総合報告

近地地震波の伝播に関する理論

東京大学地震研究所*¹ 額 額 一 起

大林組技術研究所*² 竹 中 博 士

Review: Theories on Wave Propagation in the Near Field of Seismic Sources

Kazuki KOKETSU

Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Yayoi 1-1-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

and Hiroshi TAKENAKA

Ohbayashi Corporation Technical Research Institute, Shimokiyoto 4-640,

Kiyose-shi, Tokyo 204, Japan

(Received July 7, 1989; Accepted October 2, 1989)

We review recent theoretical studies on wave propagation in the near field of seismic sources. These include theories for horizontally layered media as well as those for irregularly layered media. Ray theory and its extensions are easily applied to arbitrarily inhomogeneous media, but they include serious approximations. The finite difference method is also flexible, but requires extensive computation. Except for these methods, we should note that all the methods currently available for irregularly layered media belong to the category of the method of weighted residuals.

§ 1. はじめに

近地 (near-field) の明確な定義は明らかでないが、筆者の経験では震源近傍から震央距離 200~300 km 程度までを指すことが多いようである。近地がそれと遠くと区別される理由は二つあり、第一にいわゆる遠地近似 (far-field approximation) が成立しないことが予想されること [実はそうでもない, WANG and HERRMANN (1980) 参照]。第二に地球が球である効果が無視できる範囲であることである。従って近地地震波を理論的に合成する場合、デカルト座標あるいは円筒座標を用いて、弾性体運動方程式をある程度厳密に解く必要がある。

ここではその解法について、水平成層構造と不規則成層構造に分けて解説する。特に 80 年代に入って大いに発展した後者のための理論については、数値計算分野における分類に従って統一的に整理することを目標とする。なお後者に関しては、観測も含めて AKI (1988) も詳

しいことを付記しておく。

§ 2. 水平成層構造のための理論

弾性媒質が均質 (homogeneous), 等方的 (isotropic) である時, その微小変位 $\mathbf{u}$ に対する運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

で与えられる。ここで ρ は媒質の密度, λ, μ は Lamé の弾性定数, $\mathbf{f}$ は媒質の単位体積に働く体積力 (body force) である。Helmholtz の定理により $\mathbf{u}$ と $\mathbf{f}$ をスカラーポテンシャル, ベクトルポテンシャルを用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0 \\ \mathbf{f} &= \nabla \Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Psi} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

と置き換えると, ϕ と $\boldsymbol{\psi}$ は波動方程式 (wave equation)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} &= \frac{\boldsymbol{\Psi}}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \end{aligned} \quad (3)$$

*¹ 〒113 東京都文京区弥生 1-1-1

*² 〒204 東京都清瀬市下清戸 4-640

を満たす [証明はたとえば AKI and RICHARDS (1980) § 4.1.1 を見よ]. ここで α, β は P 波及び S 波速度である. 点震源 (point source) が原点にあり, その時間依存が $e^{i\omega t}$ である時, つまり $\Phi/\rho, \Psi_j/\rho = \delta(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ ならば境界条件なしの (3) の解は

$$\phi, \psi_j = \frac{1}{4\pi c^2 R} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)\right], \quad c = \alpha, \beta \quad (4)$$

となる [AKI and RICHARDS (1980) § 4.1, ただし指数部の符号は PAPOULIS (1962) によった]. この解は, 振幅が震源からの距離 R の逆数で減衰し, かつ位相は R/c で変化していく球面波を表わす.

(4) の解は, 地下構造が震源を中心とした球座標で表現される時便利であるが, そうした問題設定は稀である. 地下構造の第一近似としては水平成層構造を考えるのが一般的であるから, そうした場合, (4) から係数と時間項を除いた部分を Weyl の積分表示により

$$\frac{1}{R} \exp\left[-i\omega \frac{R}{c}\right] = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik_x x + ik_y y - i\nu |z|)}{i\nu} dk_x dk_y \quad (5)$$

と平面波に分解するか, Sommerfeld の積分表示により

$$\frac{1}{R} \exp\left[-i\omega \frac{R}{c}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{k J_0(kr) \exp(-i\nu |z|)}{i\nu} dk \quad (6)$$

と円筒波に分解することが行なわれる. ここで k_x, k_y, k は水平方向の波数 (wavenumber) を表わし,

$$\nu = \sqrt{\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad \text{or} \quad \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} \quad (7)$$

は z 方向の波数を表わす. きちんと点震源を考慮する場合は (6) が, 工学的応用のように線震源や平面波入射で代用する 2 次元問題では (5) を y 方向対称で単純化した

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ikx - i\nu |z|)}{i\nu} dk \quad (8)$$

が便利である.

2.1. propagator 行列

ポテンシャルの解として (8) を用いれば, その微分形である変位も

$$u_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_i^1(k, z, \omega) e^{ikx} dk \quad (9)$$

となっているので, たとえば $z=h$ での変位連続の境界条件は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_i^1(k, h, \omega) e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_i^2(k, h, \omega) e^{ikx} dk \quad (10)$$

という Fourier 変換型の積分方程式になる. (10) は任意の x で満足される必要があり, かつ変換のオペランドである $\tilde{u}_i^1, \tilde{u}_i^2$ は x によらないので, (10) は自明な解

$$\tilde{u}_i^1(k, h, \omega) = \tilde{u}_i^2(k, h, \omega) \quad (11)$$

しか持たない, つまり本来 (9) の積分形式が解であるが, 水平成層構造における境界条件ではオペランドの部分のみ考慮すればよいことになり, 解析的な演算で済ませることができる. たとえば二次元構造における境界条件のマッチングは簡単な行列演算でできることが THOMSON (1950) により示され, HASKELL (1953) が地震学分野に紹介した. この行列は後に, より一般的な propagator 行列の一種であることが, GILBERT and BAKUS (1966) によって示されたが, 紹介者の名をとって HASKELL 行列と呼ばれることが多い. (6) の円筒波による定式化でも同じ propagator 行列が使えことは, HARKRIDER (1964) により示された. その後 HASKELL (1964) や FUCHS (1968a) が別の形式の propagator 行列を提案しているが, 独立変数のとり方により微妙に異なるだけで HASKELL (1953) のものと本質的な違いはない. ただしポテンシャルと変位, 応力を直接結びつけているという意味で, FUCHS (1968a) の定義が一番見通しがよいということと言える. また層内で速度や密度が z 方向に変化する場合の propagator 行列も KENNETT and ILLINGWORTH (1981) などによって研究されている.

さて, 媒質が多数の水平層を持っていたとしても, 隣あった層の変位・応力やポテンシャルは propagator 行列を用いて関係づけることができるので, その関係を連続的に適用すれば最下層のポテンシャルで自由表面の変位・応力を表現することができる. たとえばカップリングの生じない SH 波では, この関連づけは 2 元の連立 1 次方程式となる. 変数のうち自由表面の応力は常に 0 であり [応力解放条件 (stress-free condition)], 最下層内に震源を考えないとすると, そこでは上向きの波を表わすポテンシャル (5), (6), (8) で $e^{i\nu z}$ をとるもの) はあり得ない [放射境界条件 (radiation condition)]. 従って未知数は自由表面上の変位と最下層内の下向きポテンシャルの 2 つとなり, この連立方程式は解けることになる. 通常我々が欲しいのは解として得られる表面変位であるが, 媒質内の変位や応力もこれに propagator 行列を掛け合わせるにより容易に得られる.

以上のような propagator 行列による解法では, 数値計算上困ったことがひとつ起こる. (7) で定義される z 方向波数 ν は, $\omega/c < k$ となって根号内が負になった時, 最下層の下向きポテンシャルが $z=\infty$ で発散しないように $\text{Im}(\nu) < 0$ になるようにとられる. 一方, 最下層以外の層内では上向きポテンシャルが存在するので, propagator 行列は $e^{+i\nu d}$ (d は層の厚さ) という項を持っており, さらに P-SV 波の行列演算には $e^{+i\nu d} \times e^{+i\nu d}$ という計算も現れる. $\omega/c < k$ の時この項は

$$e^{+|v|d} = e^{+\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}d} \quad (12)$$

という指数関数となり、 k あるいは d が大きい時桁あふれ (overflow) を起こしやすい。つまり $k = 2\pi \times (\text{周波数}) / (\text{位相速度})$ であるので、高い周波数、遅い位相速度の波が厚い層を通過するような問題は事実上計算不能となる。

こうした障害を避けるため、まず P・SV 波で $e^{+ivd} \times e^{+ivd}$ が現れないようにする工夫が DUNKIN (1965) により考え出された。彼の delta matrix extension (minor matrix technique) では 4×4 であった propagator 行列が 6×6 に拡大する。WATSON (1970) はこれを 5×5 で済ませる定式化を与えた。HASKELL (1964) や FUCHS (1968a) の propagator 行列に対する WATSON の定式化は WANG and HERRMANN (1980) と KIND (1976) が与えている。この定式化でも依然として $e^{+|v|d}$ は残っているので、propagator 行列そのものよりは小さいにしろ桁あふれの危険は残っている。この危険をさらに小さくするため、HARVEY (1981) は解の分母に関係する項と分子に関係する項を同じ係数で割るという正規化 (normalization) の方法を考え出した。現状では propagator 行列を直接に用いる解法において、これがもっとも危険性が少ない。

しかし非常に少ないにしろ危険性は残っており、これをも回避するためには行列そのものの定義を変えなければならない。KENNETT (1974) は propagator 行列を反射及び透過係数と、層内の伝播を表現する位相項に分離した。さらに KENNETT and KERRY (1979) は演算を上向きポテンシャルに関係する部分と下向きポテンシャルに関係する部分に分けて、伝播の効果は常に前進方向へ演算を進めることで e^{+ivd} を完全に回避することに成功した。ABO-ZENA (1979) や LUCO and APSEL (1983) も KENNETT (1974) と同様の定式化を述べている。その後目立った論文は出ていないので、KENNETT and KERRY (1979) の reflection 行列が水平成層構造における行列演算の最終解答と言えるだろう。ただしこの方法の演算は、propagator 行列によるものより複雑化することに注意しなければならない。

応用数学の立場から見れば、水平成層構造の問題は 2 階偏微分方程式 (3) の 2 点境界値問題 (境界条件は応力解放条件と放射境界条件) である。2 点の間は水平層であり、各層は境界面での変位・応力連続の境界条件で接続されている。従って、ここで層ごとのポテンシャルをすべて独立変数として扱って、すべての境界条件を連立方程式として書き下し、それを一挙に解くということもできる。これが SCHMIDT and TANGO (1986) の global

行列法である。係数行列である global 行列はスパースな形式であるので、種々の数値計算上の手法を適用できる。また実際に連立方程式を解く時、partial pivoting を伴った Gauss の消去法を用いれば、桁あふれの問題は自動的に回避できると言われる。

global 行列は水平成層問題に関するすべての運動方程式や境界条件を含んでいる。この行列に数値計算における Shooting 法の forward marching アルゴリズムを適用し、漸化式に展開したものが propagator 行列に他ならない。また global 行列に解析的に Gauss の消去法を適用すれば、reflection 行列に展開される。後者の展開法を shooting 法に対して invariant imbedding 法 (不変埋め込み法) と呼ぶようである [CHIN *et al.* (1984)]. 従って、数値的に pivoting 付き Gauss の消去法を適用した global 行列法が安定であることはおよそ理解できる。

2.2. 波数積分 (近似解法)

前節で水平成層構造の境界条件は、(9) の積分変換形式で表わされる変位・応力において、そのオペランドのみ考慮すればよいと述べた。逆に考えるとこのことは、propagator 行列等で得られる解も、(9) における無限領域の波数積分を実行して逆変換しなければ、変位や応力そのものは得られないことを意味する。さらに震源の時間依存も $e^{i\omega t}$ としか考慮していないから、これに適切な時間関数のスペクトルを掛け合わせ Fourier 逆変換しなければならない。行列演算の導入でオペランドが容易に計算できるのに比べ、この波数積分を解析的に実行することは非常に困難を伴う。もっとも単純な構造といていい半無限媒質でも、積分の解析的実行の研究は LAMB (1904) に始まり、CAGNIARD (1939), DE HOOP (1960) といった泰斗を経て KAWASAKI *et al.* (1973) においてようやく完成を見たに過ぎない。実に 70 年という年月を要している。まして多層構造となるとその困難さは火を見るより明らかで、大幅な近似を行なうか、数値的な方法に頼らざるを得ない。

地震の問題も支配する方程式が波動方程式 (3) であるので、もっとも強い近似としては光学における波線理論 (ray theory) を適用することが考えられる。体積力なしの運動方程式 (1) に、走時間数 $\tau(\mathbf{x})$ を用いた変位の波線展開

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega(t - \tau(\mathbf{x}))} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})(-i\omega)^{-k} \quad (13)$$

を代入して ω^2 の項を集め、 $\nabla\tau$ と内積あるいは外積をとると

$$\begin{aligned} ((\nabla\tau)^2 - 1/\alpha^2)(\mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla\tau) &= 0 \\ ((\nabla\tau)^2 - 1/\beta^2)(\mathbf{u}^{(0)} \times \nabla\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

という第0近似の連立方程式になる。この解は

$$\begin{aligned} (\nabla\tau)^2 &= 1/\alpha^2, \quad \mathbf{u}^{(0)} \times \nabla\tau = 0 \\ (\nabla\tau)^2 &= 1/\beta^2, \quad \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla\tau = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

となり、上式が縦波 (P 波)、下式が横波 (S 波) を表わす。アイコンアル方程式 $(\nabla\tau)^2 = 1/c^2$ を解く、いわゆる波線追跡 (ray tracing) は水平成層構造の場合、非常に容易である。また振幅項 $\mathbf{u}^{(0)}$ の計算も幾何減衰 (geometrical spreading) に境界面の反射・透過係数を考慮するだけでよく、波数積分を実行する必要はまったくない。方程式が位相ごとに分離してしまうので、どの位相を取り入れるかの選択が面倒であるが [Hron (1972)], 高周波の第0近似にしては意外に精度のよい解が高速に得られ、head wave も波線展開の $k=1$ までとることにより計算可能である [ČERVENÝ and RAVINDRA (1971)]. しかし、コンピュータの発達で以下に述べる、より exact に近い手法が容易に実行できる現在では、水平成層構造で波線理論が用いられることはごく稀である。

波線理論の精度を一段高めたものに generalized ray theory (あるいは exact ray theory, 以下では GRT と略す) と呼ばれる手法がある。[HELMBERGER (1968), MÜLLER (1968)]. GRT では運動方程式をいきなり波線展開するのではなく、(9) のオペランドを多項式展開する。たとえば Fig. 1 のような P 反射波の上下動変位の場合、オペランドは

$$\begin{aligned} \ddot{u}_z &= \frac{\partial}{\partial z} \\ &\times \left[S(k, z) T_{12} R_2 T_{21} \exp(-2i\nu_a^1 d_1 - 2i\nu_a^2 d_2) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

となる。ここで $S(k, z)$ は震源項、 T_{ij} は i 層から j 層への透過係数、 R_i は第 i 境界面での反射係数、 ν_a は (7) で $c=\alpha$ とおいた場合の ν である [証明は KENNETT (1974) 参照]。こうした形式のオペランドでは、半無限媒質の CAGNIARD-DE HOOP の方法と同じように Fourier 変換 (Hankel 変換) を Laplace 変換に置き換え、積分路を Cauchy の定理を用いて変更することにより、ほぼ解析的に波数積分が実行できる。(16) は反射波そのものだけ

Fig. 1. An example of the generalized ray in a two-layer structure. This corresponds to a reflected P-wave.

でなく、それに関連した head wave などの非実体波も含んでいるので、重複反射波を重ね合わせることで表面波を表現することもできる。ただし波線理論と同じく位相の選択に任意性が常に残り、重要な位相を忘れてしまえば正しい波形が得られないのが欠点である。

このほか GRT の関連では、波数積分の方法として CAGNIARD-DE HOOP 法ではなく、WKBJ 近似 (量子力学の WKB 近似に同じ) を利用する方法があり、それによる解を WKBJ seismogram と呼ぶ [CHAPMAN (1978)]. この方法は GRT より高速であるだけでなく、転回点 (turning point) を持たないなら速度などが z 方向に連続的に変化する層にも適用できる。また波数積分より時間領域の Fourier 逆変換を先に実行する slowness method (逆は spectral method という) であるので、中間出力も τ - p 分析可能な有意な結果となるなどの利点がある。プログラム・パッケージも出回っているが、なぜか利用されることは少ないようである。WKBJ seismogram の WKBJ 近似を Langer 近似に置き換え、転回点も取り扱えるようにした手法は、full wave theory という少々奇妙な名で呼ばれる [CORMIER and RICHARDS (1977)]. この手法は球座標に適用され、主に core phase の計算に利用された。

2.3. 波数積分 (数値解法)

波数積分を解析的に行なうのが困難なら、数値的に実行してしまえというアイデアは、簡単に思いつきそうだが、コンピュータの進歩もからんでかなりコロブスの卵の要素を持っている。簡単な2層構造に対して初めてこれを実行し、時間領域の合成波形を得たのは PHINNEY (1965) であり、(6) のポテンシャルを用いた多層構造の点震源問題に適用したのが FUCHS (1968b) である。残念なことだが、後者は米英以外の雑誌に掲載されたため、ほとんど忘れられた存在になっている。その後、GRT による波形との比較も含め、詳細な報告が FUCHS and MÜLLER (1971) によりなされた。彼らは地殻及び上部マントルの構造解析を目的としていたため、地下構造の浅部には (16) と同様の近似を適用している。これにより彼らのオペランドは、解析対象からの reflectivity (一般化された反射係数) と解釈される形をとり、そのため彼らは自らの手法を reflectivity 法と呼んだ。浅部における近似は KIND (1978) によってとり除かれ、現在では完全な合成波形が計算できるようになっている。

(5) の形のポテンシャルを用いた計算は BOUCHON (1979) により行なわれている。(5) は (6) に比べて無限積分がひとつ多いので不利のように見えるが、デカルト座標を用いているので有限断層モデルの断層面積が解析的にできる利点がある。また FUCHS and MÜLLER

(1971), KIND (1978), BOUCHON (1979) がともにオペランドの計算には propagator 行列を用いているのに対して, reflection 行列を用いた計算は KENNETT (1980) が行った。

数値的に波数積分する際問題になるのは, 積分路である実軸上に存在する表面波極である「表面波極に伴う波数積分の数学上の問題については今井 (1981) を参照」.

これを回避する方法はすでに PHINNEY (1965) が発見しており, 角周波数 ω に

$$\omega = \omega_R - i\omega_I \quad (17)$$

という形で負の虚数部を与えると, 極は第 4 象限に移動して積分可能となる. ω_I の影響は, 得られた合成波形を $\exp(+\omega_I t)$ 倍するだけで取り除くことができる. また, 媒質に Q 値を与えて速度を複素数にすることでも同様な効果が得られる [KIND (1978)]. このほか CAGNIARD (1939) のように積分路を変更することも WANG and HERRMANN (1980) や SATO and HIRATA (1980) が行っている. その際, 積分自体は前節のように解析的にはできないので数値積分となるが, 変更された積分路の方が収束が速いという利点がある. さらに, 変更された積分路における表面波極の留数のみで, 波数積分を近似するというのも可能である [HARKRIDER (1964)].

この方法がよい近似であることは, KAWASAKI (1978) や SWANGER and BOORE (1978) により示された. また HARVEY (1981) はさらに近似を高めるため, 最下層に仮想的な高速度層を導入することを提案している.

(9) の形をした無限波数積分を数値的に実行するということは, 数値積分の台形公式を用いると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(k, z, \omega) e^{ikx} dk &\approx \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{\Delta k}{2} \\ &\times \left[\tilde{u}(k_n, z, \omega) e^{ik_n x} + \tilde{u}(k_{n+1}, z, \omega) e^{ik_{n+1} x} \right] \\ &\approx \Delta k \sum_{n=-N}^N \varepsilon_n \tilde{u}_i(k_n, z, \omega) e^{ik_n x} \\ k_n &= n \Delta k, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1/2 & \text{if } n = -N, N \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

と近似することに等しい. この近似式は $\Delta k = 2\pi/L$ とおけば, BOUCHON and AKI (1977a) がいう所の discrete wavenumber representation に他ならない. 両端の係数が $1/2$ だけ異なるが, 正しい波形が得られるように N を十分大きくとればその違いは問題にならない. 同様にポテンシャル (5), (6) による波数積分を台形公式で近似したものは, BOUCHON (1979, 1981) における discrete wavenumber representation に一致する. つまり discrete wavenumber 法とは, 波数積分を台形公式で数値積分することと等価であり, 数学的には正規化されてい

ない Fourier 展開や Bessel 展開に当る. 従って KIND (1978) と BOUCHON (1981) の間, あるいは KENNETT (1980) と YAO and HARKRIDER (1983) の間に本質的な違いはないと考えられる.

(18) のように波数の連続積分を離散化すると, FFT によるスペクトルの逆変換が有限時刻歴の繰返しとなるように, 空間領域にも同様の aliasing がもたらされる. この aliasing を物理的に解釈すると, (18) では間隔 L の震源の繰返し [BOUCHON and AKI (1977a)] に, ポテンシャル (5), (6) に対する数値積分では格子状の震源分布 [BOUCHON (1979)] や, 同心円状の震源分布 [BOUCHON (1981)] となる. FFT の aliasing を回避するために時刻歴の繰返し周期を調整するように, この空間 aliasing を回避するためには, 隣の仮想震源の影響が出ないように震源分布の繰返し周期を調整すればよい.

3. 不規則成層構造のための理論

成層構造の境界面が水平でない時, 2 節で解説した波数積分を解析的に実行しようとする試みは, ほとんど破綻する. 従ってわずかな例外を除いて, その解法は数値的なものにならざるを得ない.

3.1. 波数理論とその拡張

稀な例外である波線理論は波数積分をまったく含まないので, 成層構造と言わずあらゆる複雑な構造に適用できる. 振幅の計算は水平構造のように単純ではなく, ray tracing に沿って順次積算していかなければならない (いわゆる dynamic ray tracing) が, 優れたプログラム・パッケージが流通している [ČERVENÝ and PŠEŇČÍK (1984), ČERVENÝ *et al.* (1988)].

不規則構造における波線理論では, shadow (影) の発生や caustic (火面) での発散という新しい問題が出現する. 個々の問題に対してそれぞれ応急処置的対策が考えられているが [ČERVENÝ *et al.* (1977) 参照], それらを適用するには, 構造の中で問題が発生する箇所をあらかじめ知っていなければならないので, 一般的な解法とすることができない. しかし 80 年代に入って, caustic や shadow については定式化の段階でこれを回避する手法が提案され, これらは波線理論の本質的な拡張となっている.

波線理論では波線が観測点に shoot しなければ波形は計算できない (shadow), 逆に無数の波線が集中して幾何減衰が発散してしまっても計算できない (caustic). これを避けるには, 波のエネルギーが波線に集中していると単純に近似するのではなく, ある関数で周囲に分布していると考えればよい. その分布によるエネルギーの浸み出しが, shadow における回折波となる. また caustic においても浸み出しがあるため ray tube の

Fig. 2. Comparison of ray-theoretical seismograms (middle) and Gaussian-beam synthetic seismograms (bottom) for a simple block structure (top) (after ČERVENÝ [1983]).

幅が 0 にならず、その逆数である幾何減衰が計算可能となる [ČERVENÝ (1985)]. 通常エネルギー分布には Gauss 分布が使われるので、この手法は Gaussian beam 法と呼ばれている。Fig. 2 は shadow における Gaussian beam 法の理論波形を波線理論によるものと比べたもので、みごとに回折波が計算できている。ただし、エネルギー分布の幅をどのくらいにとれば良い近似になるかについては理論的背景がなく、たぶんに経験的に決定せざるを得ないのが欠点である。

また CHAPMAN and DRUMMOND (1982) は、波線に沿った空間座標で Fourier 変換した dynamic ray tracing が, caustic や shadow の問題を起こさない性質を利用して slowness スペクトルを求め、Maslov 近似で

逆変換する方法を提案した。この方法による解は Maslov seismogram と呼ばれている [CHAPMAN (1985)]. ただし 蓬田 (1989) は、彼らの方法と Gaussian beam 法に本質的な違いはないとしている。このほか SEN and FRAZER (1987) は Huygens の原理の一般的な表現である Kirchhoff の積分表示を用いて、波線理論の欠点を補うことに成功した。

どの方法も計算不能となるような問題は回避しているが、基本的に波線理論であるから、短波長近似、位相選択の困難さなど波線理論が本質的に抱える問題から解放されていない。しかし比較的長波長で重複反射が効くような問題も、オリジナルの波線理論や Gaussian beam 法がよい結果を与えている計算例がある [HONG and HELMBERGER (1978), NOWACK and AKI (1984), Fig. 4 参照]。

波線理論のような短波長近似では、一般に地震学より短い波長を扱う光学や電磁気学に一日の長がある。ここで挙げた手法はいずれも、これら分野から基本原理を借用したものである。

3.2. 差分法

波線理論の対極にあるのが、偏微分方程式のもっとも古典的かつ直接的な数値解法である差分法 (finite difference method) である。直接的であるから解き得る問題の規模はコンピュータの演算速度、メモリ量に左右されるが、また直接的である故に問題の性質によらず適用可能であり、ほぼ万能な「最終兵器」と言ってい。その歴史は長く、計算上の問題点はおおよそ調べつくされている。たとえば最新の成果では、空間微分を Fourier 変換で求める pseudo spectral method が効率が良いということになっている [KOSLOFF *et al.* (1984)].

従って地震波伝播に適用する場合に問題となるのは、伝播自体の計算よりも、むしろ地震学特有の震源、特に double couple 型の点震源をいかに導入するかの点にある。この問題に 2 次元差分法で対処するためには 2 つのアプローチがあり、まず YUAN *et al.* (1986) は円筒座標の運動方程式に差分法を直接適用することで解決した。また HELMBERGER and VIDALE (1988) と謝 (XIE, 1988) は、デカルト座標の差分法で計算された線震源の解に、ある関数をコンボリューションすることで近似的に点震源の解が得られることを示した。どちらの場合も 2 次元の計算しかしないので、得られる解は、媒質が震源を中心として同円心状に対称であるという仮定の上に成り立っている。これには少々抵抗感があるが、震源と観測点をむすぶ直線に対して横から回り込んでくる波は無視していると言い替えれば、それほど不自然な仮定ではない。どちらの手法も良い結果を与えており、特に

Fig. 3. Comparison of filtered records of the San Fernando earthquake (*heavy traces*) with finite-difference seismograms (*light*) (after VIDALE and HELMBERGER [1988]).

VIDALE and HELMBERGER (1988) は後者を用いて San Fernando 地震の強震動を再現し、他の研究者が決めた構造や震源モデルをそのまま用いているにもかかわらず、観測記録との驚異的な一致を見せた (Fig. 3).

3.3. 重み付き残差法

以下では波線理論や差分法以外のすべての手法を、数値計算における重み付き残差法 (method of weighted residuals) として分類することを試みる。関数 $u(x)$ の偏微分方程式 $L(u)=0$ と境界条件 $S(u)=0$ がある時、 u を 1 次独立な任意の関数群 $\phi_n(x)$ で

$$u(x) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x) \quad (19)$$

と展開する。それを $L(u)$ あるいは $S(u)$ に代入した時の残差が、ある重み関数の下で 0 になるよう a_n を決定するのが重み付き残差法である [たとえば FLETCHER (1984), FUNG (1965)]。ここで ϕ_n は試行関数 (trial function) と呼ばれる。運動方程式 (1) で時間依存 $e^{i\omega t}$ を仮定して

$$L(u) = \rho \omega^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u = f \quad (20)$$

とおけば、地震波伝播の問題もこの方法で解くことができる。時間依存を仮定せず (Fourier 変換せず)、時間項は差分法で解くということもよく行なわれる。重み付き残差法のアプローチは、地球の自由振動や表面波の問題に用いられる Rayleigh-Ritz の方法によく似ている (特に後述の Galerkin 法を用いる時)。しかし、エネルギーが保存されず変分原理が成り立たない問題にも適用できるので、より一般的であると言えるだろう。実際、放射境界を持った媒質では実体波がそこからどんどんもれていくので、エネルギー保存は成り立たない。

FINLAYSON (1972) や FLETCHER (1984) によれば、重み付き残差法は試行関数のとり方により、次の 3 つに分類される。

領域法 (domain method, interior method)

境界法 (boundary method)

混合法 (mixed method)

領域法では境界条件をすでに満足している試行関数を用い、内部領域における運動方程式の残差を 0 にする。これに対して境界法では、逆に運動方程式をすでに満足している試行関数を用い、境界面上で残差を 0 にする。しかし、境界条件あるいは運動方程式を満たす関数が、必ず発見できると保障されている訳ではない。そうした場合にはどちらも満たさない試行関数を用いて、運動方程式と境界条件の残差の和を 0 にすればよい。これが混合法である。

重み付き残差法では、たとえば領域法の残差を

$$\epsilon_k = \int w_k(x) L \left[\sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x) \right] dV \quad (21)$$

というように重み関数 w_k 付きで定義する。この重み関数には以下のような種類がある。

(a) 選点法 (collocation method)

$$w_k = \delta(x - x_k)$$

(b) 部分領域法 (subdomain method)

$$w_k = \begin{cases} 1 & \text{in } D_k \\ 0 & \text{outside} \end{cases}$$

(c) モーメント法 (method of moments)

$$w_k = x^{k-1}$$

(d) Galerkin 法 (Galerkin method)

$$u_k = \phi_k(x)$$

(e) 最小自乗法 (least-squares method)

$$w_k = \partial L / \partial a_k$$

ここで最小自乗法とはもちろん $\int L^2 dV$ を最小にするが、この積分を a_n で偏微分して、形式的には上の (e) に書かれた重み関数で定義できる。これらの w_k を未知数の数 N だけ用意して、 $\epsilon_k = 0$ の連立方程式を立てれば

a_n を求めることができる。(a)~(c)では w_k の数を N より大きくして、最小自乗法的に解いてもよい。どの重み関数が適切かは対象となる問題によるが、一般論として(d), (e)に近づくほど精度がよく [(d)と(e)は同程度, FLETCHER (1984)], (a)に近づくほど定式化がやさしいと言われる。主に利用されるのは、特徴がはっきりした選点法が Galerkin 法である。

構造が複雑になると Galerkin 法でも、非常に多数の試行関数を用意しなければ精度のよい解は求まらない。また多数の関数を用意できたとしても、高次になると性質が悪くなりやすく、不用意に適用すると連立方程式が悪条件になりやすい。そういう場合には、領域内でもある狭い範囲でしか値を持たない関数を考え、その範囲をいろいろ変えて試行関数とする方法がとられる。これを数値 Galerkin 法 (computational Galerkin method) と呼ぶ。領域を小さく分割して、ある範囲内では構造が大きく変化しないようにすれば関数は単純で済むが、未知数の数は増大する。逆に分割数を少なくすると、適切な関数を選ぶことが難しくなる。通常、数値 Galerkin 法では前者の立場をとり、1次関数やスプラインなどの低次多項式を関数形として採用する [これを形状関数 (shape function) という]。運動方程式(1)は2次微分を含むが、(21)では部分積分を実行することによりこれを避けることができるので [弱定式化 (weak formulation)], 1次関数も試行関数とすることができる。

有限要素法 (finite element method) は、数値 Galerkin 法で解かれる領域法である。これは工学分野で長年、非常に活発に利用されてきた歴史があって、理論的な問題はそちらの方ではほぼ解決がつけられており、地震学分野でも LYSMER and DRAKE (1972) や SMITH (1975) などの応用例がある。理論的課題としては差分法と同じく、動的問題への double couple 型点震源の導入が挙げられるが、GELLER *et al.* (1979) を除くと顧みられることは少ないようである。なお境界条件の中でも、応力解放条件のような「値が定められた」境界条件では、それを満たす低次多項式を見いだすのは容易であるが、放射境界条件を満たすものはまず存在しない。そのため有限要素法では放射境界を「値が定められた」境界に置き換えてしまっただけで解くが、これは人工的な雑音の原因となる。最近、大湊・他 (1989) は、運動方程式と放射境界条件の残差の和を0にする混合法のアプローチを採用すれば、低次多項式の試行関数で放射境界を含む問題が取り扱えることを示した。

3.4. 境界法

地球の構造を近似する場合、均質な層が不規則な境界面で区切られているというモデルは、多くの人々が持つ

地球のイメージから大きくかけ離れるものではないだろう。この場合、2節で述べたように層内の解は比較的容易に求まるので、境界条件を満足させるため、重み付き残差法の境界法のアプローチをとるのは自然な流れである。実際、70年代以降、一定の成果は得た AKI and LARNER (1970), SÁNCHEZ-SESMA and ESQUIVEL (1979), CAMPILLO and BOUCHON (1985), KAWASE (1988) などの手法は、境界法、あるいはそれに類するものと考えると理解しやすい。

これらのうち、AKI and LARNER (1970) によるものは純粋な境界法で、残りはいわゆる境界積分方程式法 (boundary integral equation method, 以下 BIEM) と境界要素法 (boundary element method, 以下 BEM) である。BIEMは単純に運動方程式の解で展開するのではなく、Huygensの原理の類推から不規則境界面による散乱 (scattering) を境界面上の震源分布に置き換え、それによる変位 (いわゆる Green 関数) で展開する。また BEM は Brebbia (1978) によれば重み付き残差法の定式化から直接導き出せる境界法ということになっているが、3.6項で述べるようにそう単純ではなく、厳密に言えば混合法に属する。試行関数と重み関数の意味あいも逆転しており、かなり変則的である (詳細は3.6項参照)。以上の分類に従い、前出の4論文を整理すると Table 1 になる。

3.5. AKI-LARNER 法

Fourier 展開された水平構造の解を試行関数にして、不規則境界面の境界条件をマッチングさせる方法は、もともと電磁気学の方で用いられていたようである。しかし、むしろ扱う周期帯が長い地震学に向いており、AKI and LARNER (1970) により紹介されてから活発に研究されて、現在では境界法の中でもっとも応用分野が広い手法である。

$z=h(x)$ という境界面があったとき、水平構造における解 (9) をそのまま用いるので、連続の境界条件は形式

Table 1. Boundary methods

著 者	試行関数	重み関数
AKI & LARNER (1970)	(1)の解の Fourier 展開	スペクトル 選点法
SÁNCHEZ-SESMA & ESQUIVEL (1979)	Green 関数	最小自乗法
CAMPILLO & BOUCHON (1985)	Green 関数の Fourier 展開	選点法
KAWASE (1988)	形状関数	Green 関数の Fourier 展開

上(10)と同じになる。しかし、不規則境界の場合そのオペランド $\hat{u}_i^{1,2}(k, h(x), \omega)$ は x によるので、水平構造のような自明な解は存在せず、直接に積分方程式(10)を解かなければならない。(10)の波数積分を(18)の形の Fourier 展開に置き換えると、

$$S = \sum_{n=-N}^N \hat{u}_i^1(k_n, h(x), \omega) e^{ik_n x} - \sum_{n=-N}^N \hat{u}_i^2(k_n, h(x), \omega) e^{ik_n x} = 0 \quad (22)$$

となる。これを

$$\int w_k S d\Sigma = 0 \quad (23)$$

で解けば、まさに重み付き残差法である。AKI-LARNER 法では重み関数 w_k として選点法を用いるが、単純な選点法ではない。(22)を未知数の数だけの波数で Fourier 展開して連立方程式を立てる方式で、スペクトル選点法(spectral collocation method)とでも呼ぶべきものである。この手法は境界の不規則性が強くない時、解くべき連立方程式の係数行列が対角に近くなり、数値的に安定であるという特徴を持っている。

また SÁNCHEZ-SESMA *et al.* (1982) は(18)の Fourier 展開のかわりに不規則領域を中心とした Hankel 関数や Bessel 関数で展開し、通常の選点法で解くという手法を提案している。この手法も AKI-LARNER 法とよく似た重み付き残差法と言えるだろう。

AKI and LARNER (1970) の原論文では平面波入射の問題が周波数領域のみで計算されていたが、BOUCHON (1973) により不規則自由表面の、BARD and BOUCHON (1980a, b) により不規則境界面の時間領域波形が計算された (Fig. 4)。多層構造へは KOHKETSU (1987a, b) により拡張され、その後、堀家 (1987) や GELI *et al.* (1988) も同様の定式化を示した。さらに多層構造で reflection 行列を用いることは、竹中 (1988, 1989) により行なわれている。3次元境界面への拡張も NIWA and HIROSE (1985) や上林・他 (1988) が行なっていると言われる。震源の導入では、まず BOUCHON and AKI (1977b) が線震源に対する周波数応答を求めた。線震源及び点震源による時間領域波形は、KOHKETSU (1987a, b) により求められた。

AKI-LARNER 法を語る時、常に Rayleigh ansatz error が問題となる。Fig. 4 のような構造を考えた場合、不規則境界面の下面は半無限であるので、試行関数は下向き成分しか持たない (これを Rayleigh ansatz という)。しかし境界面による散乱 (scattering) で上向きの波が出る可能は十分あるので、AKI-LARNER 法は近似的な解しか与えないという議論である。MILLAR (1969)

Fig. 4. Comparison of synthetic seismograms computed by various methods, *i.e.* the AKI-LARNER method (RF, AL), the Gaussian beam method (GB), the ray theory (ART), the finite element method (FE), and the finite difference method (FD). A simple basin structure (*top*) is adopted (after KOHKETSU [1987 b]).

によれば、波動場を Rayleigh ansatz に基づいて Fourier 展開すると、境界の不規則性が強くなった時、展開係数が定義できないような特異点が近傍に発生し、数学的には取り扱い困難となる状況が発生するようである。しかし、前述した定式化でわかるように重み付き残差法は非常に便宜的なものであり、数学的に困難だといっても必ずしも良い解を与えないということにはならない。また、従来は当然 Rayleigh ansatz error が大きいだろうと考えられていた半円形に凹んだ境界面による散乱の

問題も、下向きの波だけで表現できることが示されており [SÁNCHEZ-SESMA *et al.* (1989)], AKI-LARNER のアプローチは意外に広い適用範囲を持っていることが予想される。

3.6. 境界積分方程式法と境界要素法

Huygens の原理によれば、波は波面上のすべての点を波源とした 2 次波の重ね合わせで新しい波面を作るといふ。これから類推すれば、不規則境界面による地震波の散乱は、境界面上に置かれた震源群で表現できるはずである。運動方程式 (1) で時間依存 $e^{i\omega t}$ を仮定し $f=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^s)$ とした解を、(周波数領域の) Green 関数という。この Green 関数 $G(\mathbf{x}; \mathbf{x}^s)$ が解析的に求まれば、この表現は

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N a_n G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_n^s) \quad (24)$$

と置くことに等しい。これを用いて不規則境界の境界条件をマッチングさせる手法は、境界積分方程式法 (BIEM) と呼ばれる。ここでは直感に基づいて (24) の展開を求めたが、ポテンシャル論の Green の定理や弾性論の相反定理を用いれば、物理的・数学的背景を持って (24) を導出することもできる。

CAMPILLO and BOUCHON (1985) は (24) の Fourier 展開を試行関数とし、重み関数は選点法で線震源の問題を解いた。BOUCHON (1985) は不規則自由表面に平面波が入射する問題を解いている。また SÁNCHEZ-SESMA and ESQUIVEL (1979) は (24) の代わりに

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N a_n G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_n^s) \quad (25)$$

をそのまま用いて、最小自乗法で平面波入射の問題を解いた。ここで $u^0(\mathbf{x})$ は、不規則境界がない場合の (1) の解である。不規則構造が局在しているならば、(25) の方が収束がよいことは十分予想できる。後者の手法は DRAVINSKI (1982) や WONG (1982) にも用いられた。Green 関数をそのまま用いると逆変換が 1 回減って、その分計算が楽であるが、特異点のため境界面そのものに震源を置くことはできず、その近傍に置くことになる。どのくらい近傍にとるかは、数値計算上ひとつの問題となる。これに比べ CAMPILLO and BOUCHON (1985) のように Fourier 展開すると特異点はなくなり、こうした問題は起こらない。

境界要素法 (BEM) も最終的な定式化の物理的イメージは BIEM に近く、広義の BIEM と言うこともできる。Green の定理や相反定理から導出できる点も BIEM と同様である。BEM の試行関数は運動方程式も境界条件も満たさない形状関数を用いるので、重み付き残差法は境界法ではなく混合法

$$\int w_k^L(u(\mathbf{x})) dV + \int w_k^S(u(\mathbf{x})) d\Sigma = 0 \quad (26)$$

を用いなければならない。Green 関数を重み関数とした残差を定義し 2 回部分積分を実行すると、形状関数が一要素の場合

$$c^k u_q(\mathbf{x}_k) + \sum_{n=1}^N u_p(\mathbf{x}_n) \int H_{pq}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_k) d\Sigma_k = \sum_{n=1}^N t_p(\mathbf{x}_n) \times \int G_{pq}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_k) d\Sigma_k + \int f_p G_{pq}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_n) dV \quad (27)$$

となる [BREBBIA (1978)]. $u_p(\mathbf{x}_n)$, $t_p(\mathbf{x}_n)$ は n 番目節点 ($\mathbf{x}_n$) における変位と力の p 成分, $G_{pq}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_k)$ と $H_{pq}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_k)$ は k 番目節点 ($\mathbf{x}_k$) に q 方向の単位インパルスを与えた時の $\mathbf{x}$ における変位と力の p 方向成分 (つまり Green 関数) である。(27) の第 1 項と最後の項は運動方程式の残差を表わし、前者は Green 関数の特異点の効果 (係数 c^k は境界要素の形状により異なる)、後者は体積力による効果である。地震波伝播の問題の場合、Fourier 展開された Green 関数を用いると第 2, 3 項の積分は解析的にできるので、 $u_p(\mathbf{x}_n)$, $t_p(\mathbf{x}_n)$ に対する連立方程式を立てることができる [KAWASE (1988)]. 一要素ではあまり精度がよくない場合、形状関数の近似を 1 次、2 次関数と上げていくことにより BEM は精度を上げていくことができる。

4. おわりに

紙数の関係で異方性 (anisotropy) の問題には触れなかった。また不規則構造のための手法を水平構造に適用すること [たとえば ALEKSEEV and MIKHAILENKO (1980), SPUDICH and ASCHER (1983), OLSON *et al.* (1984)] について、あるいは構造を領域に分け領域ごとに別の手法を適用すること [いわゆるハイブリッド法、たとえば佐藤・他 (1986)] についても同様である。

今後の課題としては、より複雑な構造への適用や 3 次元構造などが考えられる。しかし地震波を弾性体の微小変位と見る限り、これらは現状の理論の延長線上で解決がつくと予想している。また理論の発展に比べコンピュータの性能向上の方が急速であるので、与えられた構造に対して波形を計算するだけの forward modeling に関しては、最終兵器 (差分法) をワークステーションやパソコンで振り回せば十分という時代が遠からず来ると思われる。従って我々が今後考えなければならないのは、MELLMAN (1980) 以後めだった成果の上がっていない逆問題 (与えられた波形から構造を求める、いわゆる waveform inversion) の定式化であろう。GELLER and OHMINATO (1989) はその口火として、地球規模の構造解析で用いられている固有関数による方法で定式化を行

なっている。

謝 辞

本報告執筆の機会を与えてくださった編集委員会の川崎一朗先生に感謝致します。R. J. ゲラー先生（東大理学部）には随所で重要な示唆をいただきました。特に末次大輔氏をまじえた重み付き残差法についての議論は有益でした。また川瀬博氏（清水建設）と関崇夫氏（大林組）には議論をいただいただけでなく、資料収集で協力いただきました。記して感謝致します。

文 献

- ABO-ZENA, A., 1979, Dispersion function computations for unlimited frequency values, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **58**, 91-105.
- AKI, K., 1988, Local site effects on ground motion, in *Earthquake Engineering and Soil Dynamics II-Recent advances in ground-motion evaluation*, J. L. Von Thun (ed.); Geotechnical special publication No. 20, 103-155, Am. Soc. Civil Eng., New York.
- AKI, K., and K. L. LARNER, 1970, Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane *SH* waves, *J. Geophys. Res.*, **75**, 933-954.
- AKI, K. and P. G. RICHARDS, 1980, *Quantitative Seismology: Theory and Methods*, W. H. Freeman and Co., San Francisco.
- ALEKSEEV, A. S. and B. G. MIKHAILENKO, 1980, The solution of dynamic problems of elastic wave propagation in inhomogeneous media by a combination of partial separation of variables and finite-difference methods, *J. Geophys.*, **48**, 161-172.
- BARD, P. Y. and M. BOUCHON, 1980a, The seismic response of sediment-filled valleys. Part 1. The case of incident *SH* waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **70**, 1263-1286.
- BARD, P. Y. and M. BOUCHON, 1980b, The seismic response of sediment-filled valleys. Part 2. The case of incident *P* and *SV* waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **70**, 1921-1941.
- BOUCHON, M., 1973, Effect of topography on surface motion, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **63**, 615-632.
- BOUCHON, M., 1979, Discrete wave number representation of elastic wave fields in three-space dimensions, *J. Geophys. Res.*, **84**, 3609-3614.
- BOUCHON, M., 1981, A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **71**, 959-971.
- BOUCHON, M., 1985, A Simple, complete numerical solution to the problem of diffraction of *SH* waves by an irregular surface, *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**, 1-5.
- BOUCHON, M. and K. AKI, 1977a, Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **67**, 259-277.
- BOUCHON, M. and K. AKI, 1977b, Near-field of a seismic source in a layered medium with irregular interfaces, seismic-source wave fields, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **50**, 669-684.
- BREBBIA, C. A., 1978, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London (神谷紀生・田中正隆・田中喜久昭 (訳), 1980, 境界要素法入門, 培風館).
- CAGNIARD, L., 1939, *Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives*, Gauthier-Villard, Paris (Flinn, E. A. and C. H. Dix (tr.), 1962, *Reflection and refraction of progressive seismic waves*, McGraw-Hill, New York).
- CAMPILLO, M. and M. BOUCHON, 1985, Synthetic *SH* seismograms in a laterally varying medium by the discrete wavenumber method, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **83**, 307-317.
- ČERVENÝ, V., 1983, Synthetic body wave seismograms for laterally varying layered structures by the Gaussian beam method, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **73**, 389-426.
- ČERVENÝ, V., 1985, Gaussian beam synthetic seismograms, *J. Geophys.*, **58**, 44-72.
- ČERVENÝ, V., L. KLIMES and I. PŠENČÍK, 1988, Complete seismic-ray tracing in three-dimensional structure, in *Seismological Algorithms*, D. J. Doornbos (ed.), Academic Press, London.
- ČERVENÝ, V., I. A. MOLOTKOV and I. PŠENČÍK, 1977, *Ray Method in Seismology*, Univerzita Karlova, Praha.
- ČERVENÝ, V. and I. PŠENČÍK, 1984, SEIS83-Numerical modeling of seismic wave fields in 2-D laterally varying layered structures by the ray method, in *Documentation of Earthquake Algorithms*, E. R. Engdahl (ed.), World Data Center (A), Boulder.
- ČERVENÝ, V. and R. RAVINDRA, 1971, *Theory of Seismic Head Waves*, University of Toronto Press, Toronto.
- CHAPMAN, C. H., 1978, A new method for computing seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **54**, 481-518.
- CHAPMAN, C. H., 1985, Ray theory and its extensions: WKB and Maslov seismograms, *J. Geophys.*, **58**, 27-43.
- CHAPMAN, C. H. and R. DRUMMOND, 1982, Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, S277-S317.
- CHIN, R. C. Y., G. W. HEDSTROM and L. THIGPEN, 1984, Matrix methods in synthetic seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **77**, 483-502.
- CORMIER, V. and P. G. RICHARDS, 1977, Full wave theory applied to a discontinuous velocity increase: The inner core boundary, *J. Geophys. Res.*, **43**, 3-31.
- DRAVINSKI, M., 1982, Scattering of *SH* waves by subsurface topography, *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, **108**, 1-17.
- DUNKIN, J. W., 1965, Computation of modal solutions

- in layered, elastic media at high frequencies, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **55**, 335-358.
- FINLAYSON, B. A., 1972, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York.
- FLETCHER, C. A. J., 1984, *Computational Galerkin Method*, Springer-Verlag, New York.
- FUCHS, K., 1968a, Das Reflexions- und Transmissionsvermögen eines geschichteten Mediums mit beliebiger Tiefen-Verteilung der elastischen Moduln und der Dichte für schrägen Einfall ebener Wellen, *Z. Geophys.*, **34**, 389-413.
- FUCHS, K., 1968b, The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density, *J. Phys. Earth, Special Issue*, **16**, 27-41.
- FUCHS, K. and G. MÜLLER, 1971, Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **23**, 417-433.
- FUNG, Y. C., 1965, *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (大橋義夫・村上澄男・神谷紀生 (訳), 1970, *固体の力学/理論*, 培風館).
- GELI, L., P. Y. BARD and B. JULLIEN, 1988, The effect of topography on earthquake ground motion: A review and new results, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**, 42-63.
- GELLER, R. J., G. A. FRAZIER and M. W. McCANN Jr., 1979, Dynamic finite element modeling of dislocations in a laterally heterogeneous crust, *J. Phys. Earth*, **27**, 395-407.
- GELLER, R. J. and T. OHMINATO, 1989, Calculating synthetic seismograms for vertically heterogeneous elastic media using the method of weighted residuals, 59th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys. Extended Abstract, in press.
- GILBERT, F. and G. BACKUS, 1966, Propagator matrices in elastic wave and vibration problems, *Geophysics*, **31**, 326-332.
- HARKRIDER, D. G., 1964, Surface waves in multilayered elastic media. I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **54**, 627-679.
- HARVEY, D. J., 1981, Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **66**, 37-69.
- HASKELL, N. A., 1953, The dispersion of surface waves in multilayered media, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **43**, 17-34.
- HASKELL, N. A., 1964, Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **54**, 377-394.
- HELMBERGER, D. V., 1968, The crust-mantle transition in the Bering Sea, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **58**, 179-214.
- HELMBERGER, D. V. and J. E. VIDALE, 1988, Modeling strong motions produced by earthquakes with two-dimensional numerical codes, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**, 109-121.
- HONG, T. L. and D. V. HELMBERGER, 1978, Glorified optics and wave propagation in nonplanar structure, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **68**, 1313-1330.
- DE HOOP, A. T., 1960, A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems, *Appl. Sci. Res.*, **B3**, 349-356.
- 堀家正則, 1987, 複数の曲った境界を有する減衰のある媒質の地震動応答計算法へのAL法の拡張とそれを用いた推積盆地の地震動の特性, *地震* **2**, **40**, 247-259.
- HORN, F., 1972, Numerical methods for ray generation in multilayered media, in *Methods in Computational Physics*, **12**, Academic Press, New York.
- 今井 功, 1981, *応用超関数I*, サイエンス社, 東京.
- 上林宏敏・堀家正則・竹内吉弘, 1988, 不規則境界面を有する三次元推積盆地の地震動 (その2), *地震学会講演予稿集*, **2**, C11.
- KAWASAKI, I., 1978, The near-field Love wave by the exact ray method, *J. Phys. Earth*, **26**, 211-237.
- KAWASAKI, I., Y. SUZUKI and R. SATO, 1973, Seismic waves due to a shear fault in a semi-infinite medium. Part I: Point source, *J. Phys. Earth*, **21**, 251-284.
- KAWASE, H., 1988, Time-domain response of a semi-circular for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**, 1415-1437.
- KENNETT, B. L. N., 1974, Reflections, rays and reverberations, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **64**, 1685-1696.
- KENNETT, B. L. N., 1980, Seismic waves in a stratified half space-II. Theoretical seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **61**, 1-10.
- KENNETT, B. L. N. and M. R. ILLINGWORTH, 1981, Seismic waves in a stratified half space-III. Piecewise smooth models, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **66**, 633-675.
- KENNETT, B. L. N. and N. J. KERRY, 1979, Seismic waves in a stratified half space, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **57**, 557-583.
- KIND, R., 1976, Computation of reflection coefficients for layered media, *J. Geophys.*, **42**, 191-200.
- KIND, R., 1978, the reflectivity method for a buried source, *J. Geophys.*, **44**, 603-612.
- KOHKETSU, K., 1987a, 2-D reflectivity method and synthetic seismograms in irregularly layered structures. I. SH-wave generation, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **89**, 821-838.
- KOHKETSU, K., 1987b, Synthetic seismograms in realistic media: A wave-theoretical approach, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **62**, 201-245.
- KOSLOFF, D., M. RESHEF and D. LOEWENTHAL, 1984, Elastic wave calculations by the Fourier method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **74**, 875-891.
- LAMB, H., 1904, On the propagation of tremors over

- the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. R. Soc. London*, **A203**, 1-42.
- LUCO, J. E. and R. J. APSEL, 1983, on the Green's functions for layered half-space. Part I, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 909-929.
- LYSMER, J. and L. A. DRAKE, 1972, A finite element method for seismology, in *Methods in Computational Physics*, **11**, Academic Press, New York.
- MELLMAN, G. R., 1980, A method of body-wave waveform inversion for the determination of earth structure, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **62**, 481-504.
- MILLAR, R. F., 1969, On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **65**, 773-791.
- MÜLLER, G., 1968, Theoretical seismograms for some types of point-sources in layered media. Part I: Theory, *Z. Geophys.*, **34**, 15-35.
- NIWA, Y. and S. HIROSE, Three-dimensional analysis of ground motion by integral equation method in wave-number domain, *Proc. 5th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics*.
- NOWACK, N. and K. AKI, 1984, The 2-D Gaussian beam synthetic method: testing and applications, *J. Geophys. Res.*, **89**, 1466-1494.
- 大湊隆雄・R. J. ゲラー・瀬戸山一, 1989, 重みつき残差法による波形計算法 II, *地震学会講演予稿集*, **2**, C86.
- OLSON, A. H., J. A. ORCUTT and G. A. FRAZIER, 1984, The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **77**, 421-460.
- PAPOULIS, A., 1962, *The Fourier integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York.
- PHINNEY, R. A., 1965, Theoretical calculation of the spectrum of first arrivals in layered elastic mediums, *J. Geophys. Res.*, **70**, 5107-5123.
- SÁNCHEZ-SESMA, F. J., M. CAMPILLO and K. IRIKURA, 1989, A note on the Rayleigh hypothesis and the AKI-LARNER method, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, in press.
- SÁNCHEZ-SESMA, F. J. and J. A. ESQUIVEL, 1979, Ground motion on alluvial valley under the incident plane *SH* waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **69**, 1107-1120.
- SÁNCHEZ-SESMA, F. J., I. HERRERA and J. AVILÉS, 1982, A boundary method for elastic wave diffraction. Application to scattering of *SH* waves by surface irregularities, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 473-490.
- SATO, R. and N. HIRATA, 1980, One method to compute theoretical seismograms in a layered medium, *J. Phys. Earth*, **28**, 145-168.
- 佐藤俊明・長谷川正幸・中井正一, 1986, 3次元薄層法と軸対象 FEM のハイブリッド法による運動学的断層モデル, *地震学会講演予稿集*, **2**, C75.
- SCHMIDT, H. and G. TANGO, 1986, Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **84**, 331-359.
- SEN, M. K. and L. N. FRAZER, 1985, Kirchhoff-Helmholtz reflection seismograms in a laterally inhomogeneous multi-layered elastic medium-II. Computations, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **82**, 415-437.
- SMITH, W. D., 1975, The application of finite element analysis to body wave propagation problems, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **42**, 747-768.
- SPUDICH, P. and U. ASCHER, 1983, Calculation of complete theoretical seismograms in vertically varying media using collocation method, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **75**, 101-124.
- SWANGER H. J. and D. M. BOORE, 1978, Simulation of strong-motion displacements using surface wave model superposition, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **68**, 907-922.
- 竹中博士, 1988, 2次元不規則成層構造の Reflection Matrix と Transmission Matrix (II), *地震学会講演予稿集*, **2**, B73.
- 竹中博士, 1989, 2次元不規則成層構造における理論地震記象, *物理探査学会第 80 回学術講演会論文集*, 33-35.
- THOMSON, W. T., 1950, Transmission of elastic waves through a stratified solid, *J. Appl. Phys.*, **21**, 89-93.
- VIDALE, J. E. and D. V. HELMBERGER, 1988, Elastic finite-difference modeling of the 1971 San Fernando, California earthquake, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **78**, 122-141.
- WANG, C. Y. and R. B. HERRMANN, 1980, A numerical study of *P*, *SV*, and *SH* wave generation in a plane layered medium, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **70**, 1015-1036.
- WATSON, T. H., 1970, A note on fast computation of Rayleigh wave dispersion in the multilayered elastic half-space, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **60**, 161-166.
- WONG, H. L., 1982, Effect of surface topography on the diffraction of *P*, *SV*, and Rayleigh waves, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 1167-1183.
- 謝小碧, 1988, 理論地震図方法及其在研究震源過程方面的応用, 中国科学院地球物理学研究所, 博士論文.
- YAO, Z. X. and D. G. HARKRIDER, 1983, A generalized reflection-transmission coefficient matrix and discrete wavenumber method for synthetic seismograms, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 1685-1699.
- 蓬田 清, 1989, 横方向不均質媒体における波動場の最新の計算方法—ガウシアンビームを中心として, *地震*, **2**, 42, 117-129.
- YUAN, Y., S. YOSHIZAWA and Y. OSAWA, Strong ground motion simulation of the 1976 Ninghe, China earthquake, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **61**, 97-127.