余震域の理論的形状

九州大学理学部物理学教室 加 来 良 二

(昭和 60 年 6 月 13 日受理)

Theoretical Shape of Aftershock Area

Ryoji KAKU

Department of Physics, Faculty of Science, Kyushu University

(Received June 13, 1985)

The shape of aftershock area is investigated and numerically calculated by using energy releasing rate g at the tip of the elliptical crack. When g is independent of the eccentric angle ϕ of ellipse, that is $\partial g / \partial \phi = 0$, energy state of the elastic medium is thought to be most stable. If aftershock phenomena are considered to be quassi-static process, it is easy to calculate g .

Using these assumptions, it is concluded that the crack acted by shear stress any direction approximately becomes the elliptical crack of which the ratio between long radius and short one is about 4:3. However it gradually approaches the circular crack as the tension perpendicular to the crack face increases. These results apply to comparatively small earthquakes whose boundary conditions are considered to be infinite, isotropic and homogeneous.

§1. はじめに

極めて巨大な地震を除いて余震域は一般に楕円で近似される場合が多い。どうしてそういう結果になるのかということは興味深いことであるのだが、今までにはその形状についての理論的研究は見あたらない。一般に余震は本震の滑り残しや、エネルギーの再分配による破壊運動であると考えられている。ある時間にある空間において余震が起こるということは、そこに力学的に大きな力が加わったから、つまりエネルギーが集中したからと考えるのが自然である。今震源域にクラック理論を適用してやれば、クラック先端部分に極めて大きな力が働くことがわかり、そのような応力状態を定量的に扱うことができる。

この論文では、クラック先端におけるエネルギー解放率の大きな所から破壊してゆくという仮定のもとに、ある方向の剪断応力を受けたクラックは近似的に長径短径比約 4:3 の楕円形で最も安定した形になることを示す。

§2. 問題の設定

等方均質無限媒質内に長径 a (X 軸方向)、短径 b の楕円形クラックを想定する。ここでは応力はクラック面 (Z 平面) に働く X 軸方向の応力 τ_{xz} のみを考える (Fig. 1)。なぜなら、

Fig. 1. Coordinate system in the origin. Only stress component τ_{zx} exists. ϕ is an eccentric angle at point A.

例えば τ_{zy} は適当な Z 軸上の回転によつて、 τ_{zx} と合成することができるが、その応力の向く方向は楕円の対称性を破る方向でありその状態が不安定なのは明らかだからである。又 τ_{zx} 、 τ_{zy} とクラックに垂直な張力 σ_z を除く他の応力成分は応力拡大係数に関与しないので破壊の進行には無関係である。 σ_z 成分は §4 で改めて取り扱うのでここでは τ_{zx} だけを考えることにする。

さてクラック理論によれば線形弾性論の範囲内で、楕円クラックの先端での応力拡大係数 K は、一般に次の式で与えられる [岡村 (1976)].

$$\begin{aligned} \diamond \text{開口形} & \quad K_I = -\frac{\sigma_z \sqrt{\pi b}}{E(k)} (1 - k^2 \cos^2 \phi)^{1/4} \\ \diamond \text{面内剪断形} & \quad K_{II} = \left(\tau_{zx} \frac{k' \cos \phi}{A} + \tau_{zy} \frac{\sin \phi}{B} \right) \frac{\sqrt{\pi b} k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \phi)^{1/4}} \\ \diamond \text{面外剪断形} & \quad K_{III} = \left(\tau_{zx} \frac{\sin \phi}{A} - \tau_{zy} \frac{k' \cos \phi}{B} \right) \frac{(1 - \nu) \sqrt{\pi b} k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \phi)^{1/4}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$k' = b/a \leq 1, \quad k^2 = 1 - k'^2$$

k : 離心率, ϕ : 離心角, ν : ポアソン比

$$A = (k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k)$$

$$B = (k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k)$$

$K(k)$: 第1種完全楕円積分

$E(k)$: 第2種完全楕円積分

エネルギー解放率は平面歪問題と考えた場合、応力拡大係数を使つて次式となる。

$$g = \frac{1}{2\mu} \{ (1 - \nu)(K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2) \} \quad \mu: \text{剛性率} \quad (2)$$

今の場合、 $\sigma_z = \tau_{zx} = 0$ であるから (1) と (2) より、

$$g = c \cdot \frac{1 - \nu + (\nu - k^2) \cos^2 \phi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \phi}} \quad (3)$$

$$c = \frac{(1 - \nu) \tau_{zx}^2 \pi b k^4}{2 \mu A^2}$$

となる。

§ 3. 解析方法と計算結果

ここでクラックの安定に対する重要な仮説をたてる。クラックが応力場の中で最も安定するのは、周上においてエネルギー解放率 g が一定であること、つまり

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = 0 \quad (4)$$

が成り立っている時であるとする。(3) で求められた g を使って、

Fig. 2. The values of energy releasing rate g at the tip of the crack when $k' (= b/a)$ takes the following values: (a) $k' = 0.10$. (b) $k' = 0.75$. (c) $k' = 1.0$, respectively.

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = c \cdot \frac{(1+\nu)k^2 - 2\nu + (\nu - k^2)k^2 \cos^2 \phi}{(1 - k^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \cdot \sin \phi \cos \phi = 0$$

しかし、これが ϕ の如何によらず成り立つ為には $k=\nu=0, 1$ でなければならない。故に (4) を満たす適当な k の値は存在せず楕円は厳密解ではないことがわかる。一般の形における応力拡大係数は求められていないので、ここでは ϕ に対する g の分散が最小になる楕円形で近似する。主な $k' (= \sqrt{1-k^2})$ に対する g の値を (3) 式を使つて Fig. 2 に示す (ただし $\nu=0.25$)。各先端でのエネルギー解放率の大きさをその場所での Z 方向の大きさであらわしてある。(a) の様な細長い形では長径方向より短径方向に大きな力が加わっていることがわかる。(b) は $a:b=4:3$ の場合で円周上の g の値が ϕ によらずほぼ一定で最も安定した形となっている。(c) は完全な円形でこの場合逆に応力方向に大きな力が加わることになる。以上をまとめると Fig. 3 になる。(a) は k' をパラメータとした時の ϕ に対する g の値を 3 次元的に描いたもので、(b) は代表的な k' についてのみ表示してある。ただし ϕ に対する g の平均が各 k' に対して等しくなるように a, b の大きさを適当に選んである。これを見ても $k' \sim 3/4$ の付近で g の ϕ に対する変化が小さくなっているのがわかる。Fig. 4 は k' と g の分散 σ との関係を片対数にプロットしたものである。分散の絶対的の大きさはこの場合問題ではなく (スケールは相対値)、 $k'=0.75115$ で急速に最小値に落ち込む様子がよくわかる。以上の結果より Fig. 1 の場合では、応力方向に 4:3 の楕円クラックが近似的に最も安定な形であると言える。

Fig. 3. (a) The three dimensional graph of $k' (=b/a)$, eccentric angle ϕ and energy releasing rate g . The arrow shows the value of g when $k'=0.75$. (b) The figure when Fig. 3 (a) is viewed from k' direction. It is found that g is most flat for ϕ when $k'=0.75$.

Fig. 4. The variance σ of energy releasing rate g for eccentric angle ϕ . σ is minimum when $k'=0.75115$. That state is the most stable one from our assumption.

Fig. 5. Coordinate system when there are two stress components τ_{zx} and σ_z .

§4. 張力 σ_z の導入

§2 で述べたように先端のエネルギー解放率に關与するもう1つの応力は、クラック面に垂直な応力 σ_z である。このような応力は、地下においては概念的に張力というよりも有効な差応力という方が適切である。今度は Fig. 5 の様な場合を考えてみよう。

$\tau_{zy}=0$ とおいて (3) 式の g を使って (1), (2) より

$$g' = g + \frac{(1-\nu)\sigma_z^2\pi b}{2\mu E^2(k)} \sqrt{1-k^2 \cos^2 \phi} \quad (5)$$

§3 と同様に g' の ϕ に対する分散を最小にする k' を決定する。ただし今度は τ_{zx} と σ_z の比が1つのパラメータとなる。Fig. 6 は横軸に σ_z/τ_{zx} を、縦軸に安定な形を与える k'_s をプロット

Fig. 6. k'_s is the value of k' when variance $\sigma(k')$ becomes the minimum. As σ_z/τ_{zx} goes to infinite k'_s approaches 1.0.

トしたものである。 $\sigma_z=0$ の場合は前節の結果と一致し、 σ_z が大きくなるほど円形に近づく。 $\tau_{xz}=0$ の場合は $g=0$ となり、(4) 式に対する解析解が得られ、完全な円形が安定した解となる ($k'=1$)。つまり、均質な場でクラックに垂直で一様な張力だけが働いている場合には、円形が最も安定した形であるという常識的な解が得られたわけである。

§ 5. ま と め

地震断層にクラックモデルを適用することは長周期地震学や変形問題にはしばしば行われる。動的な問題も含めて震源過程を扱うことはなかなか困難であるが、余震現象については、準静的な問題としてとらえることができる。ここでの結論は、本震による震源域が何等かの境界条件によつて不安定な形を取つたとしても、その後広域に渡つて一様な剪断応力場が残つていれば Fig. 7 の様に、どんな形のクラックも時間と共に余震現象がその応力方向に 4:3 の楕円形にその震源域を変化させるであろうということである。ただし、張力場の方が卓越している場合には円形に近づくということは § 4 で述べた通りである。これらの結論は比較的小さな地震に対して成り立つと考えられ、極めて大きな地震に対しては Mogi (1968) の研究にもあるように実際には細長い形をしておりこの理論と一致しない。その原因はおそらくそのような大地震では一様な均質場あるいは応力場をその広大な領域に保てないせいだと考えられる。

Fig. 7. The large arrow shows the expanding process of aftershock area and the small one shows the direction of shear stress. Cracks of any shape finally grows to the elliptical cracks of which the ratio of the two axes is about 4:3.

謝 辞

本論文をまとめるにあたり原稿を一読していただいた九州大学理学部の大塚道男教授に感謝します。

文 献

岡村弘之, 1976, 線形破壊力学入門, 培風館, 221.

MOGI, K., 1968, Development of Aftershock Area of Great Earthquakes, Bull. Earthq. Res. Inst., 46, 175-203.