横方向不均質媒体における波動場の最新の計算法

——ガウシアンビームを中心として——

スタンフォード大学地球物理学教室 蓬 田 清

State-of-the-art Computational Techniques for Wavefields in Laterally Heterogeneous Media: Mainly the Gaussian Beam Method

Kiyoshi YOMOGIDA

Department of Geophysics, Stanford University, Stanford, California 94305, U.S.A.

(Received December 26, 1988; Accepted February 20, 1989)

This paper reviews recent developments in computational techniques for wavefields in laterally heterogeneous media, mainly the Gaussian beam method. We start with a solution by the asymptotic ray theory as a high-frequency limit, and point out two major defaults in this approach. The first problem is a two-point ray tracing or time-consuming search for the ray connecting source and receiver. This difficulty can be removed by the paraxial ray approximation, extrapolating wavefields outsidies of rays. The second is due to singularity in some critical regions such as caustics and shadow zones. By combining a point-source wave with a plane wave, the Gaussian beam method can avoid such singularity. Also, superposition of many beams naturally smooths out heterogeneities of media, simulating the effect of finite wavelength. In laterally homogeneous media, this superposition corresponds to the WKBJ seismogram of Chapman as a limit. The real difficulty lies in ambiguous weighting factors for the two wavefields: a point-source wave and a plane wave. No studies have ever revealed any physical basis to find appropriate values of the weighting factors. In the near future, one must develop any method to globally estimate those values, rather than empirically, by matching boundary conditions of wavefields on free surface or on interface, which will eventually give more reliable results.

§ 1. はじめに

2次元並びに3次元不均質媒体における弾性波の伝播を計算する方法が、各種の雑誌や会議で最近盛んに取り上げられるようになってきた。このような流れは、観測データの精度が上がるにつれて、深さ方向にのみ構造が変化する従来のモデルに基づく計算、あるいは波線理論に基づく走時異常だけを使った研究では不満足な結果しか得られなくなってきたことによると思われる。確立された手法はいまだにみつかってはいないものの、これまでの研究を通じて、おおよその方向は明らかになってきている。本論では、方法及び文献をできる限り網羅するのではなく、著者も関わり又現在最も普及しているガウシアンビーム法（以下GB法と略す）について論じることとする。GB法に関する総論及び各種の応用については、開拓者であるČERVENÝの二つの論文[ČERVENÝ (1985a, 1985b)]を参照してもらうことにして、ここで

はGB法の基本的概念をできるだけわかりやすく解説し、さらに残された問題点とその解決への展望について述べる。

§ 2. GB法の位置づけ

不均質媒体中の弾性波伝播に関する問題を取り扱う際には、波長、伝播距離、不均質性の空間スケールといった三つのパラメーターに応じて、有効な方法を選択しなくてはならない。これらの関係はFig. 1 [AKI and RICHARDS (1980)]のようにまとめられる。波長と不均質性のスケールが同じくらい($ka \sim 1$)の場合は、回折等の複雑な挙動が顕著になる。もし伝播距離が波長に比べてあまり大きくなければ($kL < 100$)、現在のコンピューター的能力でも弾性運動方程式そのものを有限要素法や差分法などの純数値的方法で解くことが可能であり、結果も正確である。震源付近での強震計の低周波成分や地球の

Fig. 1. Classification of scattering problems and applicable methods in ka - kL diagram [reproduced from Fig. 13.11 of AKI and RICHARDS (1980)].

自由振動の低次モードなどでは、この方法が使用できる。伝播距離が長くなると、こうした決定論的な方法はもはや適用できなくなり、その物理的意味も失っていく。このような場合には、確率論的方法で十分満足できる結果が得られるようになる。コーダ波はその一例である。一方、高周波の波の伝播を扱う場合、すなわち波長が不均質性のスケールよりずっと小さい場合 ($ka > 10$) には、幾何光学の理論が適用される。これは、屈折法による地殻構造の研究、あるいは走時曲線を用いた全地球的内部構造の決定など、地震学誕生以来最も広く用いられてきた方法である。走時が主役を演じるが、振幅も一応計算することができる。

最後の方法はフェルマー (Fermat) の原理に基づく理論体系であり、波線理論と呼ばれている。これに対して、前の二つの方法は弾性運動方程式を基礎としており、波動理論と呼ばれている。波線理論は簡単に地震学の多くの現象に適応できるが、回折等の現象は全く説明できない。GB 法は波線理論から出発し (それは開拓者のČERVENÝが波線理論の大家であることにもよるが)、波動理論のすぐれた点も取り入れ、その適用範囲を広げようと

するものである。以下では、まず波線理論の拡張としてのGB法を導き、次にそれが波動理論とどのように結びついているかを示す。

§ 3. 漸近波線理論

光学の分野では、波動方程式のある漸近解が波線や波面といった幾何光学の概念に対応づけられることが古くから示されていた [例えば、BORN and WOLF (1980) の第3章、あるいはLANDAU and LIFSHITZ (1975) の第7章]。弾性波に対してもこの関係が成り立つことが明確に示されたのは、実は1950年代後半になってからのことである [BABICH and ALEKSEYEV (1958), KARL and KELLER (1959)]。ここでは、議論を単純化するため、最も単純な2次元スカラー波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) U(x, z, t) = 0 \quad (1)$$

のみを考えることにする。ここで速度 c は座標 (x, z) に依る。 t は時間で、 ∇^2 は2次元ラプラシアン、そして U は波動場で一般的な複素数とみなす。弾性波及び3次元問題については、ČERVENÝ (1985a) を参照されたい。た

だし基本的な取り扱いは全く同じである。

均質体における (1) の解として、平面波

$$U(x, z, t) = ae^{i\omega(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - t)}$$

があることは自明である。ここで、振幅 a は定数であり、 ω は角周波、そしてスローネスベクトル (slowness vector) $\mathbf{p}$ は大きさは速度の逆数 $1/c$ で、方向は波の伝播方向に一致する。これに対して、不均質体においては波の振幅も伝播方向も変化する、これらを座標 (x, z) の一般的な関数としなくてはならない。高周波領域では波面の近傍において位相が最も激しく変化するのは、座標 (x, z) における波面の到着時刻すなわち走時 $\tau(x, z)$ を導入することで、位相を表すことにする。そこで、(1) の高周波領域における漸近解

$$U(x, z, t) = A(x, z)e^{i\omega(\tau(x, z) - t)} \quad (2)$$

の形が与えられる。(2) を (1) に代入し、高周波近似ということで、角周波数 ω の高いオーダーの項のみを考える。一番大きな $O(\omega^2)$ の項では、

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c^2} \quad (3)$$

という走時 τ を決める eikonal 方程式が得られ、次の $O(\omega)$ の項からは

$$A\nabla^2\tau + 2\nabla A \cdot \nabla\tau = 0 \quad (4)$$

という振幅 A を決める transport 方程式が得られる。

まず、(3) より $\mathbf{p} = \nabla\tau$ というベクトルを導入する。このベクトルの大きさは、(3) より直ちに速度の逆数であることがわかる。また走時 τ が一定の面は位相が同じであり、従って波面に対応することがわかる。 $\mathbf{p}$ は定義からこの波面に常に直角方向を向いていることになり、物理的には波線の方向に対応しているわけである。従って $\mathbf{p}$ は平面波の場合に定義したスローネスベクトルを一般化したものであることが示される。 $\mathbf{x}$ をある波線の座標を示すものとして、 s をその波線に沿っての長さとする、 $d\mathbf{x}/ds$ は明らかに単位ベクトルで、その方向は波線の接線方向である。 $\mathbf{p}$ と同じ方向であるから

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = c\mathbf{p} \quad (5a)$$

が求まる。一方、 $\mathbf{p}$ を波線に沿って微分すると、

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d}{ds}(\nabla\tau) = \nabla\left(\frac{d\tau}{ds}\right) = \nabla\left(\frac{1}{c}\right) \quad (5b)$$

が得られる。ここでは s の定義と (3) より $d\tau/ds = 1/c$ を用いた。以上の二つの式 (波線トレース式) から波線の軌跡を決めることができる。さらに、走時 τ が波線 ($0 \rightarrow s$) に沿っての速度の逆数の積分

$$\tau(s) = \int_0^s \frac{d\xi}{c(\xi)} = \int_0^s \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}$$

という基本的な式が得られる。

次に、振幅について考える。まず、波線上の各点において波線の接線方向と法線方向に座標軸を持つ波線座標系 (s, m) を定義する。 s 及び m に対応するスケールファクターを 1 及び Q とすれば、走時のラプラシアンは

$$\begin{aligned} \nabla^2\tau &= \frac{1}{1 \cdot Q} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q}{1} \frac{\partial\tau}{\partial s} \right) + \frac{1}{1 \cdot Q} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{m}{Q} \frac{\partial\tau}{\partial m} \right) \\ &= \frac{1}{Q} \frac{d}{ds} \left(\frac{Q}{c} \right) \end{aligned}$$

となる。ここでは、(3) と波線座標系の定義から $\partial\tau/\partial s = 1/c$ 、また $\partial\tau/\partial m = 0$ (走時 τ は波線の法線方向には一定) であり、 Q は s のみの関数として偏微分より全微分になおした。 m のスケールファクター Q は、物理的には近接した波線どうしの広がりを表す量で、geometrical spreading と呼ばれるものに相当する。上の式を用いれば、(4) は

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{Q}{c} A^2 \right] = 0$$

と簡単に表せる。これは、 QA^2/c が波線に沿って一定であること、すなわち、波線の管の中のエネルギーの流れが保存されることを示している。(3) と (4) が以上のように解け、(2) の漸近解として

$$U(s, t) = \Phi \sqrt{\frac{c(s)}{Q(s)}} \exp \left\{ -i\omega \left(t - \int_0^s \frac{d\xi}{c(\xi)} \right) \right\} \quad (6)$$

が得られる。ただし、 Φ は定数である。これが、Asymptotic ray theory (以下 ART と略す) の基本式である。(6) の物理的意味は簡単である。すなわち、位相の遅れは波線に沿っての走時であり、振幅は波線の管の断面積 Q の平方根に反比例する。ここで、位相は (3) より走時の一階微分 $\nabla\tau$ によって求まるのに対し、振幅は二階微分 $\nabla^2\tau$ によることに注意すべきである。つまり、振幅の方が微細な速度構造に敏感であり、逆に言う扱いがはるかに難しくなるわけである。とにかく、地震学の多くの問題は、(6) の形式化に基本的には依存している。

§ 4. Paraxial Ray 近似

(6) の表現式は応用上大変有用であるが、次の二つの重大な欠点を含んでいる。a) 震源と観測点を結ぶ波線をうまくみつけないければ使えない。媒質が複雑でさらに 3 次元のような場合においては、これはきわめて大変な作業である。b) 波線が届かないような陰の領域 (shadow zone) では適用できないし、また、波線が重なりあう焦点 (caustic) では、波線の管の広がり Q が零となり、解が発散する。このような場所は波動場の特異領域と呼ばれ、ART は使用できない。特異領域の各例については CHAPMAN (1985) が簡潔にまとめている。

まず a) の問題について考えよう。この問題について

は, ČERVENÝ等が明快な解決法を一応与えている [例えば, ČERVENÝ and PŠENČÍK (1983), ČERVENÝ *et al.* (1984)]. 彼らの解決法は, ART で計算される波動場を波線以外の領域に外挿する paraxial ray approximation (以下 PRA と略す) の考えに基づいている. 波線上のある点 s に近接した点 s_1 の走時 $\tau(s_1)$ を点 s のまわりのテイラー展開によって表すと

$$\tau(s_1) \approx \tau(s) + \nabla\tau(s) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x} \quad (7)$$

となる. ここで, $\mathbf{x}$ は s から s_1 を結ぶベクトルであり, 行列 $\mathbf{N}$ は走時の二階微分 ($N_{ij} = \partial^2\tau / \partial x_i \partial x_j$) を波線上の点 s で求めたものである. 前章で示したように, 走時曲線 τ と波線の関係から, $\nabla\tau$ は大きさが速度の逆数, 方向が波線の接線方向というスローネスペクトル $\mathbf{p}$ である. (7) の展開では, $\mathbf{x}$ の 2 次の項まで採用しているが, このことは, 物理的には波線近傍の複雑な形をした波面を放物線によって近似していることに相当する. 近似の精度は, 考えている点 s_1 がどのくらい波線に“近い”かに依存しており, ČERVENÝ (1985a) の詳しい議論によれば, 半波長程度以内, さらに正確には第一フレネルゾーンの中であれば十分よい近似になる. この放物線による波面の近似は, 物理探査などでは既にその有効性が示されている [例えば CLAERBOUT (1985)].

残る問題は, 走時の二階微分 N_{ij} をどのように求めるかである. 議論を簡単にするため, 新たに ray-centered 座標系 $\mathbf{q} = (s, n)$ を導入する. 前章で用いた波線座標系 (s, m) では, 考えている点を実際に通過する波線を考え, その波線に沿っての長さ s と法線方向の座標 m を考えた. 別の点を考える際には, その点を通る別の波線を基に座標系を考えなくては行けない. 従って, m のスケールリングファクター Q が波線の管の広がりを示すわけである. これに対してここで考える座標系 $\mathbf{q}$ では, 点の位置に関係なく, まず特定の波線を考える. 波線は考えている点の近傍を通過するだけである. この点から波線に垂線を下し, その長さを n とする. そして波線に沿ってのこの交点までの長さを s とする. 考えている点が波線上にある場合にのみ, 上の二つの座標系は一致する. 詳しくは ČERVENÝ (1985a) を参照されたい.

(7) の二次の項は座標系 $\mathbf{q}$ を用いれば

$$\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x} = \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}$$

となり, 各要素は簡単に, $M_{11} = \partial^2\tau / \partial s^2 = \partial(1/c) / \partial s$, $M_{12} = M_{21} = \partial^2\tau / \partial n \partial s = \partial(1/c) / \partial n$, $M_{22} = \partial^2\tau / \partial n^2$ となる. M_{22} 以外の各要素は, 単にモデルのスローネス ($1/c$) の空間微分である. 波線上の点では s と n のスケールリングファクターは共に 1 になるので, $\nabla^2\tau$ と波線の広がり Q が次の式

$$\begin{aligned} \nabla^2\tau &= \frac{1}{Q} \frac{d}{ds} \left[\frac{Q}{c} \right] = \frac{\partial^2\tau}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\tau}{\partial n^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{c} \right) + M_{22} \end{aligned}$$

で関係づけられていたことを思い出せば,

$$M_{22} = \frac{1}{Qc} \frac{dQ}{ds}$$

となり, 振幅を決める波線の広がり Q を用いて, 残りの M_{22} も表現できる. ここで, (7) に戻って走時 τ が一定の面が波面であることを思い出せば, M_{22} は物理的には波面の曲率を表していることがわかる. 波線の広がり Q が波面の曲率 M_{22} と上式のような深い関係にあることは, 次のように理解できる. 例えば, 波線近傍の波動場が平面波の場合は, 波面の曲率は零, 従って上式より波線の広がり Q は一定, つまり波線と波線の間隔は変わらないという, 平面波の特徴を表している. 一方, 波線が一点に集まる焦点の場合は, 曲率 M_{22} が無限大であり, 従って波線の広がり Q は零という, これまた妥当な結論が導かれる. 一般の波動場はこの二つの場合の間にあると考えられる. 後で述べるように, GB 法は, 平面波と円筒波 (3次元では球面波) の線型結合を用いて, より一般的な波動場を表現しようというものである. このアイデアは大変素晴らしいものであるが, 実は, この結合をどのようにしていくかという所があいまいな点として残っている. これが現時点における GB 法の最大の問題点なのである.

以上でいかにもきれいに定式化できたように見えるが, 波面の曲率 M_{22} を具体的にどのように計算していくかがまだ問題として残っている. 実を言えば, ART の式 (6) を示す過程で, どうやって波線の広がり Q を求めるかを省略していた. Q と M_{22} との間にはある関係が存在するので, ART の (6) の解を求めることと (7) の走時の近似式を用いることは, 計算量は全く同じである. APT の解に比べて, (7) の近似において特に余計な計算

Fig. 2. A ray and its perturbation with $\delta\mathbf{x}$ and $\delta\mathbf{p}$ [reproduced from THOMSON and CHAPMAN (1985)].

は必要ないのである。波線の広がり Q は近接した波線同士がいかに変化するかによるので、ある一本の波線の軌跡を記述する (5) の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{p}$ を摂動させてみればよい (Fig. 2)。その結果として、次式を得る。

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{ds} = c\delta\mathbf{p}$$

$$\frac{d\delta\mathbf{p}}{ds} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{V}\delta\mathbf{x}$$

ここで、行列 $\mathbf{V}$ の各要素は速度の二階微分である。ここでの摂動は波線に対して法線方向にのみ、ずらしたことになるので、2次元の場合は、 $\delta\mathbf{x}$ と $\delta\mathbf{p}$ はスカラーになる。Fig. 2 から直ちにわかるように、波線の位置の摂動 $\delta\mathbf{x}$ が、実は波線の広がり Q に他ならない。そこで、 $\delta\mathbf{x}$ を Q 、 $\delta\mathbf{p}$ を新しい変数 P で置きかえると

$$\frac{dQ}{ds} = cP$$

$$\frac{dP}{ds} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 c}{\partial n^2} Q \quad (8)$$

が得られる。ČERVENÝ等⁸は、波線の軌跡を記述する (5) に対比して、波線相互のふるまいを記述する (8) を dynamic ray-tracing と呼んでいる。この式より、波面の曲率すなわち走時の二階微分 $M_{22} = P/Q$ が求められる。3次元問題では P と Q は行列になるが、その場合については ČERVENÝ (1985a) を参照されたい。なお、振幅については走時の変化に比べてゆるやかに変化するので、(7) の二次のオーダーまでの展開では、波線上の点 s とその近傍の点 s_1 で同じ値をとるとしてよいことが、ČERVENÝ (1985a) による厳密な計算によって示されている。

以上の議論をまとめると、PRA では、波線近傍の点 s_1 における解は、波線上の点 s での解 (6) を拡張して、次のように表現できる。

$$U(s_1, t) = \Phi \sqrt{\frac{c(s)}{Q(s)}} \exp \{-i\omega(t - \tau(s_1))\} \quad (9)$$

ここで

$$\tau(s) = \int_0^s \frac{d\xi}{c(\xi)} + \mathbf{p}(s) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}$$

この形式においては、波線が希望の点を通らなくても、その近くを通っていさえすれば、かなりよい精度で波動場が計算できることになる。ČERVENÝ等の初期の定式化 [例えば ČERVENÝ *et al.* (1982)] では、波線から法線方向 $\mathbf{n}$ による展開のみであったために、考えている点から波線上に垂線をおろした点の座標を求めなければならず、実際の計算では、この作業に手間が結構かった。(9) の表現を用いれば、そのような厳密な計算は必要なく、波線上で近い点ならどこでもよいことになる。

ČERVENÝ *et al.* (1984) は、さらに次のような関係式を

PRA より導いた。(7) の走時の表現を $\mathbf{x}$ で微分すると、

$$\mathbf{p}'(0) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{V} \left(\frac{1}{c(0)} \right) Q(s)^{-1} \mathbf{n} \quad (10)$$

という式を得る。 $\mathbf{p}(0)$ は出発点におけるもとの波線の方向、いわゆる射出角 (take-off angle) であり、 $\mathbf{p}'(0)$ は出発点から求めている点へ波線を通すための新しい射出角である。すなわち、この式は、波線が求める点に当たらない場合に、射出角を出発点でどのように補正すればよいかの目安を与える。波線で二点を結ぶというのは地震学では最も基本的な過程のひとつではあるが、計算を実際したことのある人なら誰でもわかるように、この計算はとても難しい。PRA は波線を単に考えている点の近くを通すだけで (9) によりその点の波動場を計算できるのだが、精度のことを考えると、できるだけ近くに波線をもっていっての方が望ましい。(10) の関係式は、この作業をどのように補正していくかの指針を与える。著者の経験によれば、(10) を用いると、ほとんどすべての場合数回の補正で収束し、二点を十分な精度で結びつける望みの波線が得られる。この (9) と (10) を組み合わせることは実用上大変有効であり、今後、従来の波線の計算方法に取って代わることが予想される。実際のデータ処理に、この方法は積極的に利用されるべきである。

§ 5. GB の導入

前章の初めに言及した ART (6) の二つの重大な欠点のうち、一番目のもの (波線と走時の計算) は PRA で十分に解決されうことを示した。しかし、PRA を用いても、もうひとつの欠点、すなわち、特異領域における波動場の計算に伴う困難は解決できない。何本かの波線が一点に集まってくる焦点の場合には、波線の管の広がり Q が零となり、(9) の形式においても振幅が無限大になってしまう。このような場合は、今までの議論で用いてきた角周波数が無限大という仮定が破綻をきたしてしまう。従って、有限の周波数の効果、あるいは波動場の周波数依存性を考える必要がある。振幅を決める (4) は、波線の管の中のエネルギーの流れが一定という、周波数が無限大あるいは波長が無限小の場合を考えている。エネルギーが完全に波線の管の中に閉じ込められているのである。もし波数が有限、つまり波長が有限の場合には、エネルギーが管の外へと染み出しているはずである。特に、焦点のように管の断面積が零になるような領域では、こういった染み出しの効果が支配的になる。これが (9) の形式化が破綻をきたしてしまう物理的説明である。このような効果を考慮しようとする、一本の波線だけではなく、考えている点の近傍を通過する波線からの寄与も勘定に入れなければならない。すなわ

ち、一本の波線だけによる波動場の表現ではなく、多くの波線からの寄与をたし合わせるにより、波動場を計算していくことが要請される。

有限の周波数の場合には、波線の管からエネルギーが染み出すが、その程度は波線から遠ざかるにつれて減衰すると考えるのが物理的に正しいであろう。PRA(9)の表現で波線からの距離 n に対応する部分は

$$\exp\left(i \frac{\omega}{2} M_{22} n^2\right) = \exp\left(i \frac{\omega}{2} \frac{P}{Q} n^2\right)$$

である。そこで、 M_{22} を実数ではなく複素数 $M_{22} = \text{Re}M_{22} + i\text{Im}M_{22}$ であるとすれば、振幅は、 $\exp(-(\omega/2)\text{Im}M_{22} \cdot n^2)$ となる。もし $\text{Im}M_{22}$ が正ならば、振幅が波線からの距離に対して誤差関数のように減衰していくことになる。これが、以下の方法をガウシアンビーム (Gaussian Beam) と呼ぶ由縁である。この種の定式化は、レーダーや光学の分野では回折等の問題に比較的古くから考案されていた [例えば、KOGELNIK (1965), DESCHAMPS (1971)]。これらの応用では一本のビームのみで波動場を表現しようとしてきたが、地震学に必要なより複雑な媒質には直接使えない。ČERVENÝ 等の功績は、従来の平面波分解 [AKI and RICHARDS (1980) § 6.1 を参照のこと] の形を GB 法と組み合わせることによって、一本のビームの概念に留まらず、何本ものビームのたし合わせにより波動場を表現しようとした点である。平面波分解は、地震学でよく用いられる深さ方向にのみ構造の変化する媒質モデル (一次元モデル) の波動場を記述するのに用いられるが、GB 分解によって、横方向にも不均質なモデルにまで拡張できることになる。この点については次章で詳しく述べることにし、その前に、まず、一本のビームの意味、具体的には複素数変数 $M_{22} = P/Q$ をどのように取り入れるかについて考える。

M_{22} 、つまり P と Q を複素数とみなすのは、これらの変数が dynamic ray-tracing (8) の解であり、実数からの解折接続という数学的妥当性にもよる。類似の例としては、完全弾性体に減衰の効果を導入する際に、速度を実数から複素数にする場合などがある。これからは、変数 P と Q は (8) の複素数解であるとする。これらを複素数とする際に、(8) が二連一階連立微分方程式であり、独立な解が二組存在することに注意する必要がある。 P と Q を二組の独立な初期条件の解 (実数) の線型結合で表し、その係数を複素数とすれば、物理的にもわかりやすいであろう。ČERVENÝ (1985a) 等に従い、初期条件は、平面波の場合

$$P_1(0)=0, \quad Q_1(0)=1 \quad (11a)$$

と、円筒波あるいは線震源 (3次元では球面波あるいは点震源) の場合

$$P_2(0)=1/c(0), \quad Q_2(0)=0 \quad (11b)$$

とする。ここで、波面の曲率 M_{22} は、それぞれ零と無限大になることを思い出していただきたい。なお、MADARIAGA (1984) は、不均質性のある媒体について、異なった形の平面波の初期条件を提唱している。ART や PRA では、このいずれか一方を初期条件として (8) を波線に沿って解いていけばよい。点震源とみなせる地震からの波では、後者を使うのが当然である。ČERVENÝ *et al.* (1982) は、線型結合の具体的な形として次のものを採用している。

$$\begin{aligned} P(s) &= \varepsilon P_1(s) + P_2(s) \\ Q(s) &= \varepsilon Q_1(s) + Q_2(s) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 $\varepsilon = s_0 - iL_0^2$ である。これで P/Q の虚数部は望みの正となる。

二組の独立な解に対しては (8) から

$$\frac{d}{ds} [Q_2(s)P_1(s) - Q_1(s)P_2(s)] = 0 \quad (13)$$

が成り立つことが示される。特に、(11) の初期条件を満たす場合には、

$$Q_2(s)P_1(s) - Q_1(s)P_2(s) = \text{const.} = 1/c(0)$$

となり、ロンスキアンが正値をとることが示される。(11) のような初期条件下では、 $Q_1(s)$ と $Q_2(s)$ が同時に零になることはない。すなわち、それらの線型結合である $Q(s)$ は絶対に零にはならないことを上式は意味している。これが二組の独立な解の線型結合で $P(s)$ 及び $Q(s)$ を表現する重大な利点である。 $Q(s)$ が零にならない限り、解の形 (9) より、これが発散することはない。物理的には、円筒波源に対して焦点になる点と平面波源に対して焦点になる点は常に異なっていることに対応している。初期条件 (11) の一方のみで実際の波動場を表そうとして特異領域を生み出してしまふ ART に対して、GB 法は、円筒波源 (あるいは球面波源) と平面波源のたし合わせで表現し、解がいつも安定するようにしているのである。CHAPMAN and DRUMMOND (1982) は、古くから応用数学や量子力学で用いられている Maslov 法を地震学に導入したが、これも実は球面波源 ($\mathbf{x}$ -平面) と平面波源 ($\mathbf{p}$ -平面) の二つの組み合わせによるもので、その基本は GB 法と同じである。普通の $\mathbf{x}$ -空間上では波動場が特異 (つまり焦点) になるが、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{p}$ を合わせた位相空間上ではリュービルの定理から特異点が消えてしまうことを利用する。これがまさに GB 法の (13) に対応しているわけである。なお、Maslov 法については、THOMSON and CHAPMAN (1985) 及び CHAPMAN (1985) による良いまとめがある。

§ 6. GB のたし合せと平面波分解

前章では、複素変数 P と Q を導入することによって、一本の波線が特異点のない物理的にも妥当な GB になる過程をみてきた。ここでは、何本もの GB のたし合せが波動理論に基づく合成地震記象といかに関係するかをみることにする。

まず、二次元均質媒体における円筒波の平面波分解から入るとわかりやすい。このような場合のグリーン関数は第一種ハンケル関数で与えられ、それを積分 [AKI and RICHARDS (1980) § 6.1 を参照のこと] で表すと次のようになる。

$$U(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c} r\right) \\ = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(p x + \eta |z|)}}{\eta} dp \quad (14)$$

ただし、 $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$ は波源からの距離、 $p = \sin \phi / c$ (角度 ϕ は z 軸に対する波の伝播方向) は波線パラメーター、 $\eta = (c^{-2} - p^2)^{1/2} = \cos \phi / c$ は垂直方向のスローネスである。なお、 p が c^{-1} より大きい時には、 η の虚数部が正符号をとるように定義し、垂直方向に減衰する波も含むようにする。 p の代わりに角度 ϕ を変数とすれば

$$U(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_c e^{i\omega(p x + \eta |z|)} d\phi$$

となり、積分路 c は $(-\pi/2 - i\infty)$ から $(\pi/2 + i\infty)$ までである。このような分解を行うのは、地震学でよく扱われる深さ方向のみの一次元モデルでは円筒波や球面波のふるまいが複雑になるからである。スネルの法則より、どんな速度勾配や不連続面があってもパラメーター p は特定の波線に沿って不変であるから、Weyl 積分 (14) の被積分関数は、その形が保たれ都合がよい。特定の p の値に対応する被積分関数 $\exp \{i\omega(p x + \eta |z|)\}$ のひとつひとつは、 z 軸からの角度 ϕ の方向に伝播する平面波に対応している。横方向不均質性が入ってくると、 p のように伝播において不変に保たれるような変数が、もはや存在しなくなる。従って、上で述べた平面波分解も全く意味がなくなるが、(14) の特定の p に対応する平面波を GB で置き換えれば、横方向不均質がある場合への自然な拡張になるであろうことが期待される。(9) の表現を用いれば、

$$U(\mathbf{x}, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_c \left[\frac{Q(0)c(s)}{c(0)Q(s)} \right]^{1/2} e^{i\omega\theta(\mathbf{x}, z, \phi)} d\phi \quad (15a)$$

ただし、

$$\theta(\mathbf{x}, z, \phi) = \int_0^s \frac{d\xi}{c(\xi)} + p(s) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}$$

となり、ここで $M_{22} = P/Q$ は (12) で与えられる複素変数である。実際の計算では、いろいろな方向 ϕ に放出し

た有限の数のビームをたし合わせることで、(15a) を評価する。すなわち、

$$U(\mathbf{x}, \omega) \simeq \frac{i}{4\pi} \sum_{\phi} \left[\frac{Q(0)c(s)}{c(0)Q(s)} \right]^{1/2} e^{i\omega\theta(\mathbf{x}, z, \phi)} \Delta\phi$$

ただし、 $\Delta\phi$ は波線の射出角の間隔である。(14) の Weyl 積分は均質媒体の場合の表現式であったが、(15a) の GB のたし合わせによる表現は、横方向の不均質がある場合にも使えるよう拡張されている。ここで、被積分関数、つまり GB の一本一本が絶対に発散しない点が重要であり、数値的にもそのことが安定な結果をもたらす一因となっている。

以上で、平面波を GB に置き換えることにより、一様媒体モデル (14) より横方向不均質性のあるモデル (15a) へと拡張されることを示した。ここで、この両者の中間に位置し、また地震学で通常用いられる、深さ方向のみに速度変化のある一次元モデルの場合を考えてみる。そうすることによって、GB のたし合わせで波動場を表現することの意味が、もっと明確になるであろう。MADARIAGA (1984) 及び MADARIAGA and PAPADIMITRIOU (1985) は、ČERVENÝ 等が求めた (15a) の形が、一次元モデルにおける CHAPMAN (1978) の WKBJ 法の拡張になっていることを示した。一次元モデルにおいては、(15a) は次のように書ける。

$$U(x, z, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q(0)c(z)}{c(0)Q(z)} \right]^{1/2} e^{i\omega\theta(\xi, z, p)} \frac{dp}{\eta(0)} \quad (15b)$$

ただし

$$\theta(\xi, z, p) = \tau(z, p) + p x + \frac{1}{2} N(z) \xi^2$$

又、

$$\tau(z, p) = T - p x = \int_0^z \frac{\cos \phi}{c(z)} dz$$

ここで、 τ は垂直方向のみの走時であり、 ξ は考えている点から波線までの水平距離、 $N(z)$ は ξ に対応する波面の曲率である。GB 法では、 Q と $N(z)$ は平面波と円筒波の重ね合わせとして表現されている。(12) の線型結合で係数 ε を無限大とすると、つまり平面波だけを取り出すと、曲率は零なので $N(z)$ は零となり、

$$U(x, z, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(\tau + p x)}}{[\eta(0)\eta(z)]^{1/2}} dp \quad (16)$$

を得る。この時、 Q は実数 $c\eta$ に帰着する。(16) の被積分関数 $e^{i\omega(\tau + p x)}$ は一次元モデルでの ϕ 方向へ伝播する平面波を表しており、CHAPMAN (1978) の WKBJ 法の出発点の式に一致する。さらに速度が深さ方向にも一様とすると、 $\eta = (c^{-2} - p^2)^{1/2}$ が一定となり、 $\tau = \eta |z|$ となるので、Weyl 積分 (14) に帰着する。

Fig. 3. a) θ curve as a function of p at the horizontal distance of 70 km for a half space with a constant velocity gradient. b) Set of rays used to generate seismograms. c) Individual Gaussian beam contribution for the synthetic seismogram at the bottom. [Added to MADARIAGA (1984)].

順序が逆になってしまったが、上に述べたことで、一様媒体の式 (14) から、一次元モデルの式 (16) を経て、横方向不均質媒体に対する式 (15a) へと平面波分解 (あるいは GB 分解) が一般化されていく過程が明らかになったと思う。又、波線理論 ART を拡張して PRA が導かれ、その PRA の拡張である GB を何本もたし合せることで、波動理論に基づく地震記象の形式へと近づいていったことが理解されるであろう。一次元モデルでは波動場を (16) のように波線パラメーター p で分解するのであるが、これは、 p が波線に沿って不変に保たれるというスネルの法則の重要な特徴に基づいている。二次元及び三次元モデルでは、このような不変量が存在しないため、平面波分解のように、計算上の簡略化ができない。そこで GB 法では、(15) でみたように、平面波の代わりに平面波と円筒波 (あるいは球面波) の組み合わせとしての GB で分解するのである。次章では、一次元モデルの場合について、GB 法 (15) が従来の WKBJ 法 (16) のような地震記象の合成法とどのような関係にあるのかを、MADARIAGA (1984) に従って試みることにする。この対比は、二次元モデルなど複雑な媒体の場合、単純には拡張できないけれども、GB 法がどのように働くのかが把握できるであろう。

§ 7. 一次元モデルにおける例

本章では、一次元モデルの場合、GB 法 (15) がどのように波形を組み立てるのかを、WKBJ 法 (16) と比較しながら論じることとする。まず、従来の平面波分解 (16) では、波線パラメーター p について $-\infty$ から $+\infty$ までの領域を積分する形になっているが、これを小さな領域に分けて実際の数値積分をすることになる。この積分範囲のすべてが現実には重要なのではなくて、実はごく一部の領域の積分しか効いてこない。その領域とは、多くの場合 (陰のような場合は除く)、震源と観測点を結ぶ波線に対応する波線パラメーター p の値の近傍のことである。他の部分からの寄与は、位相が近接した部分に対して少しずつずれているため、打ち消しあってしまう [CHAPMAN (1976)]。これを見るために (16) の表現を時間系にもどしてみると、

$$\begin{aligned}
 U(x, z, t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty U(x, z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{[\eta(0)\eta(z)]^{1/2}} \frac{dp}{t-\theta} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{[\eta(0)\eta(z)]^{1/2}} \left. \frac{1}{\left| \frac{\partial \theta}{\partial p} \right|} \right]_{t=\theta} \quad (17)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\theta = \tau + px$ である。(17) から、時間 t がちょうど θ となる所から、すなわち、波線理論の走時に

相当する所から波形が始まることがわかる。上式のように無限大の周波数域（つまり衝撃的な震源に対する応答）に関しては、波線理論 (6) と一致する。この場合は、波線に沿っての走時が θ 、そして振幅 $[c/Q]^{1/2}$ が $\eta^{-1/2}$ に対応している。こうして波線理論と波動理論が結びつく。

次に、具体例として速度勾配が一定の場合について考えてみる [MADARIAGA (1984)]。震源を表面に、観測点を $x=70$ km とする。まず、(17) の形式で地震記録を得るには、 $x=70$ km での $\theta(p, x)=\tau+px$ を p の関数として計算する必要がある。 θ と p の関係をプロットすると、Fig. 3a) のようにある所で極小値をとる正の曲率を持った放物線のような形となる。この θ - p 曲線は、 τ を計算する際の積分だけから求められ、波線の軌跡を計算することはいさい不必要である。この図で走時が最小になる p_0 が、実はフェルマーの原理に基づく波線パラメーターに対応していることにも注意されたい。縦軸に平行な直線を時間 t と共にずらしていき、この曲線との交点を求める。(17) の積分に寄与するのは、この交点での値である。従って、極小点 $\theta(p_0, x)$ より以前には何の波も存在せず、 $t=\theta(p_0, x)$ から波形が始まり、以後は二点で交わることになる。この $\theta(p_0, x)$ が ART の波線に沿っての走時である。この点以外の交点からの寄与は、連続して積分に効いてくるためお互いに消し合い、実質的にはほとんど効かなくなる。(17) の形式は、前述のようにすべての周波数域を含んでいるので数値的な計算には不安定が生じるし、また実際問題では意味もなくなる。実用的には、DEY-SAKAR and CHAPMAN (1978) のように、有限の周波数域にするため、何らかの関数との畳み込みを行い積分域をなめらかにしなくてはならない。例えば、ČERVENÝ (1983) の提唱するように、Gabor 波群を震源関数 $s(t)$ として選べば、(17) は

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, z, t) &= s(t) * U(x, z, t) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int s(t) * \left\{ \frac{1}{[\eta(0)\eta(z)]^{1/2}} \frac{1}{t-\theta} \right\} dp \end{aligned} \quad (18)$$

ただし

$$s(t) = \exp \left[- \left(\frac{\omega_0 t}{\gamma} \right)^2 \right] \cos \omega_0 t$$

となる。 $s(t)$ は、 ω_0 を中心として誤差関数的（幅は γ で決まる）にバンドパスフィルターをかけた周波数域を持つ。(18) は畳み込み * の操作によってなめらかになり、数値的に安定なものとなる。一次元モデルの場合も、極値 p_0 の近傍からの寄与のみを計算していけば十分である。さて、極値 p_0 から遠ざかるにつれて、つまり実際の波線から離れるにつれて、その寄与が急激に小さくなるわけであるから、実際の波線からの距離 ξ が大きくなる

につれて重みが急激に減少するようなフィルターをかけ、余計な積分領域を落としてしまいたくなる。一次元モデルの場合の GB 法 (15a) と WKBJ 法 (16) を比べると、直ちに次のことがわかる。GB 法においては

$$\exp \left[- \frac{\omega}{2} I_m N(z) \xi^2 \right]$$

というフィルターを WKBJ 法 (16) のひとつひとつの平面にかけた形になっており、この形は、上で述べた物理的要請にもかなっている。さらに、上の形のフィルターでは、周波数が高くなるほどその幅が狭くなる、言い換えれば、寄与する範囲が狭くなり ART に近くなることがわかるであろう。このフィルターの形は、勝手に考え出されたものではなく、dynamic ray-tracing (8) の複素数解をとることによって、自然な形で導入されたものである。ČERVENÝ 等はもともと、ART の拡張として GB 法を導入したわけなので、(11b) の円筒波源（あるいは球面波源）の初期条件が基本であり、特異点の問題を解消するために平面波 (11a) をいわば補正項として加えたと考えられる。上でみた WKBJ 法との比較では、この見方は全く反対に、平面波のたし合わせから始まって、それに円筒波を加えてフィルターをかけた形になっている。

これまで、WKBJ 法にフィルターをかけた方法が GB 法に帰着することを示したが、その合成法を詳しく見てみることにする。まず、Fig. 3b) のように波線をトレースする。次に (8) を平面波と円筒波の二つの初期条件で波線に沿って解いていく。その二つの解を (12) のように複素数係数で結びつける。最後に (15b) のようにたし合わせる。Fig. 3c) には、ひとつひとつのビームの寄与とそのたし合わせの結果を示す。波線の出射角 ϕ_0 が Fig. 3a) の p に対応し、二つの図が密接に関係することが示される。GB 法は Fig. 3a) に上述のフィルターをかけたことになるので、実際の波線 p_0 にあたる $\phi_0=36.16^\circ$ において、極値をとる。フィルターの効果によって、振幅もこれに対応するビームがいちばん大きく、それから離れるにつれて小さくなっていくことが Fig. 3c) に示されている。虚数部を零にして平面波のみの極限の場合を考えると、GB 法は WKBJ 法、Fig. 3a) に帰着される。Fig. 3a) の方法でも、たし合わせる際に極値 p_0 以外では位相が少しずつずれているので、振幅が減衰していかなくても、理論的には互いに消し合うはずである。実際には、有限の p の間隔を取っていくのでうまく消し合わないことがある。極値 p_0 の点より振幅が減衰する GB 法ではもっと安定した結果が得られる。

Fig. 4 では、さらに複雑な焦点の場合を NOWACK and AKI (1984) の例に従って考察してみる。WKBJ 法 (16)

Fig. 4. θ curve as a function of p at the horizontal distance of 120 km corresponding to a caustic for a homogeneous layer over half space with a constant velocity gradient. The two right bottom figures show individual Gaussian beam contribution for the synthetic seismograms in the right with two different beam parameters. [Added to NOWACK and AKI (1984)].

では、焦点は θ - p 曲線上の変曲点 p^* に対応することになり、普通の到着波に比べて振幅がずっと大きくなる。もちろん位相も異なるが、それらについては CHAPMAN (1978)を参照されたい。この特徴と GB 法でのたし合わせが対応していることは、この図から明らかである。Fig. 4 ではさらに、虚数部の大きさによってたし合わせの様子がどのように変化するかも比較している。 $L_0=8$ は、大きな虚数部、つまり幅の狭いビーム（フィルター）を用いた場合で、 p^* に対応する実際の波線とその近傍の数本のビームのみが効いてくる。一方 $L_0=128$ は、小さな虚数部、つまり幅の広いビームを用いた場合で、WKBJ 法に近くなる。この場合には、多くのビームからの寄与が効いてくる。前述のように、実際の波動場を決めるのは、極値（焦点では変曲点 p^* ）に対応するビームとそのごくまわりのビームのみであるので、ビームの幅を狭くして有効なビームの数を減らした方がよいような感も与える。ところが、たし合わせるビームの数が少な

すぎると、お互いにうまく消し合わず数値的誤差が大きくなる。ビームの幅を零に近づいていく極端な場合を考えると、ART に近づいてしまい、焦点では波線の広がり Q は零に近づき、振幅は発散してしまう。この点については次章で述べる。

なお、焦点を波が通過すると、 $\pi/2$ の位相の進みが生じる。表面波が震央や対蹠点を通過する際のポーラー・フェイズ・シフトもこの一種である。GB 法では、複素平面上で Q の位置を追っていき、位相の進みが初めからどれだけかをたどれば、この効果を取り入れることもできる。このことについては、CHAPMAN and DRUMMOND (1982)の KMAH 指数を参照されたい。

§ 8. 問題点と今後の展望

これまで見てきたように、GB 法は一次元モデルでは WKBJ 法の自然な拡張であり、その形式化が波線の軌跡に基づくことから、より複雑な横方向不均質性のあるモ

デルにも自然に適用される。何本かの波線をトレースするだけでよいので、たとえ伝播距離が長くなっても素早く計算できる。

以上は、二次元スカラー波という最も簡単な場合のみを考えてきた。三次元モデルになると表現がより複雑になるし、また弾性波を考えると波の偏向面といったものも考慮せねばならない。さらに、連続的な媒質ではなく、速度等に不連続な境界面がある場合には、反射・透過係数なども考えなくては行けない。波線そのものについては、お馴染みのスネルの法則でよいが、波線の広がり等を表す変数 p や Q については、境界面でどのように変化するか新たに計算する必要がある。P-SV 波の場合では特に複雑であることは明らかである。以上のような一般的な場合についての形式化は ČERVENÝ (1985a) のまとめを参照されたい。今まで述べてきた基本概念を理解できれば、こういった一般化の部分の理解はやさしいはずである。さらに、地震波、つまりダブルカップルからの波は方位特性があるが、これは波線理論の場合と同じなので、AKI and RICHARDS (1980) などの形式をそのまま用いればよい。

もうひとつ面倒なのは速度構造のモデルの作り方で、(8) でみたように振幅は速度の二階微分と関係してくるので注意が必要である。これについては ČERVENÝ (1987) に良いまとめがある。さらに、ČERVENÝ *et al.* (1988) では実際の計算の仕方が記述されており、又、ソフトウェア・パッケージも提供されているので、これを少し変更するだけで広く一般に応用することができるであろう。ここ数年来、数多くの精度のテストや各種の応用がなされてきたが、これについては ČERVENÝ (1985b) に抜粋されているので、ここではくり返さない。それ以後の発展としては、異方性媒体への GB 法の実用 [GAJEWSKI and PŠENČÍK (1987), HANYGA (1986)] や、波線の摂動法による効果的な計算方法の開発 [FERRA and MADARIAGA (1987)] などが挙げられる。

さて、最も重大な未解決の問題は、いかに平面波と円筒波（三次元では球面波）をたし合わせるか、つまり (12) の係数 ε を決めるかである。特に、虚数部、つまりビームの幅の選択は、結果を大きく左右する。前章のような一次元モデル、あるいは不均質性の比較的弱い場合 [例えば YOMOGIDA and AKI (1985) の表面波の場合など] であれば、ČERVENÝ *et al.* (1982) などが提唱している係数の値で大体良い結果が得られることが、各種の計算で示されている。また、多少の係数の変化では、結果にあまり影響がない。ところが、不均質性が大きくなって波線のふるまいが複雑になると、一気に事態は変わってしまう。特に、焦点や陰といった GB 法が有効

であると主張される特異領域では、この係数をどう選ぶかで好みどおりの地震記象が勝手にできてしまう。Calaveras 断層沿いの低速度層による異常振幅を GB 法を用いて説明しようとした CORMIER and SPUDICH (1984) のような例では、波線が複雑にからみ合い、係数の取り方ひとつで結果は何とでもなってしまう。つまり、強い不均質性が入ってくると、GB 法は確かな計算方針が立てられなくなってしまう。CHAPMAN and DRUMMOND (1982) の Maslov 法にしても同様に、平面波解と球面波解の組み合わせの仕方がやはりはっきりしていない。今までの GB 法の研究は、この点を無視して安易に使われてきすぎたと思う。

今後は、問題となっている係数の物理的意味を考えるか、あるいは何か別の方法と組み合わせて係数にあまり依存しない形式化を行うことが望まれる。KLIMEŠ (1984) は、与えられた波面において最適なパラメーター、つまり係数の形がどうなるかについて理論的な考察を行っているが、それ以来、この問題を正面から扱った研究は目につかなかった。最近、WEBER (1988) は、問題となっている係数 ε をビームが通過していく途中の不均質性の大きさによって調節することで、比較的安定した結果が得られることを数値実験によって示した。不均質性が弱い所ではビームの幅を広くし、強い所では狭くする。物理的に考えれば、有限の周波数の波はその波長のスケールで媒体をフィルターしながら伝播していくわけであるから、ビームの幅のこのような選択の目安は妥当である。

一方、BENITES and AKI (1989) は、最近注目を集めている境界積分法を GB 法と組み合わせることで、上述の係数依存性をなくす方法を開発した。彼らは、境界面（あるいは表面）に力源を散らばせ、そこからの波を GB 法によって入射波、反射波及び透過波として表現し、各々の力源の強さは境界条件（変位及び応力）を最小二乗法的に満足するように決めている。この方法を用いると、結果は係数 ε にほとんどよらないことが、いくつかの計算例によって確かめられた。一本一本のビームを独立に扱うのではなく、波動場を記述する多数のビームを全体として取り扱うことで係数の効果をなくすわけである。この方法は、次の二点ですぐれている。強い不均質性があっても使えること。次に、表面や境界面近くの波動場も計算できることである。PRA の (9) の形を思い出すと、波動場を波線の近傍領域へ外挿する際には媒体がなめらかでなくてはならない。ところが、地震学における観測点はほとんど表面にあるので、(9) の PRA、あるいは GB 法を実際にはどのように適用したらよいのかははっきりしていない。表面近くでは波は複雑に干渉しあ

う、BENITES and AKI (1989) の方法は、こういった状況でも直接適用できる。彼らはまだ SH 波の場合についてしか取り扱っていないので、より複雑な P-SV 波の場合にどれだけ安定した結果が得られるかが課題であろう。

§ 9. おわりに

Paraxial ray 近似 (9) は、従来の波線理論の自然な拡張として重要であり、その利用価値も高い。焦点や陰などの領域以外では、もっと利用されるべきである。本論の後半では、焦点や陰などの場合にも使用できる GB 法、特にそのたし合わせが、従来用いられてきた平面波分解の概念に結びついていることを、特に一次元モデルの場合を例にとって示した。有限の周波数の波ではエネルギーが波線の外へ染み出すという GB の物理的着想は正しい。しかし、現実の定式化においては、変数 P や Q を単に実数から複素数に置き換えたという程度の数学的裏付けしかない。エネルギーの波線からの染み出しぐあい、つまりビームの幅をどのように決めればよいかについては、まだ何もわかっていないし、従って、それを決める係数 ϵ の値の取り方いかんによって結果が著しく変わってしまうことを指摘した。

今後は、このビーム幅の係数を経験的に決めるのではなく、確固とした物理的裏付けの上に計算していかなくてはならない。それには、個々のビームを独立に波線近傍領域へ外挿していく ČERVENÝ 等の元々の方針を捨て、ビーム同士のつながりを積極的に考えなくてはならないであろう。例えば、何本かの波線上にある時刻の点を結びつけると、それがその時刻の波面に対応する。PRA や GB 法は、(7) のように二次のテイラー展開で波線以外の領域の波動場を考えた。上のように多く波線上の点からもっと高次の精度で波面を全体として決めることは自然にできる。このような方法を使えば、エネルギーの波線からの染み出しの程度、すなわち、ビームの幅ももっと具体的に与えられるであろう。

Fig. 1 に示した地震学で扱う広範な分野は、コンピューターがいくら速くなっても直接に解くことはできない。GB 法やそれに関する手法の確立は、一次元モデルに縛りつけられていた地震学者を、横方向不均質性が本質的に係わってくる多くの現象の解明へと向かわしめる第一級の研究であると思う。

References

- AKI, K. and P. G. RICHARDS, 1980, Quantitative Seismology, W. H. Freeman, 932 pp.
- BABICH, V. M. and A. S. ALEKSEYEV, 1958, On the ray method of the computation of the intensity of wave fronts (in Russian), *Izv. Akad. Nauk. USSR, Geophys. Ser.* No. 1, 9-15.
- BENITES, R. and K. AKI, 1989, Boundary Integral—Gaussian beam method for seismic wave scattering: SH waves in 2-D media, *J. Acoust. Soc. Am.*, in press.
- BORN, M. and E. WOLF, 1980, *Principles of Optics*, 6th ed., Pergamon Press, 808 pp.
- ČERVENÝ, V., 1983, Synthetic body wave seismograms for laterally varying layered structures by the Gaussian beam method, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **73**, 389-426.
- ČERVENÝ, V., 1985a, The application of ray tracing to the numerical modeling of seismic wave fields in complex structures, in "Seismic Shear Waves, Part A: Theory", ed. by G. Dohr, Geophysical Press, 1-124.
- ČERVENÝ, V., 1985b, Gaussian beam synthetic seismograms, *J. Geophys.*, **58**, 44-72.
- ČERVENÝ, V., 1987, Ray tracing algorithms in three-dimensional laterally varying layered structures, in "Seismic Tomography", ed. by G. Nolet, D. Reidel Publishing Comp., 99-133.
- ČERVENÝ, V., L. KLIMEŠ and I. PŠENČÍK, 1984, Paraxial ray approximations in the computation of seismic wave field in inhomogeneous media, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **79**, 89-104.
- ČERVENÝ, V., L. KLIMEŠ and I. PŠENČÍK, 1988, Complete seismic-ray tracing in three-dimensional structures, in "Seismological Algorithms", ed. D. J. Doornbos, Academic Press, 89-168.
- ČERVENÝ, V., M. POPOV and I. PŠENČÍK, 1982, Computation of wave fields in inhomogeneous media—Gaussian beam approach, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **70**, 109-128.
- ČERVENÝ, V. and I. PŠENČÍK, 1983, Gaussian beams and paraxial ray approximations in three-dimensional elastic inhomogeneous media, *J. Geophys.*, **53**, 1-15.
- CHAPMAN, C. H., 1976, A first motion alternative to geometrical ray theory, *Geophys. Res. Lett.*, **3**, 153-156.
- CHAPMAN, C. H., 1978, A new method for computing synthetic seismograms, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **54**, 481-518.
- CHAPMAN, C. H., 1985, Ray theory and its extensions: WKBJ and Maslov seismograms, *J. Geophys.*, **58**, 27-43.
- CHAPMAN, C. H. and R. DRUMMOND, 1982, Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **72**, S277-S317.
- CLAERBOUT, J. F., 1985, *Imaging the Earth's Interior*, Blackwell, 398 pp.
- CORMIER, V. F. and P. SPUDICH, 1984, Amplification of ground motion and wavefront complexity in fault zones: examples from the San Andreas and Cala-

- veras Faults, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **79**, 135-152.
- DESCHAMPS, G. A., 1971, The Gaussian beams as a bundle of complex rays, *Electr. Lett.*, **7**, 684-685.
- DEY-SARKAR, S. K. and C. H. CHAPMAN, 1978, A simple method for the computation of body-wave seismograms, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **68**, 1577-1593.
- FERRA, V. and R. MADARIAGA, 1987, Seismic waveform modeling in heterogeneous media by ray perturbation theory, *J. Geophys. Res.*, **92**, 2697-2712.
- GAJEWSKI, D. and I. PŠENČÍK, 1987, Computation of high-frequency seismic wavefields in 3-D laterally inhomogeneous anisotropic media, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **91**, 383-411.
- HANYGA, A., 1986, Gaussian beams in anisotropic media, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **85**, 473-503.
- KARAL, F. C. and J. B. KELLER 1959, Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media, *J. Acoust. Soc. Am.*, **31**, 694-705.
- KLIMEŠ, L., 1984, Expansion of a high-frequency time-harmonic wavefield given on an initial surface into Gaussian beams, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **79**, 105-118.
- KOGELNIK, H., 1965, On the propagation of Gaussian beams of light through lens-like media including those with a loss or gain variation, *Appl. Opt.*, **4**, 1562-1569.
- LANDAU, L. D. and E. M. LIFSHITZ, 1975, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Pergamon Press, 402 pp.
- MADARIAGA, R., 1984, Gaussian beam synthetic seismograms in a vertically varying media, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **79**, 589-612.
- MADARIAGA, R. and P. PAPADIMITRIOU, 1985, Gaussian beam modeling of upper mantle phases, *Ann. Geophys.*, **3**, 799-812.
- NOWACK, B. and K. AKI, 1984, The 2-D Gaussian beam synthetic method: testing and applications, *J. Geophys. Res.*, **89**, 1466-1494.
- THOMSON, C. J. and C. H. CHAPMAN, 1985, An introduction to Maslov's asymptotic method, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **83**, 142-168.
- WEBER, M., 1988, Computation of body-wave seismograms in absorbing 2-D media using the Gaussian beam method: comparison with exact methods, *Geophys. J.*, **92**, 9-24.
- YOMOGIDA, K. and K. AKI, 1985, Waveform synthesis of surface waves in a laterally heterogeneous Earth by the Gaussian beam method, *J. Geophys. Res.*, **90**, 7665-7688.