深さが負にならない震源決定

東京大学地震研究所* 嶺 嶺 一 起

Hypocenter Determination with Non-negative Depth

Kazuki KOKETSU

Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Yayoi 1-1-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

(Received July 14, 1989; Accepted August 22, 1989)

Some techniques used in statistics, such as the variable change method, the penalty function method and the gradient projection method, are introduced to determine the location of a hypocenter with a definitely non-negative depth. Numerical simulations are carried out to compare the efficiency of them by using synthetic arrival time data for a four-station seismic array. They demonstrate that the penalty function method with a proper weight is the most efficient. However, if we take an improper weight, it may lead to a negative depth or an invalid solution. Since the variable change method and the gradient projection method do not have such arbitrariness, those can be implemented more easily into hypocenter determination processes operated routinely. The demonstration with real arrival time data shows that the variable change method as $z=h^2$ has practical efficiency.

§ 1. はじめに

震源決定は地震学分野のもっとも古典的な数値計算である。そのため、HYPO71 [LEE and LAHR (1972)] や HYPOINVERSE [KLEIN (1978)] などの標準プログラムが広く受け入れられている現状では、震源決定の数値計算としての手法はほぼ確立した段階にあると言えるだろう。たとえば最近の統計学の常識によれば [中川・小柳 (1982), LAWSON and HANSON (1974) などの教科書を参照], 最小自乗問題の安定化のためには束縛条件 (拘束条件) を付加するのが理にかなう、性能も良いということになっており、地震学分野への適用も試みられている [JACKSON (1979), TARANTOLA and VALETTE (1982) など]。しかし筆者の経験では、他の方法で信頼性の高い推定値が得られているような場合を除いて、これら標準プログラムが採用している修正ベクトルの縮小が、束縛条件の付加に比べ性能的に劣るということにはなかった。重要なのは、束縛条件がベクトル縮小かという二者択一ではなく、束縛の強さあるいは縮小の大きさを適切に選べるかである。束縛の場合には、どういう形の束縛条件を選ぶかも大きな問題である。

最近 LIENERT *et al.* (1986) は、観測方程式のセンタリング、スケーリングを伴った Adaptively Damped

Least Squares 法による彼らのプログラム HYPOCENTER が、深さの推定において HYPO71 や HYPOINVERSE より優れていると述べている。Damped Least Squares 法はよく知られるように、「解は初期値から大きく離れない」という束縛条件を与えた最小自乗法で、3次元構造の推定に広く用いられている [AKI and LEE (1976) など]。Adaptively とは、その場合の束縛の強さを走時残差に応じて変化させることを意味する。しかし筆者の実験によれば、HYPO71, HYPOINVERSE が深さ決定に良い結果を与えていないのは、LIENERT *et al.* (1986) が用いているような構造を既知とするシミュレーションでは、それらが深さをフリーにする条件が厳しすぎるためである。そのため HYPO71, HYPOINVERSE は簡単に深さを固定してしまい、正しい解を与えない。実データによる実験についても同様なことが言え、このことは LIENERT *et al.* (1986) の図面から明らかに読み取れる。

それでは束縛の強さ/ベクトル縮小の大きさの選択を除いて、震源決定アルゴリズムのすべてが解決済みであろうか。Table 1 は LIENERT *et al.* (1986) の TABLE 1 を元に、HYPO71, HYPOINVERSE 及び HYPOCENTER のアルゴリズムを比較したものである。これを見ると「負の深さ」の取り扱いについて、今まで深い考察がされていないことに気づく。どのアルゴリズムも、深

* 〒113 東京都文京区弥生 1-1-1

Table 1. Comparison of the algorithms of HYPO71, HYPOINVERSE and HYPOCENTER.

	HYPO71	HYPOINVERSE	HYPOCENTER
センタリング・スケーリング	あり	なし	あり
安定化	ベクトル縮小	ベクトル縮小	Adaptively Damped Least Squares
行列解法	簡略ドリトル法	QR 分解法	特異値分解法
深さの扱い	$ \Delta x^2 + \Delta y^2 > 10 \text{ km}$ の 時前段推定値に固定	$ \Delta x^2 + \Delta y^2 \geq 7 \text{ km}$ の 時前段推定値に固定	走時残差が繰り返し増加する 時前段推定値に固定
負の深さ	$ z + \Delta z /2$ に置き換える	$z/2$ に置き換える	前段推定値に戻り束縛を強くする
走時残差による重み	あり	あり	なし
Δ による重み	なし	あり	なし
走時残差増加の扱い	そのまま	前段推定値に戻る	前段推定値に戻り束縛を強くする

Fig. 1. An external penalty function (left) and an internal penalty function (right).

さが負になったらある値に置き換えるような対症療法しか行っていない。そこで本論文では、定式化本来の性質から深さが負にならないようにする震源決定のアルゴリズムについて考える。

2. 非負のための手法

震源決定に限らず、不等式の制約条件を満たしながら非線型最小自乗を実現する手法は、次の3つが考えられる。

- (1) 変数変換法
- (2) ペナルティ関数法
- (3) 勾配射影法

2.1. 変数変換法

震源の深さ z が $z \geq 0$ を満たさなければならないなら、 z をその制約条件を満たす関数形、たとえば

$$z = |w|, h^2 \text{ あるいは } e^d \quad (1)$$

に置き換えてしまうのが変数変換法である。方法として非常に明解でわかりやすく、従来の震源決定プログラムからの変更もやさしい。理論走時を T とすると、 T の助変数に関する偏微分係数は

$$\frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{w}{|w|}, \quad \frac{\partial T}{\partial h} = \frac{\partial T}{\partial z} \cdot 2h$$

$$\text{あるいは} \quad \frac{\partial T}{\partial h} = \frac{\partial T}{\partial z} \cdot z \quad (2)$$

とするだけで計算できる。欠点は、(1)式からわかるように問題の非線型性が強くなり、不安定になりやすいことである。そのため安定化を強くはかる必要がある。

2.2. ペナルティ関数法

ペナルティ関数とは、最適化問題の変数に与えられる制約を、束縛条件の形に変形したものである。ペナルティ関数には外点ペナルティと内点ペナルティの2種類がある [今野・山下 (1978)]。たとえば $z \geq 0$ を実現したいなら

$$\Phi(z) = |z|^\alpha \quad z < 0 \\ = 0 \quad z \geq 0 \quad (3)$$

が外点ペナルティ関数であり、 $\alpha \geq 1$ とする。この関数は Fig. 1 左側の形をしているので、 z が 0 より小さくなるほど値が大きくなる。そこで震源決定において、単なる走時残差の自乗和

$$S_0 = \sum_i (t_i - T_i(x, y, z) - t_0)^2 \quad (4)$$

を最小にするのではなく、 $\Phi(z)$ を付け加えて

$$S = S_0 + \lambda \Phi(z) \quad (5)$$

を最小にするよう変形する。ここで (x, y, z) と t_0 は震源座標と震源時、 t_i と T_i は i 番目の観測点における観測走時と理論走時である。また λ はペナルティ関数の重みを表わす。 $\Phi(z)$ は $z < 0$ では大きな値を取るのので、適切な λ のもとで S が正しく最小化されれば、 $z < 0$ にはならないはずである。

一方、制約 $z \geq 0$ に対する内点ペナルティ関数は

$$\Phi(z) = 1/z^\beta \quad z > 0 \quad (6)$$

と定義され、 $\beta > 0$ とする。これは Fig. 1 右側の形を取

り、 z が正の領域から 0 に近づくにつれ大きくなる。従って外点ペナルティ関数と同様、(5) を最小化すれば z は 0 以下にはならないはずである。

外点ペナルティ関数 (3) に比べると、(6) の方が能率がよい。(3) はいったん $z < 0$ に入ったものを $z \geq 0$ に追いつ込む形になるのに対し、(6) は $z = 0$ で無限大に発散するので、 $z \geq 0$ から始めれば、 $z < 0$ に入り込む危険性は少ない。領域内初期値が得られない場合、内点ペナルティ関数は利用できないが、震源決定では $z_0 > 0$ と置くだけでよいので問題にはならない。

ペナルティ関数法は適切な重み λ を選択できれば、安定で収束もよい。また $z \geq 0$ といった単純なものだけでなく、より複雑な制約にも適用でき拡張性も高い。しかし適切な λ は最適化問題の形式、データの品質などで異なり、普遍的な導出方法がない。大きすぎれば正しい解に到達せず、小さすぎれば制約が実現できない。今野・山下 (1978) にすれば、まず大きな λ で最適化を行ない、次にその解を初期値にして少し小さな λ で最適化を行うということをくり返せば、正しい解に収束するという。しかし震源決定のイタレーションの外側に、さらに λ のイタレーションを設けるとするのはあまりに冗長で現実的ではないだろう。

2.3. 勾配射影法

変数変換法やペナルティ関数法に比べ、勾配射影法は比較的単純である。たとえば、震源決定のあるステップの初期値が z の正領域にあったのに (Fig. 2 点 A)、計算結果の修正ベクトルを適用すると負領域に飛び出してしまう場合 (B)、修正ベクトルの正領域部分 (AC) 上でもっとも S_0 [(4) 式] を小さくする点 (D) を解とする。また、このような操作により初期値が $z = 0$ となり (A')、さらに修正ベクトルを適用した解も $z \leq 0$ となった時 (B')、

Fig. 2. Operations of the gradient projection method.

ベクトル全体 (A'B') が負領域に入ってしまう。この場合はベクトルを $z = 0$ 平面に投影し、投影ベクトル (A'C') 上で S_0 を最小にする点 (D') をこのステップの解とする。

今野・山下 (1978) は、こうした手続きである解に達した時、それは制約下の最適解のひとつであることを証明している。しかし、震源決定においては理論走時を計算して S_0 を求める部分がもっとも時間がかかるので、AC または A'C' 上で S_0 最小の点を探す [このような操作を直線探索 (Line Search) という] ため、 S_0 をくり返し計算することは現実的でない。そこで以下では、C あるいは C' を解とする方法を勾配射影法と呼ぶことにする。

たとえば $z < 0$ になった時 z をある値に置くといった簡略法に比べ、勾配射影法の特徴は、得られた修正ベクトルの情報をなるべく生かそうとする点にある。生かすことにより、イタレーションが本来の収束経路から大きくはずれておかしい解に達したり、収束が著しく遅くなるなどの障害を回避することを意図している。しかし A'B' のような場合に経路からはずれてしまうのはどうしようもないので、収束が悪くなったり不安定になりやすいのがこの方法の欠点である。

なお、 $z < 0$ から以後 z を固定して変数としない操作がよく行なわれるが、この方法において適当な条件で z を復活させるのが LAWSON and HANSON (1974) の Non-negative Least Squares である [MENKE (1984) の § 7.9 も同様]。Algebraic Reconstruction Technique における "trick" [HERMAN (1980)] は、簡略法の一つといえる。

3. シミュレーション

2 節で述べた 3 手法を比較するため、パソコン (PC-9801VX) 上で MS-FORTRAN Version 4.01 を用いてシミュレーションを行った。負の深さの扱い以外のアルゴリズムはなるべく HYPOCENTER のもの (Table 1) に従ったが、明らかに優れているものが他にある場合はそれを採用した (Table 2)。つまり、斎藤 (1983) など多くの人が指適しているように、最小自乗法の行列解法は観測行列の係数行列を QR 分解する方法が数値的に安定であり、特異値分解法により計算時間も短い。大きめのダンピング係数から始めれば係数行列が特異になることもないので、QR 分解法を用いることにする。また事前のテストでは、QR 分解法を用いる場合スケージングの効果はほとんどなかったの、スケージングは行なわずセンタリングのみ行なった。センタリングとは、観測方程式に震源時 t_0 が一次の形でしか含まれないのを利用

Table 2. Features of the algorithm used in simulations.

センタリング・ スケーリング	センタリングのみ
安定化	Adaptively Damped Least Squares
行列解法	QR 分解法
深さの扱い	常に自由
負の深さ	§2の手法を適用
走時残差による重み	なし
Δ による重み	なし
走時残差増加の扱い	前段推定値に戻り束縛を強く する

Fig. 3. Configuration of an epicenter and stations for the simulation.

して、正規方程式を t_0 について explicit に解いてしまい、見かけ上変数が x, y, z だけにする手法である [DRAPER and SMITH (1966)]. 震源時と深さの trade-off をみかけ上解消するために、もっとも簡便で有効な手法と思われる。さらに、深さの扱いでは3手法の違いを明確にするため、深さ固定などの操作を一切行なわなかった。

観測点配値は LIENERT *et al.* (1986) の NET1 array を採用した。Fig. 3 に示したように、これは正三角形の各頂点および重心に観測点を置いたものである。震源 (*) は重心より右上 60° の方向、 $\Delta = 50$ km, $z = 25$ km にある。2層構造を考え、厚さ 30 km の上層の P 波速度を 6 km/s、下層では 8 km/s、 V_p/V_s はともに 1.78 とする。P 波および S 波の観測走時は、理論走時にそれぞれ標準偏差 0.05 秒および 0.1 秒の正規乱数を与えて作った。また震源決定の初期値は、もっとも走時の早い観測点 (右上頂点) から x, y とともに 0.1 km ずれた位置の、深さ 15 km に置いた。ダンピング係数はやはり HYPOCENTER と同じく、初めて 0.005 とし走時残差が大きき

Fig. 4. The progression of simulation through the hypocenter determination process without remedy for negative depth.

Fig. 5. The progression of simulation through the hypocenter determination process with the variable change as $z = |w|$.

なれば 4 倍、小さくなれば 0.6 倍することとした。

Fig. 4 は、負の深さの対策を何もしなかった場合のイタレーションの経過を示したものである。左側はステップごとの震源の水平位置を、重心観測点を原点とする x, y 座標 (Fig. 3) で表わしてプロットしてある。また右側はステップごとの震源深さ z である。3 ステップ目で $z = -2.8$ km となり、計算の続行が不可能となる。

そこで変数変換法を適用し、 $z = |w|$ と変換した場合が Fig. 5 である。ここでは順調に正しい解に達している。ただし深さの収束はあまり速くなく、かなり暴れている。さらに $z = h^2$ と置換すると Fig. 6 となる。Fig. 5 に比べると水平位置は多少回り道しているが、深さの暴れ方は少ない。最後に $z = e^d$ の置換を行なうと Fig. 7 の通りになる。 $|w|$ や h^2 に比べて e^d の非線型性が強いので、第 1 ステップでひどくはずれた解になってしまい、収束も非常に遅くなっているが、正解には達している。

Fig. 8 から Fig. 10 は、ペナルティ関数法のイタレーション経過である。ペナルティ関数は内点ペナルティ関数 $1/z$ をとった。ペナルティの重み λ [(5) 式] を 2 とし

Fig. 6. The progression of simulation through the hypocenter determination process with the variable change as $z=h^2$.

Fig. 9. The progression of simulation through the hypocenter determination process with the internal penalty function $1/z$ and $\lambda=1$.

Fig. 7. The progression of simulation through the hypocenter determination process with the variable change as $z=e^d$.

Fig. 10. The progression of simulation through the hypocenter determination process with the internal penalty function $1/z$ and $\lambda=100$.

Fig. 8. The progression of simulation through the hypocenter determination process with the internal penalty function $1/z$ and $\lambda=2$.

Fig. 11. The progression of simulation through the hypocenter determination process with the gradient projection method.

た Fig. 8 では、正解に達しているだけではなく収束も速い、ところが $\lambda=1$ とした Fig. 9 では Fig. 4 とほとんど同じ経過をたどり、第 3 ステップで $z=-0.3$ km となった計算の続行が不可能となった。また $\lambda=100$ とすると

(Fig. 10) 収束状況は非常に落ち着いたものになるが、 $z=40$ km 付近で水平位置が振動してしまい正解には達しなかった。このように、シミュレーションでも、適切な重みを選択できれば安定で収束が速いが、重みが大き

すぎれば正しい解に達せず、小さすぎれば制約が実現できないという、ペナルティ関数法の欠点をはっきり現われた。

最後に勾配射影法のシミュレーションを Fig. 11 に示す。第3ステップで $z < 0$ となり、 $z = 0$ となる点で修正ベクトルを切断した。この切断によりイタレーションは収束経路をはずしてしまい、次のステップはひどく不安定で、 $z = 221$ km という深さに求まってしまっている。しかし、その後は順調に正解に達している。

4. ルーチン処理への適用

前節のシミュレーションから3手法の優劣、特にルーチン処理などの実際の現場での処理に適用した場合の優劣を考えてみる。そうした場合には計算時間がかかり過ぎる、手順が複雑過ぎるということは避けなければならないだろう。

シミュレーションの結果の中で、もっとも安定でしかも収束が速かったのは、 $\lambda = 2$ の時のペナルティ関数法である。しかし λ が2という最適値でなかった場合、 $z \geq 0$ が実現できなかったり正解に達しなかった。2という λ の最適値は前節のシミュレーションに限られるものであり、用いる構造、震源の位値、観測点の配置、読み取りの品質などで異なってしまう性質のものである。ある程度のデータが蓄積されていれば、それを用いて震源の位置や観測点の組み合わせに対する最適 λ を調べつくすことは可能であるが、かなりの作業となることが予想される。

一方、変数変換法と勾配射影法はペナルティ関数法ほどの性能を持たないが、こうした任意性がないので特別な準備なしに適用することができる。またどちらも、そのために必要な計算時間はほんのわずかである。両者のシミュレーション結果を比べてみると、 $z = |w|$ あるいは

h^2 とする変数変換法がもっとも安定な収束状況を示した。しかし、常にこれがもっとも安定であるとは限らない。関数形から見て、 $z = e^d$ より $z = |w|$ や h^2 の方が非線型性が小さく優れていると考えられるが、現実のデータによるテストでは、変数変換法自体と勾配射影法との優劣はつけがたかった。ただ勾配射影法には、何回射影しても z が負になってしまう可能性も残されているが、変数変換法は確実に $z \geq 0$ としてくれる。また勾配射影法は、負の深さの扱いとして従来用いられてきた方法とよく似かよっているのに比べ、変数変換法はこれまでで用いられることが少なかったので、その意味で試してみる価値があると考えられる。

地震予知観測情報ネットワークにおけるリアルタイム地震データの統合処理[額額・他(1989)]には、 $z = h^2$ の変数変換法を採用した。Fig. 12は、その処理プログラムを1987年3月10日の福島県沖の地震(気象庁マグニチュード5.6)に適用した例である。Fig. 13の観測点におけるP波の自動処理読み取りを用いて震源決定を行った。自動処理は東北大学理学部地震予知・噴火予知センターのシステム[長谷川・他(1986)]によるものである。初期値は 36°N , 141°E 、深さ25 kmとした。福島県沖はもともと深さが負になりやすい地域であるが、ネットワークの状況によりFig. 13のように観測点が北に片寄った場合には、特にその傾向が強い。Fig. 12で実線は初めから $z = h^2$ とおいた場合で、点線は変数変換なしで始めて、深さが負になった段階(図中の Δ)で $z = h^2$

Fig. 12. The progression of hypocenter location for real travel time data through the hypocenter determination process with the variable change as $z = h^2$.

Fig. 13. Map of the university stations where the March 10, 1987 earthquake ($M_{JMA}=5.6$) was observed. Small and large circles indicate the initial guess and the final solution of its epicenter.

と置換する場合の収束状況を示している。前者では z が比較的安定であるが、水平位置は少々暴れており、後者はその逆の傾向を見せている。両者とも最終的にはほぼ同じ位置に収束するが、後者の方がやや収束が速い。

5. 結 論

深さを負にしないで震源決定する方法として、統計学などで用いられている変数変換法、ペナルティ関数法、勾配射影法を導入し、その優劣をシミュレーションで検討した。シミュレーションでは深さの取り扱いを除いて基本的に LIENERT *et al.* (1986) のアルゴリズムを採用して同一条件とし、観測点配置などは LIENERT *et al.* (1986) が用いたものをそのまま採用した。特別な対策を施さないで震源決定をした時、深さが負になってしまうような震源に対してシミュレーションを行った結果、適切な重みを与える場合のペナルティ関数法がもっとも安定で収束が速かった。しかし重みが適切でなかった場合、ペナルティ関数法では $z \geq 0$ が実現できなかったり正解に達しないということが起こった。ルーチンの震源決定ではこうした任意性はできるだけ避けたいので、変数変換法や勾配射影法の方が導入しやすい。これらの中では $z = |w|$ あるいは h^2 とおく変数変換法がもっとも安定であった。後者を実際のデータに適用した場合でも良い結果を得た。

負の深さというのは、用いた構造、観測点配置、読み取り精度などが適切でないことを示すから、 $z = 0$ などにおいて、そうなったことを明示した方がよいという考え方もある。しかしそうした場合でも、 $z \geq 0$ という物理的条件を満たした上で走時残差の自乗和を極小とする解は、情報として意味があると筆者は考えている。

最後にここで述べた3手法とも、震源決定に限らず、最小自乗法を用いるすべての最適化問題に適用可能であることを調強しておきたい。YOSHIDA (1988) は震源過程の波形インバージョンにおいて、くい違い量を非負とするため $\beta = 1$ の内点ペナルティ関数法を用いている。

謝 辞

吉田真吾博士（東京学芸大）には変数変換法に関し、重要な指摘をいただきました。また尾形良彦博士（統数研）と宮武隆博士（東大地震研）にはいろいろご教授いただきました。Fig. 12 及び Fig. 13 の例では、東北大学地震予知・噴火予知センターの自動処理結果を利用させていただき、長谷川昭教授を初めとする同センターの

スタッフの方々に感謝致します。

文 献

- AKI, K. and W. H. K. LEE, 1976, Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic array using first P arrive times from local earthquakes. 1. A homogeneous initial model. *J. Geophys. Res.*, **81**, 4381-4399.
- DRAPER, N. R. and H. SMITH, 1966, *Applied Regression Analysis*, John Wiley & Sons, New York (中村慶一(訳), 1968, 応用回帰分析, 森北出版, 378pp.).
- 長谷川昭・海野徳仁・山本 明・高木章雄, 1986, 微小地震観測網データの自動処理システム, *地震* **2**, **39**, 381-395.
- HERMAN, G. T., 1980, *Image Reconstruction from Projections*, Academic Press, New York, 316pp.
- JACKSON, D. D., 1979, The use of *a priori* data to resolve nonuniqueness in linear inversion, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **57**, 137-157.
- KLEIN, R. W., 1978, Hypocenter Location Program HYPOINERSE Part I: Users Guide to Versions 1, 2, 3 and 4, U. S. Geol. Surv. Open-File Rept. 78-694.
- 嶺嶺一起・鷹野 澄・坪井誠司・宮武 隆・阿部勝征・荻原幸男, 1989, 地震予知観測情報ネットワークにおけるリアルタイム地震データの統合処理, 地震研究所彙報, 投稿中.
- 今野 浩・山下 浩, 1978, 非線型計画法, 日科技連出版社, 354 pp.
- LAWSON, C. L. and R. J. HANSON, 1974, *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 340 pp.
- LEE, W. H. K. and J. C. LAHR, 1972, HYPO71: A computer program for determining hypocenter, magnitude, and first motion pattern of local earthquakes, U. S. Geol. Surv. Open-File Rept. 75-311.
- LIENERT, B. R., E. BERG and L. N. FRAZER, 1986, HYP-CENTER: An earthquake location method using centered, scaled, and adaptively damped least squares, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **76**, 771-783.
- MENKE, W., 1984, *Geophysical data analysis: Discrete inverse theory*, Academic Press, New York.
- 中川 徹・小柳義夫, 1982, 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版会, 206pp.
- 斎藤正徳, 1983, 最小二乗法の計算法, *物理探鉱*, **36**, No. 2, 24-38.
- TARANTOLA, A. and B. VALETTE, 1982, Generalized nonlinear inverse problems solved using the least-squares criterion, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **20**, 219-232.
- YOSHIDA, S. 1988, WAVEFORM inversion for rupture processes of two deep earthquakes in the Izu-Bonin region, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **52**, 85-101.