地震マグニチュードの物理的基礎

東北大学理学部地球物理学教室 小山 順二・島田 伸介

(昭和 60 年 4 月 7 日受理)

Physical Basis of Earthquake Magnitudes

Junji KOYAMA and Nobusuke SHIMADA

Geophysical Institute, Faculty of Science, Tohoku University

(Received April 7, 1985)

A relation between surface-wave magnitude M_s and fault area S for great earthquakes has been proposed;

$$\log S \simeq 2M_s - 11.5 \quad (M_s > 7.5).$$

A similar formula has been also derived for body-wave magnitude m_b^* redetermined from maximum amplitudes of short-period P-wave trains;

$$\log S \propto 1.7 m_b^*.$$

These are quite different from a theoretical relation expected on the basis of long wave approximation. The statistical theory of extreme values has been applied to understand the relations considering that the component waves which constitute the wave trains for $m_b^*-M_s$ determinations originate from the random fracture of fault heterogeneities.

§1. はじめに

地震マグニチュードは地震の大きさやエネルギーを表わす量として、古くから広く使われてきた [GUTENBERG and RICHTER (1954)]. 近地で観測される比較的小さな地震のマグニチュードは個々の観測組織が独自にさまざまな方法で決定し、局地的な地震活動を評価している [ADAMS (1977); BÅTH (1981); LEE and WETMILLER (1978)].

地震の発生過程が物理的に記述され、地震モーメントや断層規模などによつて、定量的に地震の大きさが表現されるようになってきた [例えば, KANAMORI and ANDERSRN (1975); PURUCARU and BERCKHEMER (1982)]. それにしたがい、混乱しているマグニチュードスケールを統一しようとする考えがあり [GELLER and KANAMORI (1977); CHRISTOSKOV *et al.* (1979); ABE and KANAMORI (1980)], 大きい地震ばかりではなく、広いダイナミックレンジにわたり地震マグニチュードが統一的に評価されるようになってきた。

従来、経験量としてのみ取りあつかわれている地震マグニチュードに関する統計式も、震源パラメータとの関連や時系列解析の進んだ理論をもとに、それらの見なおしもなされつつある [小山・武村 (1983)]. 本稿では、主に短波長近似のもとで地震マグニチュードと震源パラメー

Fig. 1. Relations between surface-wave magnitude M_s and fault area S for large and great earthquakes (Reproduced from KOYAMA and ZHENG, 1985). M_s 's are quoted from ABE (1981, 1984) and S 's from LAY *et al.* (1982). So-called Utsu-Seki formula fits the data of earthquakes with M_s 's smaller than 7 (KANAMORI and ANDERSON, 1975), while a new relation $\log S \approx 2M - 11.5$, fits the data of earthquakes with M_s 's larger than 7.5.

すなわち、周期 20 秒を基準にしたとき、(a) 断層面上のすべり時間 τ が短く、破壊の伝播継続時間 T_L が長い場合、(b) τ が長く、 T_L が短い場合、(c) τ も T_L も長い場合、(d) τ も T_L も短い場合である。(a) は細長い断層破壊の地震、(b) は津波地震のようなゆつくりしたすべりの地震、(c) は非常に大きな地震、(d) は微小地震と近似的に考えられよう。GUTENBERG and RICHTER (1954) のエネルギーと M_s の関係；

$$\log E_s = 1.5 M_s + 11.8 \quad (3)$$

や、地震モーメント、 M_0 と M_s との関係式；

$$\log M_0 \approx 1.5 M_s \quad (4)$$

タがどのような関係になるのかを極値統計の立場から考えてみよう。

§2. 地震マグニチュード、断層面積、地震モーメント

表面波マグニチュード M_s は遠地の地震記象に卓越する周期 20 秒前後の表面波振幅から決められる。GUTENBERG and RICHTER (1954) 以後、このマグニチュードスケールも混乱の際に達していたが、GELLER and KANAMORI (1977) や ABE (1981, 1984) の一連の研究で凡そ一世紀にわたる主要地震の規模評価が統一的になされたことになる。KOYAMA and ZHENG (1985) はこの表面波マグニチュードを巨大地震の断層面積、余震面積、津波浪源域面積と比較して (Fig. 1),

$$\log S \approx 2 M_s - 11.5 (M_s > 7.5) \quad (1)$$

を得た。この式は従来知られていた宇津・関公式 (1954)；

$$\log S \approx M - 4 \quad (2)$$

とは大きく違う関係式である。ただし S の単位は km^2 である。

KANAMORI and ANDERSON (1975) は、20 秒周期の表面波最大振幅が震源スペクトルの周期 20 秒での強度に依存すると考え、 M_s と地震モーメントや断層の長さ L との関係を決定論的に記述し、4 つの場合に分類した。

は、地震の発生過程が、上述の (a) や (b) の場合として、これら (3), (4) 式が理解されてきた [KANAMORI and ANDERSON (1975)]. 理論的にも経験的にも、

$$M_0 \propto S^{3/2} \quad (5)$$

が示される。従つて、(1) 式の関係は、(3) や (4) 式から期待される M_s と S の関係と異なるものであると云えよう。

実体波マグニチュード m_b は、近地地震の解析に使われたり、観測系の歴史の変遷などもあり、“Misunderstanding and oversimplified misapplications” [SPALL (1980)] が指摘されている。武村・小山 (1980) は大地震の短周期地震波の励起を調べる為、世界標準地震計短周期記録を用いて、P波々群の最大振幅から実体波マグニチュード m_b^* の再決定を行つた。小山等 (1984) はこの m_b^* を用いて、短周期地震モーメント M_1 との関係式；

$$\log M_1 = 1.24 m_b^* + 17.9 \quad (6)$$

を得た。また、短周期地震モーメントは、データのばらつきは大きいが、平均的に見て、長周期地震波から独立に決められる地震モーメントと

$$M_0 \propto M_1^2 \quad (7)$$

の関係にあることを指摘した。

Fig. 2 で小山等 (1984) のデータから M_0 と m_b^* を比較し、(6) と (7) 式から、

$$\log M_0 \simeq 2.48 m_b^* + 11.1 \quad (8)$$

なる関係を得る。津波地震のデータ等も含み、又、地震活動域が凡世界的に広いことなどのため、データのばらつきは大きい、(8) 式が良く観測値を説明していることがわかる。ただし、(8) 式は厳密な最小自乗法の結果ではない。これは、Fig. 2 のデータが m_b^* の 6.5 から 7.0 に集中して分布している為、最小自乗解はそれらのデータに強く支配されるから用いないのである。巨大地震の数は少ないが、震源過程を考える上からは、非常に重要であることは言うまでもなく、(8) 式のように巨大地震のデータに大きな重みをおく関係式を採用している。(5) 式を用いると、近似式；

Fig. 2. Relation between body-wave magnitude m_b^* redetermined by TAKEMURA and KOYAMA (1980) and seismic moment M_0 by LAY *et al.* (1982). The relation, $\log M_0 \simeq 2.48 m_b^* + 11.1$, is inferred from KOYAMA and ZHENG (1985). This relation is used to derived $\log S \propto 1.7 m_b^*$ from an assumption of $M_0 \propto S^{3/2}$ where S is fault area.

$$\log S \propto 1.7 m_b^* \quad (9)$$

が求まる. このように短周期地震波の励起を反映する実体波マグニチュードも断層破壊全体の大きさと密接に関係している. m_b^* は周期がおおよそ 1~2 秒の短周期 P 波々形から決められている [武村・小山 (1980)]. ここでは島孤帯で発生する浅発地震を考えているのであるから, m_b^* を規定している地震波の波長はおおよそ 10 km 程度であろう. (9) 式を導くに用いた地震は 1964 年アラスカ地震等の巨大地震であり, 断層の長さは数十 km から数百 km 以上にも及ぶ. このように m_b^* は地震の大きさに比べて短波長の波動で決まり, その時の S と m_b^* の関係 [(9) 式] は, M_s と S との関係で云えば, (2) 式よりは, はるかに (1) 式の関係に近い.

この様に, $M_s > 7.5$ の巨大地震の表面波マグニチュードや短波長近似が成立しているような実体波マグニチュード m_b^* から, 各々の波動最大振幅はおおよそ断層面積の平方根に比例しているようである.

§ 3. 極値統計による最大振幅

KANAMORI AND ANDERSON (1975) は, 地震学的に得られる種々の経験式や統計的表現を地震発生過程の上から長波長近似, 長周期近似の手法で決定論的に明らかにしている. (2) 式の宇津・関公式も (4) と (5) 式からその物理的意味付けがなされている. ここでは, (1) や (9) 式の物理的意味をそれとは独立に, 確率論的な立場から考えてみよう.

周期 20 秒の表面波といえども, その波長は有限で, 70~80 km 程度である. 断層の長さで云えば, $M_s \sim 7.5$ の地震が丁度同程度の規模であろう [AKI (1972)]. 従つて, 1960 年 Chile 地震のように断層破壊が 800 km にも及ぶような場合 [KANAMORI and CIPAR (1974)], M_s は m_b^* がそうであるのと同様に, 地震の断層規模から見て相対的に短波長の波動の振幅から決まつていると考えられる.

短周期地震波の励起は, 近年, 小山 (1983) によつて詳しく考察され, 不均質断層の確率論的破壊に強く依存すると考えられている: 今, 断層面上に不均質領域 (断層パッチ) が無数に存在していて, それがランダムに破壊するとしよう. そのようにして励起される波動を遠方で, 例えば周期 1 秒や 20 秒の地震波で観測したとしよう. それらの波動はランダムな断層パッチの破壊により励起されるものであるから, 波の位相はランダムなものになつていると考えられる.

この様に考えれば, 短波長近似の上で考えられる地震マグニチュードは, その定義からして, ランダムな位相を持つ波動が確率論的に重ね合わさった時できる時系列の最大振幅値の常用対数で与えられるであろう. 最大振幅の最確値 (mode) $a_{\max}$ は, ランダム波動の包絡線振幅の自乗平均の平方根 (root mean square) $\bar{a}$ を用いて理論的に [LONGUET-HIGGINS (1952)],

$$a_{\max} = \bar{a} F(N) \quad (10)$$

と与えられる. ただし, F は, 包絡線振幅の確率分布に依存し, また, 時系列実現値大きさの N の関数となる. 波動のスペクトルが狭帯域で, 確率分布が Rayleigh 分布の時, Longuet-HIGGINS (1952) は,

$$F(N) = (\ln N)^{1/2} \quad (11)$$

で表わせることを示した.

波動のスペクトルが有色になると, Rayleigh 分布は次第に正規分布に漸近し, GUMBEL (1958) は正規分布となる極限で,

$$F(N) = (\ln N^2 / 2\pi)^{1/2} \quad (12)$$

を導いている. 彼らはもつと一般的にこの問題を取り扱い指数分布やロジスティック分布のとき,

$$F(N) = C \ln N \quad (13)$$

となることを示した. ただし, C は確率分布で決まる定数である.

理論的には包絡線振幅の確率分布が知れると $\bar{a}$ が 2 次のモーメントから計算される. しかし, 我々は, この確率分布を厳密に知っている訳ではない. したがって, 先ずランダムな断層パッチ破壊過程から励起される波動の $\bar{a}$ がどの様に表わされるのか考えてみよう.

§4. 不均質断層破壊による短周期波動

断層パッチのランダムな破壊をショットノイズで代表させ, 各断層パッチが放出する波動を観測系の特性も含めて, 減衰振動するサンイ波で近似する時, そのエネルギースペクトルは, サイン波の特徴的な周期 T_0 で鋭いピークをもつ [小山等 (1984)]:

$$E(T_0) \propto \bar{r}^2 k \sigma T_0^3 \quad (14)$$

ただし, $\bar{r}^2$ はここでは断層パッチが放出する波動の自乗平均振幅と考えればよく, 断層面の不均質性に強く依存するパラメータである. k は単位時間当たりのショットノイズ数 (断層パッチの破壊数) である. また, σ は観測される波形の包絡線振幅の拡がりを示すパラメータである.

断層面積を S , 単位面積当たりの断層パッチ数密度を m とすれば, 断層パッチの総数 K は

$$K = mS \quad (15)$$

だから, 断層破壊の有効継続時間を T とすれば,

$$k = K/T \quad (16)$$

と表わされる. 平均破壊伝播速度 v_r を考えれば, T は断層の長さを v_r で割った量で近似されるから [KANAMORI and ANDERSON (1975)],

$$T \simeq S^{1/2} / v_r \quad (17)$$

したがって,

$$k \simeq m v_r S^{1/2} \quad (18)$$

が得られる.

また, σ を震源で地震波々動を励起している特徴的な継続時間であると思えば, 凡そ,

$$\sigma \simeq T / (2 \sim 4) \quad \text{or} \quad S^{1/2} / (2 \sim 4) v_r \quad (19)$$

で近似されるだろう. さらに, (7) 式と (14) 式から [小山等 (1984)],

$$M_0 \propto M_1^2 \propto E(T_0) \quad (20)$$

の関係をを用いると, $\bar{r}^2$ は, (5) 式より

$$\overline{r^2} \propto S^{1/2}/m \quad (21)$$

なる比例関係にある。この式の意味は後で考えることにする。

(14) 式の様に鋭いピークを持つスペクトルの場合は、Parseval の等式をつかつて自乗平均振幅 $\overline{a^2}$ は、

$$\begin{aligned} \overline{a^2} &\propto E(T_0)/T \\ &\propto S \end{aligned} \quad (22)$$

となる。結局、断層パッチのランダムな破壊による短周期波動の最大振幅は、

$$a_{\max} \propto (K/m)^{1/2} F(K) \quad (23)$$

となることが期待される。

Fig. 3. Hypothetical magnitude scale M_{ag} from statistics of extreme values assuming Rayleigh distribution and Gauss distribution. They are illustrated by broken lines connecting points in the figure, respectively. A line with $\log K \propto 2 M_{ag}$ represents an approximate formula for the above two relations.

§5. 結 論

海洋表面の波動はいろいろな波源からの波が様々な方向から到来し、ランダムに重なり合いその波高分布は Rayleigh 分布となる [LONGUET-HIGGINS (1952); ANG and TANG (1975)]. 小山等 (1984) は巨大地震が励起した短周期 P 波々群の包絡線は誤差関数で近似されることを示した。これは波高分布を指定している訳ではないが、(23) 式の $F(K)$ の関数型を制約する一条件となるだろう。もちろん、正規波高分布が唯一解である訳でなく、小山等 (1984) は考慮していないが、Rayleigh 分布関数を巨大地震の短周期波群の包絡線としても正規分布関数に近い良い近似になることが期待される。したがって、ここでは、(11) と (12) 式を採用して議論を進めることにしよう。これは震源で励起される波動が単一周期であつたとしても、減衰の影響等が帯域を有色化する為であろう。

地震マグニチュードは、観測される地震波最大振幅を震源から観測点への波動伝播の影響を補正し、常用対数を取った値と定義されている。(23) 式を用いて、仮想マグニチュードを

$$\begin{aligned} M_{ag} &= \log a_{\max} \\ &= 1/2 \log K + \log F(K) + C_0 \end{aligned} \quad (24)$$

と仮定しよう。ただし、 C_0 は断層パッチの数密度、平均的大きさから決まる量であるが、ここでは、簡単のため、地震の大きさに依存しない ($C_0=0$) と仮定しよう。

Fig. 3 に断層パッチ総数をパラメータにして、正規分布、Rayleigh 分布の各々の場合について、マグニチュード M_{ag} を示した。図から明らかなように、 $K>50$ の充分数多く断層パッチが破壊する場合は、(24) 式右辺第 2 項の影響は小さく、総パッチ数の対数はマグニチュードの 2 倍に比例している。これは、(15) 式から断層面積の対数はマグニチュードの 2 倍に比例することになり、Fig. 1 で示した観測値や Fig. 2 から求められる関係を良く説明している。

(24) 式を見てわかるように、波高の頻度分布がここで考えた正規分布や Rayleigh 分布でない場合でも、 K が充分大きければ上に述べた結論は変わらないことが容易に理解される。CARTWRIGHT and LONGUET-HIGGINS (1956) は (12) 式に代わる近似表現として、

$$F(N)=[\ln(N^2/2\pi)-\ln \ln(N^2/2\pi)]^{1/2} \quad (25)$$

を導いている。GUMBEL (1958) によれば、(25) 式は (12) 式より良い近似となつている。この場合でも、先と同様に、(24) 式右辺第 2 項の影響は小さいから、同じ結論を得る。

§ 6. 考察と議論

巨大地震の表面波マグニチュードと断層面積の関係を統一化されたマグニチュードスケールで詳しく調べ、従来知られていた、大地震・中小地震の宇津・関公式とは、別の関係式があることがわかった。短周期地震計記録から再決定された実体波マグニチュードと地震モーメントの関係も調べられ、合理的な仮定のもとに、両地震マグニチュードはおおよそ断層面積の平方根の対数値に比例していることが明らかにされた。

(1) 式の関係は、例えば、大地震だけの断層の長さを用いたマグニチュードとの関係 [BÅTH (1981)] 等から期待される関係と調和的である。したがって、(1) 式について述べた比例傾向はここで考えているデータセットだけについて云えるものではなく、より広い普遍性をもつと考える。また、(9) 式のもとになる (8) 式は非常に大きな稍深発・深発地震の地震モーメントと実体波マグニチュードの関係 [KANAMORI (1983)] にほぼ一致する。

地震の断層規模に比べ、これらマグニチュードを決める際に用いている地震波動は、はるかに短波長の波である。したがって、不均質断層破壊に伴うランダムな波動であると考え、極値統計の理論から、地震マグニチュードについて考えてみた。これにより、短波長近似が成立する範囲では、地震マグニチュードは統計的にランダムな波動が重なり合い、その結果、上に述べるような関係を示すことが理論的に示された。

巨大地震に関して、

$$\log M_0 \propto 3M_s \quad (26)$$

の関係が指摘されている [KANAMORI and ANDERSON (1975)]. 理論・観測から導かれる (6) 式を用いれば、上式は、

$$\log S \propto 2M_s \quad (27)$$

となり、我々が経験的に導いた (1) 式と等価な関係式を示す。つまり、非常に大きい地震に関していえば、(2) 式より (1) 式のほうが現実的であることがわかる。そして、それは本論で述べてあるように、 M_s を決める地震波振幅が大きい地震にたいして短波長の波動で支配さ

れているからであると考えられる。

(26) 式は, AKI (1972) によれば, 震源スペクトルが短周期帯で周波数の自乗に逆比例して減衰していることを示す。TAKEMURA and KOYAMA (1983) に依れば, (26) 式は島孤帯で発生する長周期地震や津波地震でも成立している。したがって, (27) 式の関係はそれらの地震でも成立していることが期待される。

不均質断層が破壊する時, 短周期地震波の励起が震源パラメータとどのような関係にあるのか, (15)~(21) 式で考えた。実際の地震発生過程では, マルチプルショックであつたり, 両方向に破壊が伝播するなど, ここでは考えていない複雑さがあるだろう。しかし, 単純化した議論からわかることも少なくない。例えば, (21) 式は短周期地震波のエネルギーが断層の長さや幅に強く依存することを示す。ランダム波動であるからエネルギーが加算可能な時系列となつている訳である。これは, 長周期近似から知れる断層面上の平均的くい違い量が断層の長さや幅に比例する長周期地震学の結果と良い物理的対称を示している。また, この問題は (17) と (21) 式から推論されるように, 平均的な破壊伝播方向と短周期地震波の励起が密接な関係にあることを示している。

文 献

- ABE, K., 1981, Magnitudes of Large Shallow Earthquakes from 1904 to 1980, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **27**, 72-92.
- ABE., 1984, Complements to "Magnitudes" of Large Shallow Earthquakes from 1904 to 1980, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **34**, 17-23.
- ABE, K. and H. KANAMORI, 1980, Magnitudes of Great Shallow Earthquakes from 1953 to 1977, *Tectonophysics*, **62**, 191-203.
- ADAMS, R. D., 1977, Survey of Practice in Determining Magnitudes of near Earthquakes, Part 2: Europe, Asia, Africa, Australia, the Pacific, World Data Center A, Rep. **SE-8**, pp. 1-65.
- AKI, K., 1972, Scaling Law of Earthquake Source Time-function, *Geophys. J.*, **31**, 3-25.
- ANG, A. H. S. and W. H. TANG, 1975, *Probability concepts in engineering planning and design*, Vol. 1. Basic principles, John Wiley & Sons, New York, pp. 219-260.
- BÅTH, M., 1981, Earthquake Magnitude—Recent Research and Current Trend, *Earth Sci. Rev.*, **17**, 315-398.
- CARTWRIGHT, D. E. and M. S. LONGUET-HIGGINS, 1956, The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function, *Proc. Roy. Soc. London*, **A237**, 212-232.
- CHRISTOSKOV, L., N. V. KONDORSKAYA and J. VANEK, 1979, Homogeneous Magnitude System of the Eurasian Continent: P waves, World Data Center A, Rep. **SE-18**, pp. 1-42.
- GUELLER, R. and H. KANAMORI, 1977, Magnitudes of Great Shallow Earthquakes from 1904 to 1952, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **67**, 587-598.
- GUMBEL, E. J., 1958, *Statistics of extremes*, Columbia Univ. Press, New York, pp. 75-254.
- GUTENBERG, B. and C. F. RICHTER, 1954, *Seismicity of the earth and associated phenomena*, Princeton Univ. Press, Princeton, pp. 4-288.
- KANAMORI, H., 1983, Magnitude Scale and Quantification of earthquakes, *Tectonophysics*, **93**, 185-199.
- KANAMORI, H. and D. L. ANDERSON, 1975, Theoretical Basis of Some Empirical Relations in Seismology, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **65**, 1073-1095.
- KANAMORI, H. and J. J. CIPAR, 1974, Focal Process of the Great Chilean Earthquake May 22, 1960, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **9**, 128-136.
- 小山順二, 1983, 伝播性破壊確率モデルと地震の震源スペクトル, *地震Ⅱ*, **36**, 225-235.

- 小山順二・武村雅之, 1983, 地震マグニチュードと震源過程について, 地震Ⅱ, **36**, 255-257.
- KOYAMA, J. and S.-h. ZHENG, 1985, Excitation of Short-period Bodywaves by Great Earthquakes, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **37**, 108-123.
- 小山順二・鄭 斯華・鈴木次郎, 1984, 巨大地震が励起したランダムな位相をもつ短周期実体波, 地震Ⅱ, **37**, 655-669.
- LAY, T., H. KANAMORI and L. RUFF, 1982, The Asperity Model and the Nature of Large Subduction Zone Earthquakes, *Earthq. Predic. Res.*, **1**, 3-71.
- LEE, W. H. K. and R. J. WETMILLER, 1978, Survey of Practice in Determining Magnitudes of Near Earthquakes, Part 1: North, Central and South America, World Data Center A, Rep. **SE-9**, pp. 1-101.
- LONGUET-HIGGINS, M. S., 1952, On the Statistical Distribution of the Heights of Sea Waves, *J. Mar. Res.*, **11**, 245-266.
- PURCARU, G. and H. BERKHEMER, 1982, Quantitative Relations of Seismic Source Parameters and a Classification of Earthquakes, *Tectonophysics*, **84**, 57-128.
- SPALL, H., 1980, Charles F. Richter—An Interview, *Earthq. Inform. Bull.*, **12**, 5-8.
- 武村雅之・小山順二, 1980, 1秒実体波振幅からみた地震の規模評価, 地震学会講演予稿集, No. 2, 96.
- TAKEMURA, M. and J. KOYAMA, 1983, Seismic Source Spectrum of Tsunami and Ordinary Earthquakes: A Quantitative Estimation of Tsunami from Forecoming Seismic Waves, *Tohoku Geophys. J.*, **29**, 115-128.
- 宇津徳治・関 彰, 1954, 余震区域の面積と本震のエネルギーとの関係, 地震Ⅱ, **7**, 233-240.