\bar{T}_{S\bar{R}+SRRR}(h, \theta) = 0.00402\theta^{1.31} \cdot \sqrt{h/6} \cdot \bar{t}_0(h),$$

正弦波透過率 $T_{S\bar{R}+SRRR}(h, \theta, \omega)$ の場合には $\bar{t}_0(h)$ を $t_0(h/\lambda)$ におきかえればよい。さて (I) で測定計算した $T, \bar{T}$ の中にこのような転化波の透過率がどの程度含まれるかを調べるには、

Fig. 8. Comparisons of the empirical transmission coefficients with the curves derived by summing up the coefficients of main four phases separately obtained, in cases of pulsative (A) and harmonic (B) Rayleigh waves, respectively.

h/λ , h/λ_0 に対応する各転化波の (h, θ) をまづ知る必要がある. パルスの場合には h/λ_0 が与えられれば直ちに h が分かる. また θ については 5 種類の横幅の溝のおおの θ を平均してそれを用いることにする. 一方正弦波の場合には与えられた h/λ に対して, そのときの T を決定するのに用いたすべての波の (h, θ) の平均値をとり, それを転化波の (h, θ) に当てる (附記参照). このようにして T , $\bar{T}$ に含まれる転化波を決定し, その透過率をもとめてそれらを先の T_0 , $\bar{T}_0$ に加え, T , $\bar{T}$ と合わせて描いたものが Fig. 8 である.

h/λ , $h/\lambda_0 \ll 1$ では 3 種の波のうち $S\bar{R}(+SRRR)$, $\bar{R}S(+RRRS)$ の透過率が SRS よりも相対的に大きい, 序々に均等化して h/λ , $h/\lambda_0 = 2.0$ の附近では $SRRR$, $RRRS$, SRS および $tr.R$ がほぼ等量の透過率を持つに至る. 深い溝程透過率に対する転化波の寄与は確に大きい, 近似式 $a\theta^p$ の使用範囲は限られたものなので断言的なことは云えない. T_0 , $\bar{T}_0$ にこれらの波の透過率を算術的に加えた値は, 4 種の波から構成された波群が持ちうる透過率の云わば上限値に該当するから, それが T , $\bar{T}$ の点分布の上端部を通過することはレイリー波群の構成がたしかに上述の波によることを十分に実証している. ただ第 1 節にも述べたように h/λ , $h/\lambda_0 \ll 1$ における T , $\bar{T}$ は上の結果によつては全く説明できない. きわめて浅い溝での測定にはある程度の実験誤差も考えられなくはないが, 透過率の曲線より一様に実験値が大きいことを見てもむしろ問題は曲線の方にあるように思われる. 本来 (1) 式は中間的な h に対

する近似式であり、 $h/\lambda \ll 1$ でそのままこれを用いることには $tr. R$ に対する仮定など不適当な点が出てくる。事実レイリー波が E-D ステップを透過する場合（この場合には転化波は無視できる）についての MUNASINGHE and FARNEL の数値解析の結果を (1) 式と比べると、 $h/\lambda \ll 1$ での前者は上に凸な曲線を描きその値も後者よりかなり大きくなるようである。

以上圧力型波源による弾性擾乱について、溝の透過の問題を考察してみた。未解決の面も存在するが透過のメカニズムは一応解明できたのではないかと考えている。

数値計算はすべて関西大学大型電算機室の FACOM 230-48 を用いて行った。

文 献

- KATO, Y. and A. TAKAGI, 1956, Waves Propagation in the Step-shaped Structure and on the Cliff, Sci. Rep. Tohoku Univ., 8, 74-85.
 MAL, A.K. and L. KNOPOFF, 1956, Transmission of Rayleigh Waves past a Step Change in Elevation, Bull. Seism. Soc. Am., 55, 319-334.
 MCGARR, A. and L.E. ALSOP, 1967, Transmission and Reflection of Rayleigh Waves at Vertical Boundaries, J. Geophys. Res., 72, 2169-2180.
 MUNASINGHE, and G.W. FARNELL, 1973, Finite Difference Analysis of Rayleigh Wave Scattering at Vertical Discontinuities, J. Geophys. Res., 78, 2454-2466.

附記: T の平均値とそれに影響する転化波について

溝 (h, d) を透過する波のスペクトル $|R(\omega, h)|$ の値は周波数 $f=10$ kHz より 90 kHz ま

Fig. 9. Distribution of points (x, y) , where $x=d/\lambda$ and $y=h/\lambda$, corresponding to the values of transmission coefficients obtained from the amplitude spectrum of trench (h, d).

(x, y) (さし当り T は二変数 $x=d/\lambda$, $y=h/\lambda$ の関数と考える。 $x=d/127 \cdot f$, $y=h/d \cdot x=h/127 \cdot f$, $f=10, 11, \dots, 90$, d, h は cm 単位の数) が定まる。

いま d を $0.4\lambda' \sim 2.0\lambda'$ の 5 個の値のいづれかに固定する。この d を横幅に持つ溝は 20 個で、それらに対するスペクトルから定まる $T(x, y)$ は $81 \times 20 = 1620$ 個存在する。この T の値の集合を次のように整理する。

x の変域 $(10/127 \cdot d, 90/127 \cdot d)$ を 5 等分し、それぞれの変域, $10/127 \cdot d \leq x \leq 25/127 \cdot d$, $26/127 \cdot d \leq x \leq 41/127 \cdot d$,

$\cdots 74/127 \cdot d \leq x \leq 90/127 \cdot d$ に属する T の値 (個数は 320, 最後の変域のみ 340) は x の中央値 $\bar{x} = 18/127 \cdot d, 34/127 \cdot d, \cdots 82/127 \cdot d$ における値と見なす. こうしてまづ T の集合は x の 5 個の値に対する値群に分れる. 次に y の値を幅 0.05 の小区間 (0.000, 0.050), (0.050, 0.100), $\cdots$ に分けこれらの区間に属する T の値を上記の値群ごとに平均し, 平均値を区間の中央値 $y = 0.025, 0.075, \cdots$ における T の値と定める. このようにして一つの d の値を固定すれば x の 5 通りの値に応じた, 5 通りの T の (y に対する) 変化 $T(y)$ がえられる (したがって全体のデータからは 25 通りの $T(y)$ が定まる). h の最小, 最大値はそれぞれ 0.15 cm, 6.00 cm であるから y の最大値は $6.00 \times 90/127 \div 4.252$ であり上の小区間は (4.250, 4.300) までとることができるが, 余り大きい y の値域では小区間に入る T の個数が少く精度が落ちるためパルスの場合を参考にして (2.000, 2.050) で打ち切った.

最後に T は x に対して変動が緩かであることを予想して, 5 つの d の値についての 25 個の $\bar{x}$ のうち ± 0.2 の範囲内で一致するものに属する T をさらに平均し, 全体を 5 通りの T の変化に直した. それらをプロットしたものが (I), Fig. 8(A) である.

次に $y = h/\lambda$ が与えられたとき, それに対する T の値を決定するために用いたデータには, どのような状態の転化波が混入しているかについて考える ((I), Fig. 8(A) の点分布を一曲線で表わすならば, 結局 T を y に対して一意的に定めることになる).

ふたたび d を固定し, 20 個の溝による T のみについて考えてみる. 図は 20 個の溝により定まる $T(x, y)$ の, 変数の組 (x, y) の分布を示したもので, 一つの h (溝) に対する点 (x, y) の全体は直線 $y = h/d \cdot x$ の上に並ぶ. 与えられた $y = \bar{y}$ の前後に微小な幅 δ をとり帯 $(\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ を考えると, 結局先程の定め方にしたがえば $T(\bar{y})$ はこの帯の中に含まれる点 (x, y) での T の値を, 総平均したものと考えて差支えない. さて直線 h_1 上の n_1 個の点がこの帯の中に含まれるならば, $T(\bar{y})$ を定めるのには $h = h_1, \theta = \theta_1 = \tan^{-1} \{2h_1/(30-d)\}$ の転化波が n_1 個入ったデータを用いたことになり, したがって平均して

$$h = \frac{n_1 h_1 + n_2 h_2 + \cdots}{n_1 + n_2 + \cdots} \quad \theta = \frac{n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2 + \cdots}{n_1 + n_2 + \cdots}$$

という状態の転化波が $T(\bar{y})$ に介入していると考えることができる. 図から直線の勾配を考えて

$$n_1 = 254\delta/h_1$$

故に

$$h = \frac{p}{1/h_1 + 1/h_2 + \cdots} \quad \theta = \frac{\theta_1/h_1 + \theta_2/h_2 + \cdots}{1/h_1 + 1/h_2 + \cdots}$$

ただし p は x の区間 $(10/127 \cdot d, 90/127 \cdot d)$ 内で帯内を通過する直線の本数である。このようにしてもとまる (h, θ) を 5 通りの d について平均し、それによつて転化波を決定する。