ランダム波動のフラクタルスペクトル構造

東北大学理学部地球物理学教室* 小 山 順 二
東北大学工学部基礎工学教室* 原 啓 明

Fractal Spectrum Structure of Random Time Series

Junji KOYAMA

Geophysical Institute, Faculty of Science, Tohoku University, Aramaki-aza Aoba, Sendai 980

Hiroaki HARA

Department of Engineering Science, Faculty of Engineering, Tohoku University,
Aramaki-aza Aoba, Sendai 980

(Received November 1, 1988; Accepted January 23, 1989)

A theoretical study has been made to derive the energy spectrum of random-pulse time-series. Since the pulse width corresponds to a rupture time of a random fault patch, the random time-series approximates short-period seismic radiation from the heterogeneous faultings. Assuming exponentially decaying pulses, a parameter S is introduced as the inverse of pulse relaxation times. Energy spectra of the random time series are expressed by a Lorentzian-like spectrum of $1/(\omega^2 + S^2)$ with a weighting function $P(S)$, where ω is angular frequency. Cases that $P(S)$ represents the probability density for Gaussian, uniform, and power-law distributions are studied. It is found that the power-law distributions are related to the probability density distribution specified by the Cantor set. Spectra converge respective constant values at the low frequency end, whereas in high frequencies they show the ω^{-2} decay. The energy spectrum for the Gaussian is described by the Lorentzian with a spectral corner frequency of the mean value of S . Linear and quadratic power-law distributions of S suggest the Lorentzian-like energy spectra. Fractal spectrum is obtained from the uniform distribution and distributions specified by the Cantor set, showing the $1/f$ and $1/f^{1+\delta}$ spectra, where f is the frequency and δ is a small fractional number between 0 and 1. The fractional power of spectral decay is related to the variance of the probability distribution.

§1. はじめに

大きな地震が励起する短周期の地震波はランダムな位相を持つ波群であることが知られている [KOYAMA and ZHENG (1985)]. 波長が短い短周期の地震波は断層面上に分布する不均質な小領域 (断層パッチ) のランダムな破壊によって発生すると考えられている [例えば, 小山 (1983)]. この破壊素片をともしうべき断層パッチが巨大な地震発生断層運動を担っている. したがって, 短周期の地震波が持つ統計的な性質を調べることで, 散在する断層パッチの破壊がどのようにネットワークを作り, 全体の断層破壊面を形成しているのかといった破壊過程の物理的性質を知ることができる.

微細な素過程がマクロな現象へ発展していくプロセスは, 地震の震源過程ばかりではなく, 多くの物理現象にみられる. 近年, 特徴的な時間を持たない素過程からなる現象の性質をフラクタルと呼んでいる. コロイド粒子の凝集過程, ランダム媒質中の輸送過程, 地表面の形態や宇宙の見かけの構造など, いろいろな自然現象がフラクタルの考えを用いて研究されている [高安・他 (1987)].

ここではフラクタル構造を示す静的な特性ではなく, ランダムな性質を持つ過渡的な物理現象を考える. いろいろなランダム時系列で表現される事象により発生する波動を考え, それらのエネルギースペクトルを調べる. 特に, $1/f$ や $1/f^{1+\delta}$ スペクトル構造とカントール集合型待ち時間分布で発生する波動のスペクトル構造の関係を詳しく調べる. これらの解析から, 地震波の震源スペク

Fig. 1. Schematic model of random time series. Positive and negative random impulses are equally probable. And the impulses generate pulses which decay in a random manner. Thus, the time series are characterized by zero mean and random phases. The randomness of pulse relaxation coefficients is specified by the probability density in Fig. 2.

トル構造とそれが起因する断層不均質領域（断層パッチ）の破壊過程 [小山 (1988a)] の理解を深めることにする。

§2. ランダムな時系列のスペクトル表現

$1/f$ ノイズのモデル化においては、ランダムなインパルスにより波動が励起され、その振幅は指数関数的に減衰する時系列の研究が行われている [AGU and KINOSHITA (1977), 大内 (1988)]。ここではこれらのパルス時系列を一般化して、ランダム時系列のスペクトル構造を物理的により厳密に考える。時系列はランダムパルスから構成されているものとする。各パルスの減衰定数がパルスごとに異なる場合、非常に複雑な時系列が生じる (Fig. 1)。 i 番目のインパルスで A_i の振幅、 S_i の減衰定数を持つパルスが立つとする。 t_i をパルスの発生時とすれば、考える時系列は、

$$f(t) = \sum_i A_i \exp\{-S_i(t-t_i)\} H(t-t_i) \quad (1)$$

で表される。ここで、 $H(t)$ は単位階段関数を示す。減衰定数 S_i はパルスの緩和時間の逆数で定義される。 A_i は、正と負になる確率が等しく、平均がゼロ、自乗平均振幅が $\overline{A^2}$ で特徴づけられるものとする。 t_i の時間間隔がランダムであれば、 $f(t)$ はランダムな位相をもつ時系列 [KOYAMA and SHIMADA (1985)] となる。

このようなランダム波動の性質は、不均質な断層の破壊により発生する短周期地震波に見いだされている [KOYAMA (1985)]。 A_i を変位インパルスと考えれば、その振幅は断層面の不均質領域（断層パッチ）の応力降下量のゆらぎに直接関係する [KOYAMA and IZUTANI (1988)]。断層面上でランダムな不均質性を考えれば、 A_i は互いに独立な確率変数となる。 S_i は断層パッチの破壊継続時間の逆数と考えればよい [KOYAMA (1985)]。断層パッチの大きさがランダムであれば、その破壊継続時間もランダムな変数として取り扱えるだろう。 S_i は断層パッチのサイズ分布から、 A_i は断層パッチの不均質の強

さ分布から決まる確率変数と考えればよい。

$f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \\ = \sum_i A_i \exp(-i\omega t_i) / (i\omega + S_i) \quad (2)$$

ただし、 ω は角周波数である。今後特に断わらない限り、周波数はすべて角周波数で表されている。そして、エネルギースペクトル $E_t(\omega)$ は、(2) 式の複素共役を用いて、

$$E_t(\omega) = F(\omega) \cdot F(\omega)^* \\ = \sum_i \sum_j \{A_i \exp(i\omega t_i)\} \{A_j \exp(-i\omega t_j)\} \\ \div (i\omega + S_i)(-i\omega + S_j) \quad (3)$$

となる。ランダム位相の仮定から、任意の値 $B_i (= A_i / (i\omega + S_i))$ に対して、

$$\sum_j B_j B_j^* \exp\{i\omega(t_i - t_j)\} = B_i^2 \\ \text{であるから、(3) 式は、} \\ E_t(\omega) = \sum_i A_i^2 / (\omega^2 + S_i^2) \quad (4)$$

と表せる。

振幅 A_i で立ち上がる 1 個のパルスを持つ全エネルギーは、

$$\int_0^{\infty} A_i^2 \exp(-2S_i t) dt = A_i^2 / 2S_i \quad (5)$$

である。時系列全体はパルスの緩和時間に比べて十分に長く、定常であると仮定しよう。その意味は有限な時系列の両端で完全には含まれないパルスを見捨てるが、その影響は小さいこと、さらに、時系列の統計的な性質が時間によって変化しないことである。 A_i と S_i は互いに独立であるから、時系列のパワー ε は、単位時間に平均 n 個のインパルスが観測されるとして、定常性の仮定から、

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n A_i^2 / 2S_i \sim \overline{A^2} \sum_{i=1}^n (2S_i)^{-1} = \text{constant} \quad (6)$$

と考えてよいだろう。 $\overline{A^2}$ は先に述べたインパルスの自乗平均振幅である。地震現象を含む多くの物理現象は過渡的な現象であり、総エネルギーが有限で、その時系列

Fig. 2. Probability density for the pulse relaxation coefficient. Gaussian, uniform, and linear and quadratic power-law distributions of relaxation coefficients are considered in detail.

は有限の継続時間 T_0 をもつ。したがって、 $0 \sim T_0$ の間でのみ時系列 $f(t)$ を観測することができる。この時、時系列全体のエネルギースペクトル (4) 式は、総パルス数が nT_0 とすれば、

$$E_t(\omega) = \overline{A^2} \sum_{i=1}^{nT_0} (\omega^2 + S_i^2)^{-1} \quad (7)$$

で表される。(7) 式から求められる周波数領域での全エネルギーは、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_t(\omega) d\omega = \overline{A^2} \sum_{i=1}^{nT_0} (1/2S_i) \quad (8)$$

となり、(5) 式の総和から計算される時間領域での全エネルギーに一致する。

またこの有限時間 T_0 内では、 $S_i \rightarrow 0$ となる無限に長い緩和時間を持つパルスは存在しない。また、観測系の時間分解能には制約があるが、物理現象として記録されることから、時系列は有限個のパルスから構成され、無限に短い緩和時間のパルスは意味を失う。したがって、観測される時系列の減衰定数 S には、上限と下限が存在することになる。結局、有限な継続時間 T_0 の時系列から計算される (7) 式のエネルギースペクトルは、

$$E_c(\omega) = \overline{A^2} n T_0 \int_{S_1}^{S_2} P(S) / (\omega^2 + S^2) dS * W^2(\omega) \quad (9)$$

と表される。ただし、 $P(S)$ はパルス減衰定数 S の確率密度、 S_1 と S_2 はそれぞれ観測可能な減衰定数の最小値と最大値である。また、 $W^2(\omega)$ は時系列が有限であることによるウィンドーの効果を表す関数 [BLACKMAN and TURKEY (1958)] である：

$$W^2(\omega) = \sin^2(\omega T_0/2) / (\omega T_0/2)^2 \quad (10)$$

アスタリスク記号* は ω でのたたみ込みを示す。 T_0 がパルスの緩和時間に比べて非常に長い場合は、あるエネ

ルギースペクトル $G(\omega)$ に (10) 式のウィンドースペクトルのたたみ込みを考えると、 $T_0 \rightarrow \infty$ のとき、 G が有限で定義される範囲で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega - \omega_1) W^2(\omega_1) d\omega_1 \simeq G(\omega) \quad (11)$$

である。以後の議論では、ウィンドーの効果を (11) 式で形式的に評価することができる。したがって、今まで考えてきた時系列が十分に長い条件とは、パルスの緩和時間に比べて時系列の継続時間が長いことを意味し、継続時間内に多数のパルスが含まれていることが前提になっている。

8.3. 緩和時間の確率分布とエネルギースペクトル

3.1 ガウス分布

パルスの減衰定数 S の確率密度が、平均値 S_0 ・分散 σ^2 のガウス分布である場合、

$$P_1(S) = \exp\{-(S - S_0)^2 / 2\sigma^2\} / (2\pi\sigma^2)^{1/2} \quad (12)$$

を考える。この時、(9) 式のエネルギースペクトルは、

$$E_1(\omega) = \overline{A^2} n T_0 / (\omega^2 + S_0^2) * W^2(\omega) \quad (13)$$

となる。ただし、

$$S_1 < S_0, \quad \sigma \ll S_0, \quad S_0 < S_2$$

を仮定している (Fig. 2)。 $\sigma \rightarrow 0$ の極限では (12) 式はデルタ関数 $\delta(S - S_0)$ となるから、(13) 式は直感的にも理解される。任意の σ については、KOYAMA and ZHENG (1985) にしたがって、(9) 式の積分を最急降下法で実行すれば、(13) 式が得られる。(13) 式は周波数 S_0 で規定されるローレンツ型のエネルギースペクトルを表している。

(13) 式でウィンドーの効果を解析的に考えると、

$$E_1^W(\omega) = \overline{A^2} n T_0 \left[\frac{1}{\omega^2 + S_0^2} + \frac{\omega^2 - S_0^2}{S_0 T_0 (\omega^2 + S_0^2)^2} \right]$$

Fig. 3. Energy spectrum of random-pulse time series from E_1 : Gaussian, E_2 : uniform, E_3 : linear, and E_4 : quadratic power distributions for the pulse relaxation coefficients. Minimum and maximum values of the coefficients are assumed to be $S_1=1$ and $S_2=10^4$. Mean value of the Gaussian is assumed $S_0=10^2$. The spectra are normalized by $\bar{A}^2 n T_0 / S_0^2$, where $\bar{A}^2$ is a mean squared amplitude of impulses, n is an average number of impulses observable within a unit time interval, and T_0 is the time duration of random time series. Spectral decay is indicated by ω^{-2} and ω^{-1} , where ω is angular frequency normalized by an arbitrary value of S_1 . Clearly found is that E_1 shows a Lorentz-type energy spectrum, and it has a spectral corner frequency of S_0 . The corner frequency is a frequency where the trend of spectral density changes abruptly. Two corner frequencies are found in E_2 spectrum. And they are related to S_1 and S_2 . The spectral decay of E_2 in between the corner frequencies is about 1.0. E_3 spectrum decays very gradually from the corner frequency of S_1 in the low frequency range, and it also shows the other corner frequency in the high frequency range. E_4 spectrum is like as a Lorentzian spectrum with only one corner frequency of S_2 in the high frequency range. All the spectra converge on E_1 spectrum in very high frequencies.

$$- \frac{\exp(-S_0 T_0)}{S_0 T_0 (\omega^2 + S_0^2)} \{ (\omega^2 - S_0^2) \cos \omega T_0 + 2\omega S_0 \sin \omega T_0 \} \quad (14)$$

となる。 $S_0 T_0 \gg 1$ の近似を考慮すると、大括弧の初項のみがのこり、(11)式に一致する。

3.2 一様分布

次にパルスの減衰定数 S の確率密度が、2つの定数 S_2 と S_1 で規定される区間で一様分布である場合を考える (Fig. 2):

$$P_2(S) = 1/(S_2 - S_1) \quad (S_2 > S_1) \quad (15)$$

この場合、(9)式のエネルギースペクトルを評価すると、

$$E_2(\omega) = \frac{\bar{A}^2 n T_0}{S_2 - S_1} \frac{1}{\omega} [\tan^{-1} S_2 / \omega - \tan^{-1} S_1 / \omega] * W^2(\omega) \quad (16)$$

となる。時系列が十分に長く、ウィンドーの効果が無視できるとき、 $\omega \rightarrow 0$ では、

$$E_2 \rightarrow \bar{A}^2 n T_0 / S_1 S_2 \quad (17)$$

の一定値となり、 $\omega \gg 1$ のときは、

$$E_2(\omega) \simeq \bar{A}^2 n T_0 / \omega^2 \quad (18)$$

で表される。すなわち、低い周波数帯では平坦なスペクトル、そして、高い周波数帯では ω^{-2} で減少するエネル

Fig. 4. Energy spectrum of the random-pulse time series. The maximum relaxation coefficient of S_2 is assumed 10^3 . All the others are the same as those in Fig. 3. Note that the spectral decay of E_2 in between two corner frequencies is a little larger than 1.0, showing the fractal energy spectrum.

Fig. 5. Energy spectrum of the random-pulse time series. The maximum relaxation coefficient of S_2 is assumed 10^2 in this case. All the others are the same as those in Fig. 3. Note that E_2 spectrum in between two corner frequencies shows a fractal spectrum of $1/f^{1+\delta}$ decay, where δ is a small fractional number.

ギースペクトルを与える。 $(S_2 - S_1) \rightarrow \infty$ では、Agu and KINOSHITA (1977) が示した $E_2(\omega)$ の ω^{-1} となるふるまいに一致する。

3.3 べき分布

S の確率密度がある区間 $[S_1, S_2]$ で確率変数のべき乗で与えられる場合を考える：

$$P_r(S) = (r+1)S^r / (S_2^{r+1} - S_1^{r+1}) \quad (r \neq -1) \quad (19)$$

例えば、 $r=1$ の時、(9) 式のエネルギースペクトルは、

$$E_3(\omega) = \frac{2\bar{A}^2 n T_0}{S_2^2 - S_1^2} \log \left(\frac{\omega^2 + S_2^2}{\omega^2 + S_1^2} \right)^{1/2} * W^2(\omega) \quad (20)$$

と表される。また、 $r=2$ の時は、

$$E_4(\omega) = \frac{3\bar{A}^2 n T_0}{S_2^3 - S_1^3} [S_2 - S_1 - \omega \times (\tan^{-1} S_2 / \omega - \tan^{-1} S_1 / \omega)] * W^2(\omega) \quad (21)$$

である。

エネルギースペクトル E_3, E_4 は、時系列が十分に長く、 $\omega \rightarrow 0$ のとき、

$$E_3 \rightarrow 2\bar{A}^2 n T_0 / (S_2^2 - S_1^2) \log (S_2 / S_1) \quad (22)$$

$$E_4 \rightarrow 3\bar{A}^2 n T_0 / (S_2^3 - S_1^3) (S_2^2 + S_1 S_2 + S_1^2) \quad (23)$$

となり、それぞれ一定の値となる。また、 $\omega \gg 1$ のときは、

$$E_3(\omega) \simeq \bar{A}^2 n T_0 / \omega^2 \quad (24)$$

$$E_4(\omega) \simeq \bar{A}^2 n T_0 / \omega^2 \quad (25)$$

で表される。

(13), (18), (24), (25) の結果から、どの確率密度の場合でも、高い周波数帯でエネルギースペクトルのふるまいは同じになっている。これは高い周波数帯でのスペクトルがパルスの立ち上がりの形状だけで決まり、緩和時間や確率密度に依存しないからであると考えられる。また、低い周波数帯では、ランダム波動の平均的な性質を見ていることになる。したがって、スペクトルは、無相関の白色スペクトルを与えている。

§4. エネルギースペクトルのフラクタル構造

前節ではパルス減衰定数（緩和時間の逆数） S の確率密度を考え、ランダムな時系列のエネルギースペクトルの表現式を具体的に導いた。Fig. 3 に、 $S_0 = 10^2, S_1 = 1, S_2 = 10^4$ 、としたとき、各々のエネルギースペクトルを計

算し、スペクトル振幅 $\overline{A^2} n T_0 / S_0^2$ で規格化して示す。Fig. 4 に、 S_0 と S_1 が Fig. 3 と同じ場合で、 $S_2 = 10^3$ としたときのエネルギースペクトルを示す。Fig. 5 に、 $S_0 = 10^2$, $S_1 = 1$, $S_2 = 10^2$ である場合の例を示す。すべての場合で時系列の継続時間が十分に長く、ウィンドーの効果を (11) 式で形式的に評価して考えている。以後の議論では、常に $S_1 = 1$ と仮定してある。したがって、周波数は任意の S_1 の値で規格化されていると考えてよい。

スペクトル振幅の折れ曲がり点を表す周波数をコーナー周波数という [BRUNE (1970)]。ローレンツ型のスペクトル $E_1(\omega)$ は S_0 がコーナー周波数にあたる。ここで一つ注意したいのは、我々が議論しているスペクトルは短周期のランダム波動のスペクトルであるから、そこに現れるコーナー周波数は BRUNE (1970) などにより旧来からいわれているコヒーレントな長周期地震波に現れるコーナー周波数ではないことである。断層全体の破壊時間から決まる長周期地震波のコーナー周波数は、いかなれば、決定論的な (巨視的な) パラメーターである。本論文でのコーナー周波数は、断層の不均質領域 (断層パッチ) の平均破壊時間の逆数で決まる短周期の波動スペクトルに特徴的に現れるパッチコーナー周波数 [小山 (1983), KOYAMA (1985)] であると考えられる。パッチコーナー周波数は、不均質な断層破壊を記述する新しい概念により導入された確率論的な (微視的な) パラメーターである [小山 (1983)]。したがって、この意味では、パッチコーナー周波数は微視的な素過程を特徴づける緩和時間の逆数と考えられ、特別な場合は、ブラウン運動する粒子の平均自由時間の逆数と考えてもよい [小山 (1988b)]。以後すべてのコーナー周波数は短周期波動に特有なパッチコーナー周波数と読み変えて議論を進める。長周期波動に現れるコーナー周波数とははっきりと違うものである。

減衰定数の分布が S_1 から S_2 の区間で一樣な場合のスペクトル E_2 は、 S_1 で決まる低い周波数帯と S_2 で決まる高い周波数帯に 2 つのコーナー周波数を持つことがわかる。また、 E_2 のふるまいは、 S_1 から S_2 の周波数帯で ω^{-1} に比例して減衰している (Fig. 3)。これは AGU and KINOSHITA (1977) と同じである。ただし、 S_1 と S_2 の値が接近すると、 E_2 のふるまいは、スペクトルの傾きが緩やかに変化し、 $\omega^{-(1+2)}$ で減衰するスペクトルになる (Fig. 4, Fig. 5)。このふるまいは、小さな数 δ を導入し、 $\omega^{-(1+\delta)}$ と表すことができる。つまり、確率変数が一樣分布で与えられているとき、そのスペクトル減衰のべき係数は、非整数次を示す周波数領域があり、それは 2 つのコーナー周波数 S_1 と S_2 の相対的な大きさの違いによって決っている。

以後、上のようにスペクトルが周波数の自乗より小さな整数次・非整数次のべき乗に反比例して減衰するとき、それをフラクタル的なスペクトルと呼ぶことにする。

E_3 は、 S_1 に対応するコーナー周波数が存在する。スペクトルは、非常に緩やかに減衰し、コーナー周波数 S_2 付近で E_1 スペクトルに漸近する。 E_4 は、スペクトル振幅を別にすれば、コーナー周波数が S_2 となるローレンツ型のスペクトルとほとんど同様なスペクトルである。 E_3 や E_4 の計算に用いた確率密度は S とともに増加する傾向があり (Fig. 2)、高い周波数のスペクトル成分が卓越する。このことから、減衰定数の確率密度が特定の範囲に集中したり、特徴的な減衰定数が存在する場合、その時系列はローレンツ型のスペクトルを示すことがわかる。

8.5. 特殊な確率分布 (カントール集合) のスペクトル構造

SHLESINGER and HUGHES (1981) はカントール集合型待ち時間分布でランダムインパルスが生起する確率過程を考えている。カントール集合とは、確率事象の数が 2 のべき乗となる自己相似な関数で表される集合である。地震の断層破壊は階層的で、破壊領域の大きさ分布は離散的であるとする考え方がある [FUKAO and FURUMOTO (1985), HARA and OKAYAMA (1988), ITO (1985)]。今まで考えた連続型の確率密度とは異なり、確率変数が離散値を取る場合について考える。

SHLESINGER and HUGHES (1981) は時系列のフラクタル的性質を明らかにしたが、そのスペクトル構造のふるまいを明らかにしていない。ここでは、彼らとは独立に、カントール集合から作り出されるランダムな時系列を考え、そのエネルギースペクトルを解析的に導き、スペクトル構造の性質を考えてみる。Fig. 6 にカントール集合を棒の長さで示す。始めの長さが 1 で、それを 3 等分して 2 個取り出す。この操作を繰り返し、いろいろな長さの棒の分布を作る。 m 回目の分割で、カントール棒の長さは 3^{-m} であり、 2^m 個ある。この棒の長さをパルスの緩和時間の長さと考えて、ランダムパルスの母集合をつくる。このランダムパルスを任意に取り出し、パルスの緩和時間ごとに時間軸上にならべた時系列を考える (Fig. 6)。簡単のため、パルスの立ち上がり振幅は ± 1 であり、正負等確率であるとする。Fig. 1 と同様に、各パルスの振幅は指数関数で減衰し、発生するパルスは互いに無相関であるものとする。パルスの個数は、Fig. 6 に示す分割の m 段目で 2^m 個である。それに対応する減衰定数は、

$$S = 3^m \quad (26)$$

Fig. 6. Time interval generated by the Cantor bar. The middle third of each segment is cut out in each subdivision. The longest interval between points of the set occurs 2^0 times, which is assumed to be 1.0 in this case. The next longest interval is a factor of 3^1 smaller and occurs 2^1 times. The interval of m -th subdivision is 3^m times smaller than the longest interval and occurs 2^m times as often. Random time series is generated by the random pulses with relaxation times given by the above Cantor set of bars. Positive and negative impulses with unit amplitude are equally probable, thence, generating a random-pulse time series with zero mean and random phases.

となる。したがって、 m 段目のカントール棒で特徴づけられた i 番目のパルスは、

$$F_m^{(i)}(\omega) = \alpha_m^{(i)} \exp(-i\omega t_m^{(i)}) / (i\omega + 3^m) \quad (27)$$

($i = 1, 2, \dots, 2^m$)

のスペクトルを持ち、 2^m 個存在する。ただし、 $\alpha_m^{(i)}$ はインパルスの振幅で、ここでは ± 1 の値をとるとする。また、 $t_m^{(i)}$ はパルスの発生時刻である。最大 M 段目までの分割でできるカントール棒の集合を考えると、総パルス数が

$$nT_0 = \sum_{m=0}^M 2^m$$

である。エネルギースペクトルは、 $\alpha_m = \pm 1$ を考えると $\overline{A^2} = 1$ となり、

$$E_S(\omega) = \sum_{m=0}^M \frac{2^m}{\omega^2 + 3^{2m}} * W^2(\omega) \quad (28)$$

で表される。時系列が十分に長く、 $\omega \rightarrow 0$ の極限では、

$$E_S \rightarrow \{1 - (2/9)^{M+1}\} / (1 - 2/9) \quad (29)$$

となり、一定値に漸近する。また、 $\omega \gg 1$ の高い周波数帯では、

$$E_S(\omega) \approx (2^{M+1} - 1) / \omega^2 \quad (30)$$

である。この結果は § 3 で述べたいいくつかの確率密度の場合と同様なふるまいである。

Fig. 7(a) に分割のステップ数 M が 5, 8, 11, 14, 17, 20 の場合について、カントール集合のパルスから生起するランダム波動のエネルギースペクトルを示す。スペクトルは明らかに 2 つのコーナー周波数を持つ。1 つは低い周波数帯のコーナー周波数で、 $\omega = 1$ である。これは最大の緩和時間で決まる最小減衰定数 $S = 1$ に対応している。分割数の M が大きくなると、短い緩和時間のパルスが数多くなる。それに連れて、最大の分割数で決まる高い周波数側のコーナー周波数もより高い周波数へ移る。Fig. 7(a) から、2 つのコーナー周波数の間ではおよそ $\omega^{-4/3}$ 程度でスペクトルは減少している。そのスペクトル減衰の傾きは、緩和時間の分布が狭いほど、分割数が小さいほど、わずかに大きい傾向にある。

緩和時間がカントール集合型待ち時間で表現される Fig. 6 のパルス波動は、自己相似性を示す。そのエネルギースペクトルは 2 より小さなべき乗で減衰するフラ

Fig. 7. Energy spectrum of the random-pulse time series with self similar distributions. (a) Random-pulses by the relaxation times specified by the Cantor set. Subdivision levels of Cantor bars of 5, 8, 11, 14, 17 and 20 are considered. The spectral corner frequency of about 1.0 is found in the spectra, which corresponds to the longest relaxation time. The other corner frequency is found and it relates to the minimum relaxation time. Spectral decay in between these two corner frequencies is about 4/3, suggesting a fractal spectrum. (b) Random-pulses by the relaxation times specified by the Koch curves. Two corner frequencies are also found like as (a). The spectral decay in between the above corner frequencies is measured about 3/4.

クタ的なふるまいを示すことができる。分割数の M が十分大きいとき、 $S = 3^m$ の変数変換で (28) 式を (9) 式のような積分形に書き換えることができる。これにより、形式的にカントール集合の寄せ集めから生じる確率密度 $P_5(S)$ は、

$$P_5(S) \approx \gamma S^{\gamma-1} / S_2^\gamma \quad (31)$$

で表されることがわかる。ただし、 S_2 はパルス減衰定数の最大値 3^M である。また、 $S_2 \gg S_1$ だから $S_1 \approx 0$ とした。

$$\gamma = \log 2 / \log 3$$

である。ここで、 P_5 の定数因子は区間 $[S_1, S_2]$ 規格化条件から決めた。この確率密度は S の変化に比べてゆっくりと変化し、それは 3.3 に述べたべき分布よりも一様分布の確率密度のふるまいに近い。

§6. 一般化カントール分布のスペクトル構造

Fig. 6 に描いたカントール集合は、 $\log 2 / \log 3$ のフラクタル次元である [SHLESINGER and HUGHES (1981)]。このカントール集合を一般化して、はじめの長さが 1

で、それを k 等分した長さのカントール棒を j 個 ($k > j$) 取り出す操作を考える。2 段目以降の分割では、前の段のカントール棒を同様に分割し、それを繰り返す、いろいろな長さの棒からできる集合を考える。ここでは、この長さの分布を一般化カントール分布と呼ぶことにする。この一般化カントール分布から、1 より大きな整数 j と k の組合せで、

$$\gamma = \log j / \log k \quad (k > j) \quad (32)$$

の断続的に任意のフラクタル次元を持つ分布を作り出せることが理解される。また、分割の数 M が大きいとき、(31) と (32) 式からこの分布の 2 次モーメントは、

$$\gamma / (\gamma + 2) S_2^2 \quad (33)$$

で近似される。

整数次のべき分布や、一般化カントール分布から作り出されるランダム波動のエネルギースペクトルを計算する。Fig. 8 にそのスペクトル減衰の傾きを調べ、それぞれの確率密度分布の 2 次モーメントで図示する。2 次モーメントは、整数次のべき分布では解析的に、一般化カントール分布では (33) 式から計算する。スペクトルの

Fig. 8. Spectral decay in terms of second moment of probability density distribution. Integer power distributions and the distributions of the generalized Cantor bars and the generalized Koch curves are considered. The maximum and minimum relaxation coefficients of $S_2=10^4$ and $S_1=1$ are assumed in the numerical calculations. The value of r from -2 to 2 indicates the integer power for the probability density distribution. C2/6561, for example, indicates the generalized Cantor set with fractal dimension of $\log 2/\log 6561$. K instead of C stands for the generalized Koch curves. The spectral decay is measured on each energy spectrum plot, so that it is an empirical value and no longer a rigorous rational.

傾きは、Fig. 3 で述べたように、2つの特徴的なコーナー周波数 S_1 と S_2 の周波数帯で考えている。ただし、 S_1 と S_2 の値はそれぞれ、1 と 10^4 と仮定した。2次モーメントの値によってスペクトルの傾きが大きく変化している。一般化カントール分布からスペクトル減衰の傾きが-1から-2の間の非整数次の数で得られることがわかる。

カントール集合は、Fig. 6 からわかるようにいたるところに不連続点が存在する。(32)式でカントール分割 ($j < k$) とは違う、 $j > k$ の場合を考えよう。例えば、 $j=4$ 、 $k=3$ の時、はじめの長さを1として、その線分の長さを3等分し、4個の線分を取り出し考える場合に対応する。この操作を繰り返し行くと、Fig. 9 に示すようなコッホ曲線と呼ばれる図形を作ることができる。 m 段のコッホ曲線の線分の長さは、 3^{-m} 、その折れ線の本数は 4^m である。整数 j と k ($j > k$) を任意に選ぶことで、一般化カントール分布の場合と同じに、Fig. 9 のコッホ曲線も一般化できる。ランダムパルスの緩和時間の分布が任意に抽出したコッホ曲線の線分の長さで離散的に与えられるときを考える。コッホ曲線の線分の長さをパルス幅とするランダムパルスの時系列からそのスペクトル表現式、フラクタル次元、分散などを計算すると、一般化カントール

分布の場合と同様に与えられる。Fig. 7 (b) に $j=4$ 、 $k=3$ の場合について、エネルギースペクトルを計算した。スペクトル減衰のべき係数は約 $3/4$ である。このように、一般化カントール分布と一般化したコッホ曲線の分布から得られるエネルギースペクトルの表現には本質的な違いがないことがいえる。

$r=1$ や 2 の整数次のべき分布では、スペクトルの減衰が非常に小さい。これらは Fig. 4 や Fig. 5 でローレンツ型に近いスペクトル構造を示していた。確率密度が短周期側にかたより、高い周波数帯のスペクトル成分が卓越したスペクトル構造を示している。その結果、低い周波数側のコーナー周波数はおおいかくされてしまっている。Fig. 8 で $j=4$ 、 $k=2$ とした一般化したコッホ曲線の分布の $K4/2$ の例でも同様の傾向を示す。一般に、 $j > k^2$ の組合せから生じる一般化したコッホ曲線の分布からは上の場合と同様に、高い周波数側のコーナー周波数だけが常に卓越して現れる。一般化したコッホ曲線の分布からスペクトル減衰の傾きが0から-1の間で得られる。

一方、 $r=-2$ の分布から得られるスペクトルは、低い周波数側のコーナー周波数だけが強調されている。これも確率密度の形状から先の議論とは逆に、低い周波数帯

Fig. 9. The Koch curves specify the time intervals and the number of events. Time series is generated by the random pulses with the relaxation times given by the above Koch curves. The interval of m -th subdivision is 3^m times smaller than the longest interval and occurs 4^m times as often. This may be generalized, taking integers of j instead of 3 and k in place of 4, where $j > k > 1$.

のスペクトル成分が卓越したエネルギースペクトルであると理解される。はじめの長さが1の線分を6561等分して、その中から2個だけ取り出す操作の一般化カントール分布をC2/6561と記した。Fig. 8でこのスペクトルは低い周波数帯のスペクトルが卓越したふるまいをしている。さらに、 $j \ll k$ となる一般化したカントール分布の場合は、 $r = -2$ の結果へ漸近する。

カントール集合やコッホ曲線の分布は自己相似な分布を与える。その確率事象の発生数は2のべき乗個や整数 j のべき乗個である。このような自己相似であるパルスの母集合から作り出されるランダム時系列が常にフラクタル的なスペクトルを示すわけではないことが上に示した結果から理解される。スペクトル構造をきめるのは、(9)式の積分で表されているように、事象の発生数ではなく、各事象の発生確率である。確率密度は、見かけ上

現れる発生数とは違い、(31)式で表される。そして、非整数次で減衰するスペクトル構造のふるまいは確率密度分布の形状に依存していることが結論される。

8.7. 議 論

GRUNEIS and MUSHY (1986) は、 $1/f$ スペクトルとなる確率過程を考えている。彼らは、ランダム事象としてインパルスが次々に集中して起こるクラスターをポアソン過程で励起した場合を、一般的に取り扱っている。 $1/f$ スペクトルを生み出すのは、単一のランダム過程ではなく、ポアソン過程とランダムな長さを持つクラスターの生成過程がいっしょになった複合過程であると考えている。本研究では、最初に、ランダムな振幅のインパルスで立ち上がるランダムな継続時間のパルスで複合過程を考えたと、ランダムパルスの時系列では複合過程であることが $1/f$ スペクトルにそれほど重要ではない。むしろ $1/f$ スペクトルを与えるのは、ランダムパルスの継続時間の確率密度が一様分布に近いようなランダム過程でなければいけないことがわかった。

ここでは指数関数的に振幅が減衰するパルスを考えているから、ローレンツ型のスペクトルが現れている。箱型のパルスを考えれば、スペクトルの包絡線がローレンツ型で近似される [小山(1983)]。ランダムウォークを定式化するには、後者のパルスが現実的であるが、前者の関数型は取り扱いが容易で見通しがよい。したがって、本論で得られたローレンツ型のスペクトルは形式的な結果であり、同様のスペクトル形状は別の素過程を考えても得られる。

Fig. 4やFig. 5の確率密度では、分散だけが違っている。この違いが、スペクトルのふるまいに周波数 f で、 $1/f^{1+\delta}$ となる変化を与えていると考えられる。スペクトル減衰係数 δ は確率密度のひろがり（分散）に関係していることが指摘される。もちろん、分散とフラクタル次元は直接関係しているから、フラクタル次元でこの結論をいい換えても良い。しかし、素過程の確率密度が例えば正規分布であるなどのように知れている現象のフラクタル次元はあまり意味がない。したがって、より一般的にはここで述べた分散（2次モーメント）で記述するのがよいと考える。

過渡的な現象ではどのような確率密度分布であっても、有限個の事象しか観測されないのだから、平均値とその分散が定義される。一様分布では、時系列の継続時間 T_0 が大きくなると、抽出される減衰定数の範囲の広がり、その平均値の分散が大きくなる。ガウス分布などでは逆に、平均値のまわりをサンプルする数が増える分だけ、分散の不偏推定量は小さくなることが期待され

る。ランダム現象のスペクトルのコーナー周波数は確率密度の存在範囲から決まり、スペクトルの形状や減衰の傾きは確率密度の関数形に依存する。したがって、長時間の時系列サンプルから得られるスペクトル構造はランダム波動を励起する素過程の統計的な性質を強く反映していることがわかる。

有限時間の観測は物理的な制約であり、確率密度分布に観測可能な上限 S_2 と下限 S_1 を与える。そして、 S_1 や S_2 がフラクタルスペクトル構造の周波数領域での特徴的なコーナー周波数になっていることを示した。先に述べた GRUNEIS and MUSA (1986) は、スペクトルが $1/f$ となる周波数帯域は有限で、それは、インパルス群の最小継続時間と最大継続時間に対応する周波数で決まることを導いている。インパルス群の継続時間をパルスの緩和時間と読みかえれば、ここでの考え方と同じであろう。

ランダムパルスの緩和時間は、地震学的には、ランダム破壊する断層パッチの大きさ（その破壊継続時間）に強く関係する [KOYAMA (1985)]。ここでの議論はエネルギースペクトルであり、直接一般的な震源スペクトルに結び付かない。しかし、形式的に断層の全体的な大きさを、断層の幅が破壊する時間 T_0 と長さ方向の破壊時間 τ_0 で考慮すれば、

$$\{E_i(\omega) \sin^2(\omega\tau_0/2)/(\omega/2)^2\} \quad (34)$$

で震源エネルギースペクトルを表現できる [KOYAMA (1985)]。この場合、単位時間に観測されるパルスの数 n は T_0 に比例する。単位時間当りに発生するパルスの数を ρ とすると、断層面全体では、 $\rho T_0 \tau_0$ 個の断層パッチが破壊することになる。 τ_0 は S_1 などの特徴的なコーナー周波数の逆数より充分大きいから、震源エネルギースペクトルの減衰はおおよそ $E_i(\omega)/\omega^2$ と考えればよい。これをもとに、フラクタルスペクトル構造と地震の短周期震源スペクトル構造を考えてみよう。

ここで結論できるのは、 ω^{-1} や $\omega^{-(1+\delta)}$ の非整数次で減衰するエネルギースペクトルはランダムパルスの減衰定数が一様分布かそれに近いような確率密度のときに限られることである。断層パッチ内での破壊伝播速度があまり変化しないと考えると、断層パッチのサイズ分布が一様分布に近いときが、フラクタル的なスペクトルのふるまいを与えると考えても良いだろう。このとき、(34) 式の平方根で定義する震源スペクトルは、 $1/\omega^{1.5} \sim 1/\omega^{1.5+\delta/2}$ となる。

一様分布だからといって小さな断層パッチの数が大きな断層パッチの数と同じであるわけではない。例えば、(32) 式のカントール集合の結果から、単位長さを k 分割し、そのすべての k 個が $1/k$ の長さを持つ断層パッチ

とすれば、 k 分の 1 の長さとなる断層パッチは k 個、 k^m 分の長さとなる断層パッチは k^m 個存在する。断層パッチの個数は k のべき乗で増加する。しかし、断層パッチが k 分の 1 の長さとなる確率と k^m 分の 1 の長さである確率は共に等しい。そして、その確率密度は m が充分大きいとき一様分布の近似になることを考えれば理解される。

大地震の破壊過程を考える場合、それが断層破壊の長さや幅といった空間的に絶対的な広がりを持つことから、(34) 式の導入で考えたように、震源エネルギースペクトルは断層の大きさから決まる特定の波数をもつローレンツ型のスペクトルで表される。断層面が不均質でランダムな短周期波動を励起するときは、さらに、(34) 式のエネルギースペクトルとの和で表されるエネルギースペクトルなることが導かれている [小山 (1988b)]。つまり、一般的に震源スペクトルとして導かれているローレンツ型をした震源スペクトル [KOYAMA *et al.* (1982), TAKEMURA and KOYAMA (1983)] は、決定論的であるマクロな震源パラメータで決まる部分と断層パッチのエネルギー放出がガウス分布かそれに近い密度分布をする不均質な微小破壊のミクロなパラメータで決まる部分から得られていることになる。スペクトル構造の見かけのふるまいが同じであっても、その素過程は全然違うものの例である。GRUNEIS and MUSA (1986) は、この違いを物理現象のコヒーレント時間と個々のランダムな継続時間とで区別して考え、どちらの場合でもローレンツ型のスペクトルが得られることを示している。断層全体の破壊継続時間（コーナー周波数）とゆらいでいる断層パッチの破壊継続時間（パッチコーナー周波数 [小山 (1983)]）を考えれば、ここでの議論と対応づけられる。

8.8. 結 論

従来、いろいろな空間図形とか点や線の空間分布などの複雑な性質を考えて、そのスペクトル構造のフラクタル性が議論されてきた。ここでは、時系列解析の立場からランダム波動のエネルギースペクトル構造とその素過程の確率密度を詳しく調べた。周波数を f とすると、 $1/f$ や f の非整数次で減衰するエネルギースペクトルはランダムパルスの継続時間が一様分布かそれに近いような確率密度分布をするときに発生していることがわかった。さらに、フラクタル的なスペクトル構造を支配する物理則は確率事象の個数ではなく、その確率密度でより一般的に理解されることが示された。 $1/f^{1+\delta}$ となる非整数スペクトルのふるまいでは、 δ がフラクタル次元、より一般的には、確率変数の分散（2次モーメント）に関係していることが示される。

ランダム波動のスペクトルからわかるコーナー周波数はランダム事象の確率密度の存在範囲に強く依存し、スペクトルの傾きや形状は確率密度の関数形に関係している。この研究は確率過程が持つ性質がどのようにランダム波動に反映されるのかを明らかにし、長時間の時系列サンプルから微細な素過程がどのようにマクロな現象へ発展しているのかを調べる理論的な基礎を与えるものであると考える。その一例として、不均質な大断層が破壊するとき励起される短周期地震波が、震源での素過程の確率論的性質にどのように依存しているのかを議論した。

謝 辞

本研究費の一部は文部省科学研究費重点領域(63601005)によった。

文 献

- AGU, M., and T. KINOSHITA, 1977, On $1/f$ spectrum of randomly superposed relaxation processes, Proceeding of symposium on $1/f$ fluctuations, Tokyo, 41-48.
- BLACKMAN, R. B., and J. W. TURKEY, 1958, The measurement of power spectra, Dover Pub., New York, pp. 83-116.
- BRUNE, J. N., 1970, Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes, J. Geophys. Res., **75**, 4997-5009.
- FUKAO, Y. and M. FURUMOTO, 1985, Hierarchy in earthquake size distribution, Phys. Earth Planet. Inter., **37**, 149-168.
- GRUNEIS, F., and T. MUSHA, 1986, Clustering Poisson process and $1/f$ noise, Jap. J. App. Phys., **25**, 1504-1509.
- HARA, H., and S. OKAYAMA, 1988, Fractal dimension and scaling behavior of cracks in a random medium: "Frequency-rank" distribution described by generalized random walks, Phys. Rev. B, **37**, 9504-9511.
- Ito, A., 1985, A study on microearthquake swarms on the basis of milli-second hypocenter determination, 東北大学博士学位論文, 211 pp.
- 小山順二, 1983, 伝播性破壊確率モデルと地震の震源スペクトル, 地震 **2**, **36**, 225-235.
- 小山順二, 1984, 伝播性破壊確率モデルと短期地震波の励起, 地震 **2**, **37**, 295-305.
- KOYAMA, J., 1985, Earthquake source time-function from coherent and incoherent rupture, Tectonophysics, **118**, 227-242.
- 小山順二, 1988a, 不均質な断層の破壊と大地震が励起する強震動, 数理地震学(Ⅲ), 統計数理研究所, 224-247.
- 小山順二, 1988b, 伝播性破壊確率モデルと最大加速度・rms 加速度, 地震 **2**, **41**, 351-357.
- KOYAMA, J. and Y. IZUTANI, 1988, Seismic excitation and directivity of short period body waves from a stochastic fault model, Tectonophysics, in press.
- KOYAMA, J., and N. SHIMADA, 1985, Physical basis of earthquake magnitudes: An extreme value of seismic amplitudes from incoherent fracture of random fault patches, Phys. Earth Planet. Inter., **40**, 301-308.
- KOYAMA, J., and S.-H. ZHENG, 1985, Excitation of short-period body-waves by great earthquakes Phys. Earth Planet. Inter., **37**, 108-123.
- KOYAMA, J., M. TAKEMURA, and Z. SUZUKI, 1982, A scaling model for quantification of earthquakes in and near Japan, Tectonophysics, **84**, 3-16.
- 大内 徹, 1988, 震源過程に関する数理的考察(2)―フラクタル的震源の確率モデルとその地震波スペクトル―, 地震 **2**, **41**, 71-78.
- SHLESINGER, M. F., and B. D. HUGHES, 1981, Analogs of renormalization group transformations in random processes, Physica, **109A**, 597-608.
- 高安秀樹, 本田勝也, 佐野雅巳, 田崎晴明, 村山和郎, 伊東敬祐, 1987, フラクタル科学, 朝倉書店, pp. 285.
- TAKEMURA, M. and J. KOYAMA, 1983, Seismic source spectrum of tsunami and ordinary earthquakes: A quantitative estimation of tsunami from forecoming seismic waves, Tohoku Geophys. J., **29**, 115-128.