断層パッチのサイズ分布と不均質断層の 震源スペクトル構造

——断層の不均質性と $f_{\max}$ ——

東北大学理学部地球物理学教室* 小 山 順 二
東北大学工学部基礎工学教室* 原 啓 明

Fractal Nature of Earthquake Source Spectrum from Heterogeneous Faulting with Random Fault Patches

Junji KOYAMA

Geophysical Institute, Faculty of Science, Tohoku University,
Aramaki-aza Aoba, Sendai-shi, Miyagi-ken 980, Japan

Hiroaki HARA

Department of Engineering Science, Faculty of Engineering, Tohoku University,
Aramaki-aza Aoba, Sendai-shi, Miyagi-ken 980, Japan

(Received July 11, 1989; Accepted December 7, 1989)

A theoretical study is made on the earthquake source spectrum for heterogeneous faultings with self-similar fault patches. The source spectrum of this fractal fault patch model is not so simple as that of the standard ω square model. It shows a frequency dependence of $\omega^0 - \omega^{-2} - \omega^{-\delta} - \omega^{-2+\gamma/2} - \omega^{-2}$, where δ is about 1 and γ is the fractal dimension of self-similar fault patches. γ takes a value in between 0 and 2. The spectrum demonstrates three characteristic corner frequencies, where the spectral envelope changes its trend. They corresponds to the rupture times of whole fault length, maximum fault patch, and minimum fault patches. The first is corner frequency well-known in long-period seismology. The second is understood as patch corner frequency. The third would be the cut-off frequency of $f_{\max}$ in the acceleration spectra.

§ 1. はじめに

大きな被害地震は多重震源であったり、かたよった余震分布を示したりする。これは、大地震がスムーズな断層破壊ではなく、不均質断層のぎくしゃくした破壊によるためであると考えられている。断層破壊が不均質であるのは、本質的には、震源域での媒質の破壊強度分布や非一様な応力解放に関係している。我々は、断層パッチで断層面の小規模な不均質領域を表現する。それが断層運動をになう破壊素片であると考えている。そして、大きな地震の発生過程を微細な素過程からマクロな地震現象まで統一的に定式化する研究をすすめている [小山 (1983, 1984); KOYAMA (1985); KOYAMA and IZUTANI

(1989)]。

ある断層が破壊するとき、変位パルスが一個発生する。そのパルス幅は、一般に、断層の破壊継続時間できまり、パルスの振幅は応力降下量に依存する。断層パッチの破壊でも同じことがいえる。局在する断層パッチの破壊時間がパルス幅を決め、局所的な応力降下量のゆらぎがパルス振幅をきめる [KOYAMA and IZUTANI (1989)]。また近年、短周期実体波 [KOYAMA and ZHENG (1985)] や強震加速度波形 [BOORE (1983); 小山・泉谷 (1988)] から、巨大地震はランダムな位相の地震波群を励起していることが、明らかにされている。ランダム位相の地震波群は、数多くの断層パッチがランダムに破壊するためであると考えられている。したがって、ランダムパルスの時系列をしらべることで、どのような応力降

* 〒980 仙台市荒巻字青葉

Fig. 1 Schematic model of random time series. Positive and negative impulses are equally probable. And the impulses generate pulses which last or decay in a random manner. Thus, the time series are characterized by zero mean and random phase. Box car pulse gives a spectrum of $2 \sin(\omega\tau/2)/\omega$, where ω is angular frequency and τ is the random pulse duration. Exponential pulse gives a spectrum of $1/(S + i\omega)$, where S is a random relaxation coefficient.

下量の断層パッチが、時間・空間的にどのように破壊するのかといった微小破壊の素過程について知ることができる。

最近、大地震の震源スペクトルは、 ω 自乗モデルで説明しきれないことが明らかにされている [例えば、GUSEV (1983); KOYAMA *et al.* (1982); 武村・小山 (1983)]. 古くは、BRUNE (1970) や SATO and HIRASAWA (1975) が、断層面上での動まさつと静止まさつとの違いで、複雑な震源スペクトル構造を考えた。震源パラメータ間の相似則が巨大地震で成り立たないことにより、複雑な震源スペクトルになっているとする考えもある [HARTZEL and HEATON (1988); 武村・小山 (1983)]. また、BOORE and JOYNER (1978) や小山 (1983, 1988) は、コヒーレントな破壊とインコヒーレントな断層パッチの破壊を考えることで震源スペクトルの複雑な構造をモデル化している。

その考え方は、大地震を有限個の多重震源と考えたり [例えば、KIKUCHI and KANAMORI (1986); 小山 (1987)], 前震や余震記録を経験的なグリーン関数と考え、その重ねあわせで大地震の強震動を考えたり [例えば、HARTZELL (1978)] する研究の自然な拡張である。本研究では、前報 [小山・原 (1989)] の研究をさらに発展させて、ランダムパルスの時系列とそのスペクトル構造を解析的に考える。また、断層パッチのサイズ分布が大地震の震源スペクトル構造をどのように支配しているのかを明らかにする。

§ 2. ランダムパルスのエネルギースペクトル

ランダムパルス群からなる有限な時系列を考える。

Fig. 1 のように、インパルスの振幅がランダムで、ランダムな時間間隔のパルスを考える。ランダムインパルスは断層パッチの破壊のはじまりに対応し、ランダムパルスのパルス幅は個々の断層パッチが破壊する継続時間をあらわしている。ここでは、インパルスが立つ時間間隔とランダムパルスのパルス幅が一致する場合とインパルスの時間間隔がパルス幅より小さな場合を考える。後者は、複数のパルスが互いに重なり合っているランダム時系列である。逆に、インパルスの時間間隔がパルス幅にくらべて充分大きい場合や、それらが共に時系列全体の長さに比べて充分小さくない場合では、前報で述べたランダム位相の仮定がなりたない。ここでの議論が適用できない問題となる。

HIRASAWA and STAUDER (1965) によると、ある長さの断層破壊は箱型関数の変位パルスを発生する。そのスペクトルは、 $2 \sin(\omega\tau/2)/\omega$ となる [Fig. 1]. ここで、 τ はパルス幅である。 ω は角周波数であり、以後すべての周波数は、特にことわらないかぎり、角周波数である。また、変位パルスが振幅減衰係数 S の指数関数で近似されるとき [Fig. 1], そのスペクトルは $1/(S + i\omega)$ となる。どちらの時間関数の変位パルスでも包絡線スペクトルは、 $\omega \rightarrow 0$ のとき一定値に、 $\omega \gg 1$ のとき $1/\omega$ で減衰する。以後、積分が簡単な後者のスペクトルをもちいて、議論を進めることにする。もちろん、断層パッチがこのようなパルスを実際に励起しているという保証はない。しかし、階段関数で立ち上がるパルスは、適当な時間関数のたたみ込みを考えることで、任意のパルスを近似できる [HIRASAWA and STAUDER (1965)]. したがって、結果的に得られるスペクトル構造が、特定の断層パッチの

Fig. 2 Random pulse time series generated by Cantor set. Time interval specified by bars on the top is obtained as follows: The middle third of each segment is cut out in each subdivision. The longest interval occurs 2^0 times, which is assumed to be 1.0 or $1/S_1$ in the text. The next longest interval is a factor of 3^1 smaller and occurs 2^1 times. The interval of m -th subdivision is thus obtained as 3^m times smaller than the longest interval and occurs 2^m times as often. Random time interval is generated by the random choice of such time intervals. It is shown in the middle. The time axis in the middle is one of the realizations of fractal time. When the random pulses are specified by relaxation times of the above Cantor set of bars, a random pulse time series can be generated assuming a random nature of amplitudes. Positive and negative pulses are equally probable and such the time series at the bottom is specified by zero mean and random phase. When arbitrary integers of j and k instead of 2 and 3 in the above are considered, we could generalize the time interval in more general manner. We call this kind of random pulses the generalized Cantor pulses. And when $j > k$, we designate them the generalized Koch pulses.

破壊過程に対応しているわけではなく、破壊の素過程がもつ統計的性質を表現するものである。

i 番目のインパルスは振幅が A_i 、振幅減衰定数が S_i の変位パルスを発生するとすれば、Fig. 1 で考える時系列は、

$$f(t) = \sum_i A_i \exp\{-S_i(t-t_i)\} H(t-t_i) \quad (1)$$

であらわされる。ここで、 t_i はインパルスの発生時で、 H

は単位階段関数である。 $F(\omega)$ を (1) 式のフーリエ変換とすれば、この時系列のエネルギースペクトルは、

$$E_t(\omega) = F(\omega) \cdot F(\omega)^* \quad (2)$$

となる [小山・原 (1989)]。ただし、 F^* は F に共役な複素スペクトルである。

ここで、SHLEGINGER and HUGHES (1981) が考えたように、フラクタル時間のランダムパルスを導入する。フラクタル時間とは、時間の区分が自己相似であるような時間間隔の分布から構成されている時間をさす [Fig. 2]。断層パッチの破壊時間は、破壊がパッチの特徴的な長さだけ進行する時間に対応している。この時間がパルス幅を決めている。したがって、フラクタル時間の破壊はフラクタル断層パッチの破壊 [HARA and OKAYAMA (1988)] と考えてもよい。Fig. 2 では、特徴的な長さが最大の断層パッチが 1 個だけ存在し、その $1/k$ の長さのものが j 個、さらに、 $1/k^2$ の長さのものが j^2 個だけ存在するような断層パッチの分布を考えている。この分割をくりかえし、その全部の断層パッチを任意の順序で直線上に隙間なくならべる。それらが順に破壊するとき、正負の符号をもつ変位パルスがランダムなパルス振幅で発生するものとする。これは時間区分が自己相似であるから、フラクタル時間のランダムパルスの時系列である。その時系列のエネルギースペクトルは、

$$E(\omega) = \langle A^2 \rangle \sum_{m=0}^M \frac{j^m}{\omega^2 + k^{2m}} \quad (3)$$

で与えられる [小山・原 (1989)]。ここで、 $\langle A^2 \rangle$ はランダムインパルスの自乗平均振幅、 j と k は 1 より大きな整数である。 m は Fig. 2 で考えた分割のステップ数である。上の例では、最小の振幅減衰係数が 1、最大が k^M である。それぞれ、パルス数は、1 個と j^M 個である。この時系列はその中に、

$$N = \sum_{m=0}^M j^m \quad (4)$$

で与えられる個数のパルスを含む。総パルス数 N が有限であるから、全体の時系列も有限な継続時間 T_0 である。単位時間当りの平均インパルス数を n とすれば、

$$N = n T_0 \quad (5)$$

である。

小山・原 (1989) によれば、任意の整数 j と k で、 $k > j > 1$ の場合は一般化したカントール集合のフラクタル時間となる。 $j > k > 1$ の場合は、一般化したコッホ曲線の分布で与えられるフラクタル時間となる。このようにして一般化されたフラクタル時間は、

$$\gamma = \log j / \log k \quad (6)$$

で与えられるフラクタル次元をもつ。これは、分割ステップ数 $M \rightarrow \infty$ のとき、パルス幅の全ての長さが、 $j =$

k の場合, 直線を隙間なくうめ, $j=k^2$ の場合, 平面を重ねるに隙間なくうめる. それぞれ γ は 1 と 2 である. γ はこのような性質をあらわし, その考えを自然に拡張して, 任意の j と k のときは, 非整数次の空間次元をあらわしていると考えてもよい. Fig. 2 にしめし, 上に述べたようにして生成されるパルスを, $0 < \gamma < 1$ のとき, 一般化したカントールパルス, $\gamma > 1$ のとき, 一般化したコッホパルスと呼ぶことにする. ここでは直感的な理解がえられるフラクタル時間のモデルを考えているが, さらに一般的なフラクタル時間の取りあつかいを HARA *et al.* (1989) に述べてある.

パルス幅の分割数 k を振幅減衰係数 S で連続近似すれば, オイラーの和の公式から,

$$E'(\omega) = \langle A^2 \rangle N \int_{S_1}^{S_2} \frac{P(S)}{\omega^2 + S^2} dS \quad (7)$$

の近似式を与える. ただし, S_1 は (3) で $m=0$, S_2 は $m=M$ のときのパルスの振幅減衰係数である. $P(S)$ はパルスの振幅減衰係数が S となる確率密度関数をしめし,

$$P(S) = \gamma S^{\gamma-1} / (S_2^\gamma - S_1^\gamma) \quad (8)$$

であらわされる.

$\omega \gg S_2$ のとき, (7) 式は唯一的に (3) 式に収束する. これは, γ の値にかかわらず成り立つ. しかし, $\omega \rightarrow 0$ では, γ が 2 より小さいとき, (7) 式が (3) 式に漸近しない. $m=0$ や $m=1$ である大きな断層パッチの低周波数でのエネルギースペクトル成分を (7) 式は近似していないことによる. また, γ が 2 より大きいときは, $\omega \rightarrow 0$ で, (7) 式がやはり (3) 式に漸近しない. これは, 分割のステップ数 m が大きな断層パッチが数多く存在し, それらの低周波数でのエネルギースペクトルの寄与を (7) 式が正しく近似していないことによる. もちろん, (3) 式から, これらの寄与を差し引けば, (7) 式の近似はどこまでもよくなる. したがって, (7) 式は, S_1 から S_2 などの中間周波数帯や $\omega \gg S_2$ の高周波数帯での近似式と考えられる.

§ 3. エネルギースペクトルの減衰べき係数

前報では, エネルギースペクトルの包絡線振幅が特徴的な周波数で折れ曲がることを明らかにした. そして, その特徴的な周波数をコーナー周波数と呼び, ランダムパルスのパルス幅の確率分布との関係を調べた. ここでは, 断層パッチのサイズ分布がどのようにエネルギースペクトルの周波数依存性を支配するのか一般的に調べる.

$S_1 < \omega < S_2$ の中間周波数帯で (7) 式は

$$E'(\omega) = \frac{\gamma N \langle A^2 \rangle}{S_2^\gamma - S_1^\gamma} \omega^{\gamma-2} \left[\int_{\ln(S_1/\omega)}^0 \frac{\exp(\gamma t)}{1 + \exp(2t)} dt \right]$$

$$+ \int_0^{\ln(S_2/\omega)} \frac{\exp\{(\gamma-2)t\}}{1 + \exp(-2t)} dt \quad (9)$$

と書ける. $j > k^2$ となる $\gamma > 2$ で, 被積分関数の分数関数は, それぞれ $\exp(2t) \leq 1$, $\exp(-2t) \leq 1$ の収束半径で級数展開される. 項別積分を実行し, その主要項を取ると,

$$E'(\omega) \sim \frac{\gamma N \langle A^2 \rangle \omega^{\gamma-2}}{S_2^\gamma - S_1^\gamma} \frac{(S_2/\omega)^{\gamma-2}}{\gamma-2} \quad (10)$$

になる. したがって, 中間周波数帯でのエネルギースペクトルは, $\gamma > 2$ のとき, ω^0 のスペクトル変化をすることがしめされる.

また, (7) 式は, $S = \omega t$ のおきかえで,

$$E'(\omega) = \frac{\gamma N \langle A^2 \rangle}{S_2^\gamma - S_1^\gamma} \omega^{\gamma-2} \int_{S_1/\omega}^{S_2/\omega} \frac{\exp\{(\gamma-1)\ln t\}}{1+t^2} dt \quad (11)$$

と変形される. $\gamma \rightarrow 1$ のとき, $|(\gamma-1) \ln t| \ll 1$ であるから, 分子をテーラー展開し, 項別積分を実行すると, その主要項は,

$$E'(\omega) \sim \frac{\gamma N \langle A^2 \rangle}{S_2^\gamma - S_1^\gamma} \omega^{\gamma-2} \times [\tan^{-1}(S_2/\omega) - \tan^{-1}(S_1/\omega)]$$

$S_1 \ll \omega \ll S_2$ のとき, かき括弧の項は $\pi/2$ となり, スペクトル減衰は, $\omega^{\gamma-2}$ である.

γ が 0 に近い場合は, 同様にして, エネルギースペクトルの減衰が $\omega^{\gamma-2}$ となることがしめされる. このように中間周波数帯では, パルス幅のフラクタル次元 γ により, スペクトルの減衰べき係数がいろいろ変化することが明らかになった. しかし, (7) 式からもわかる通り, $\omega > S_2$ となる高周波数帯では, エネルギースペクトルの減衰は, γ の値に関係せず, ω^{-2} である. パルスの緩和時間にくらべて充分短周期帯のスペクトルはパルスの立ち上がりだけに依存し, パルス幅にはよらないことに起因する.

前報では, 中間周波数帯でのエネルギースペクトルの減衰べき係数を図式的に求めた. カントールパルスのランダム時系列では, $j \ll k$ のとき, 減衰のべき係数は -2 であった. $j \sim k$ のとき, エネルギースペクトルは $1/f$ スペクトルをしめた. コッホパルスのランダム時系列では, ω^0 で振舞うエネルギースペクトルが得られている. これらをまとめて Fig. 3 にしめす. 上で議論したスペクトルの減衰べき係数が図式的に得られたスペクトル減衰値とよく一致しているのがわかる.

これにより, (7) 式が (3) 式の中間周波数帯でのエネルギースペクトルを比較的良好に近似していることがわかる. ここでは, 整数 j と k が 1 より大きければよく, γ は正の実数値をすべて取りえる. したがって, ここでの議論は, フラクタル次元 γ が 2 より大きな場合でも一般性を失わない. ただし, エネルギースペクトルの減衰は,

Fig. 3 Energy spectral decay in terms of fractal dimension. Asymptotic spectral decay rates are shown segment-lines and dotted lines. Spectral decay rates obtained graphically by KOYAMA and HARA (1989) are plotted by solid circles. C and K stand for generalized Cantor pulses and Koch pulses, integers j and k in eq. (3) being indicated as j/k following C or K.

$\gamma > 2$ のとき、 $\gamma \sim 2$ のときに見たスペクトル減衰と同じ ω^0 である。

§ 4. 伝播性破壊確率モデルと断層パッチのサイズ分布

GRUNEIS and MUSHI (1986) は、物理現象にコヒーレントな時間とランダムなゆらぎの継続時間の 2 つの時定数があることを指摘している。それぞれの時定数が、独立に、 ω 自乗型のエネルギースペクトル（ローレンツスペクトル）をあたえる。我々は、先に、不均質な断層破壊を理論的に考えた [小山 (1983, 1984); KOYAMA (1985)]。それによれば、この 2 つの時定数が単一の断層破壊過程の中に同時にあらわれることがしめされている。そして、不均質断層の破壊過程はコーナー周波数とパッチコーナー周波数の独立な 2 つの周波数で特徴づけられる。コーナー周波数は断層全体のコヒーレントな破壊の継続時間に関係し、パッチコーナー周波数は断層パッチのランダムな破壊時間の平均値によって決まる。このように、コヒーレントな時間とゆらぎの継続時間が単一の物理現象にあらわれ、それらが詳しく研究されている例は他にない。

不均質断層の破壊を考えた伝播性破壊確率モデル [小山 (1983); KOYAMA (1985)] では、微小な断層パッチの破壊をポアソン分布する破壊時間で特徴づけている。

その震源スペクトルは、

$$\Omega(\omega) = M_0 \frac{|\sin(\omega L/2v)|}{(\omega L/2v)} \left[\frac{\sin^2(\omega T_0/2)}{(\omega T_0/2)^2} + \frac{2\sigma^2}{T_0^2 a^2} \frac{\lambda T_0}{\omega^2 + \lambda^2} \right]^{1/2} \quad (12)$$

とあらわされる [小山 (1983)]。ここで、 M_0 は地震モーメント、 L は断層の長さ、 v は平均破壊速度、 a は平均すべり速度、また、すべり速度の分散が σ^2 である。簡単のため、震源スペクトルの方位による変化と破壊伝播の影響は考えていない。 λ は、小山 (1983) により導入されたパッチコーナー周波数である。

右辺の第一項は平均場のすべりをあらわし、巨視的な断層破壊過程を表現している。第二項はランダム場のすべりを定式化している。断層面に不均質がないときは、断層破壊が四角な断層面（長さ L 、幅 W ）で発生するため、破壊の継続時間 $T_0 (= W/v)$ と L/v の 2 つのコヒーレントな時間の特徴づけられる。(12) 式の表現は、 T_0 をある点でのすべりの継続時間とし、ほそ長い 1 次元の断層破壊を取りあつかうときも同じである。したがって、HIRASAWA and STAUDER (1965) と同様に、 T_0 と L/v の単位箱型関数のたたみ込みで 2 次元断層破壊の震源スペクトルが表されている。この 2 つの時定数は共にコヒーレントな時定数であり、本質的には決定論的性質をあらわす。断層の長さと同幅が等しく、 $T_0 = L/v$ を仮定しても、ここでの議論の一般性を失うことはない。これらは、すべりのゆらぎ場を表現するパッチコーナー周波数とは、独立な量である。断層面の不均質性が大きいときや、短周期での震源スペクトルには、(12) 式右辺の第二項の影響が強くあらわれる。微視的な断層破壊過程と巨視的なそれがあらわれる周波数帯が違うことをしめしている。

ここでは、HARA and OKAYAMA (1988) が考えた自己相似な断層パッチの破壊を導入して、より一般的に、不均質な断層破壊の震源スペクトル構造を考えてみよう。(3) 式のランダムインパルスの自乗平均振幅と伝播性破壊確率モデルでの断層すべり時間関数のゆらぎ σ^2 を結びつけば、不均質断層の震源スペクトルは、(7) 式をもちいて、

$$\Omega(\omega) = M_0 \frac{|\sin(\omega L/2v)|}{(\omega L/2v)} \left[\frac{\sin^2(\omega T_0/2)}{(\omega T_0/2)^2} + \frac{\langle A^2 \rangle}{T_0^2 a^2} \int_{S_1} \frac{P(S)}{\omega^2 + S^2} dS \right]^{1/2} \quad (13)$$

となる。ただし、 $\langle A^2 \rangle$ は、次の左辺にあらわれる伝播性破壊確率モデルの全エネルギーと一致するように決める；

Fig. 4 Fractal source spectrum of the heterogeneous faultings. Stochastic model shows the source spectrum of the coherent and incoherent rupture on the same fault by Koyama (1983, 1985). It demonstrates the importance of spectral corner frequency resulting from the source finiteness and of patch corner frequency λ resulting from the average rupture time of small-scale fault heterogeneities (random fault patches). Unit seismic moment, $\lambda=S_1=200$, and $S_2=145800$ are assumed. The stochastic model predicts an earthquake source spectrum with $\omega^0-\omega^{-2}-\omega^{-\delta}-\omega^{-2}$, where ω is angular frequency normalized by W/β . W is fault width and β is S-wave velocity. δ is measured about 1. When the rupture durations of random fault patches are specified by the generalized Cantor pulses and Koch pulses, the source spectrum is characterized by $\omega^0-\omega^{-2}-\omega^{-\delta}-\omega^{-2+\gamma/2}-\omega^{-2}$, where γ is the fractal dimension of the pulses. Modeling of this heterogeneous faulting is named as fractal fault patch model after the random nature of the fault patches. The spectrum is specified by the corner frequencies due to the source finiteness, maximum and minimum rupture times of random fault patches. Maximum rupture time corresponds to the patch corner frequency introduced by Koyama (1983, 1985). And the minimum rupture time would relate to the cut-off frequency of $f_{\max}$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma^2 \lambda T_0}{\omega^2 + \lambda^2} d\omega$$

$$= \frac{\langle A^2 \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_1}^{S_2} \frac{P(S)}{\omega^2 + S^2} dS d\omega \quad (14)$$

(14) 式は仮定である。 $\omega=0$ で両方のスペクトル成分が一致するように仮定してもよい。ここでは(14)式の場合について考えることにする。この仮定は、短周期スペクトル成分の増減を決めるけれども、スペクトル減衰の傾きには関係しない。(13)式の震源スペクトルでは、パッチコーナー周波数 λ が、陽にあらわれないことに注意する。自己相似な分布では、平均値が確率変数を規定するパラメータではないことによると考えられる。

離散的な断層パッチの破壊時間を考えると、(3) 式か

ら

$$\Omega(\omega) = M_0 \frac{|\sin(\omega L/2v)|}{(\omega L/2v)} \left[\frac{\sin^2(\omega T_0/2)}{(\omega T_0/2)^2} + \frac{2S_1\sigma^2}{T_0 a^2} \frac{1-(j/k)}{1-(j/k)^{M+1}} \sum_{m=0}^M \frac{j^m}{\omega^2 + (S_1 k^m)^2} \right]^{1/2} \quad (15)$$

となる。 S_1 は、最大のパルス幅から決まる振幅減衰係数である。

(15) 式右辺の第一項は、断層のコヒーレントな(巨視的な)破壊過程をしめし、全体として ω 自乗のスペクトルをあたえる。第二項は、ランダムな(微視的な)破壊過程を表現し、さきに述べた複雑なスペクトル構造をしめす。(15) 式の震源スペクトルを Fig. 4 に図示する。震源スペクトルは、単位地震モーメント $M_0=1$ 、断層面の

不均質性 $\sigma^2/a^2=1$, パッチコーナー周波数 $\lambda=S_1=200$, 平均破壊伝播速度 $v=0.83\beta$ を仮定した. 時間と角周波数をすべて W/β で規格化して計算してある. ただし, β は S 波の伝播速度である. これらの仮定により, 断層全体の破壊時間は, $T_0=1.2$ となる. 伝播性破壊確率モデル, カントールパルス ($j=2, k=3$) とコッホパルス ($j=4, k=3$) の震源スペクトルを Fig. 4 にしめす. カントールパルスとコッホパルスであらわされる断層パッチでは, 分割の最大ステップ数を $M=6$ とした. このとき, 最小の断層パッチ破壊時間から, S_2 は 145800 となる.

伝播性破壊確率モデルでは, 震源スペクトルの包絡線が $\omega^0-\omega^{-2}-\omega^{-\delta}-\omega^{-2}$ の周波数依存性をしめす [小山 (1983); KOYAMA (1985)]. ただし, δ はおよそ 1 である. 震源スペクトルの折れ曲がりを示すコーナー周波数は, $2/T_0$. とパッチコーナー周波数 λ で特徴づけられる. それぞれ, Fig. 4 で約 1.7 と 200 である.

カントールパルスの震源スペクトルは, $\omega^0-\omega^{-2}-\omega^{-\delta}-\omega^{-2+\gamma/2}-\omega^{-2}$ で特徴づけられる. コッホパルスの震源スペクトルもフラクタル次元 γ の違いだけで, 本質的にはカントールパルスの結果と同じである. ただし, γ は正の実数値であるが, $\gamma > 2$ でのスペクトル減衰のべき係数は $\gamma \sim 2$ のときと同じである. 上の例では, γ は 0 から 2 の範囲だけを考えればよい. フラクタル次元 γ の値により, 非整数次のスペクトル減衰をしめすから, これらをまとめてフラクタル震源スペクトルと呼ぶことにする. Fig. 4 から, 物理的に意味のあるコーナー周波数は, 3 つあることがわかる. それぞれ, 規格化した周波数で, $2/T_0$ 及び, S_1 , と S_2 の付近である. 断層全体及び, 不均質領域の最大と最小の破壊時間によって, 震源スペクトルのコーナー周波数が決まっていることが理解される. S_1 から S_2 の中間周波数帯では, スペクトル減衰のべきは $2-\gamma/2$ となる. $0 < \gamma < 2$ を考えればよいから, 中間周波数帯で, フラクタル震源スペクトルは ω^{-1} から ω^{-2} の間のスペクトル減衰をしめすことになる.

§5. 議 論

エネルギースペクトルは物理現象全体のエネルギーが, また, パワースペクトルは物理現象の単位時間当りのエネルギーが, 周波数ごとにどのように分配されているのかを表現する. この違いが, (7) 式の確率密度関数を S 倍だけかえる. 例えば, MONTROLL and SHLESINGER (1984) は, パワースペクトルの表現に (7) 式中の積分に対応する

$$\langle A^2 \rangle n \int_{S_1}^{S_2} \frac{SP(S)}{\omega^2 + S^2} dS \quad (16)$$

をもちいている. これは, (12) 式の右辺第二項を確率密度 $P(\lambda)$ で重ね合わせたものに等しい. (12) 式では, 単位時間当りの平均パルス数が λ である. つまり, (16) 式の S は, 振幅減衰係数の平均値と考えなければいけない. したがって, (16) 式は, パルス振幅の減衰係数の平均値が S となるアンサンブルがたくさん存在し, その確率密度関数が $P(S)$ であらわされるような場合を表現している.

エネルギースペクトルでは, 個々の事象がどのような確率で何個発生するのかが重要である. (7) 式では, S となるパルスの個数の和, (16) 式では, 平均値が S となるアンサンブル平均をそれぞれ考えている. (16) 式に時系列の継続時間をかければ, 形式的にエネルギースペクトルになる. その結果は (7) 式と等価であることがしめされる. したがって, パワースペクトル表現での確率密度関数とエネルギースペクトル表現での確率密度関数は, S 倍だけ違うことが理解される.

GRUNEIS and MUSA (1986) は, パルス幅にあたるインパルス群のクラスターサイズを考えた. q 個のインパルスを含むクラスターの確率密度関数を

$$P_q = q^z / \sum_{r=1}^N r^z \quad (q=1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

で与えた. ただし, z は定数である. また, MONTROLL and SHLESINGER (1984) は, (16) 式の $P(S)$ に, 対数正規分布を仮定している. これらの確率密度関数により, ランダム時系列がフラクタルスペクトルで特徴づけられることをしめしている. 我々は一般化したカントールパルスやコッホパルスの確率密度関数で, スペクトル減衰のべき係数を解析的な表現であたえた. ここで議論した一般化したカントールパルスやコッホパルスの確率密度関数は, 上に述べた特定の場合も近似できることになる.

本論では, 自己相似な分布をする断層パッチの破壊を考えた. このような自己相似な断層パッチで表現される不均質断層破壊のモデルを, 以後, フラクタル断層パッチモデルとよぶことにする. フラクタル断層パッチモデルの震源スペクトルには, 断層パッチの最大と最小の破壊時間で決まる 2 つのコーナー周波数 S_1 と S_2 がある. それらの中間周波数帯では, 震源スペクトルの減衰べき係数が $2-\gamma/2$ となる. $S_2 \rightarrow S_1$ のとき, その周波数帯域はせまくなり, 結果的には ω^{-2} の震源スペクトル減衰となる. S_2 より高い周波数帯では, 震源スペクトルの減衰べき係数は常に 2 である.

(15) 式を時間で 2 回微分して, フラクタル加速度スペクトルの表現式をえる:

$$\Psi(\omega) = M_0 \frac{|\sin(\omega L/2v)|}{(L/2v)} \left[\frac{\sin^2(\omega T_0/2)}{(T_0/2)^2} \right]$$

Fig. 5 Acceleration source spectrum from the heterogeneous faultings. Spectrum including anelastic attenuation is attached to each acceleration spectrum. (a) Small attenuation ($t^*=0.000039$) and (b) Large attenuation ($t^*=0.00069$) for an empirical attenuation in the form of $\exp(-\omega t^*)$. S_2 is assumed 5400 in this case and the others are the same as those in Fig. 4.

$$+ \frac{2S_1\sigma^2}{T_0a^2} \frac{1-(j/k)}{1-(j/k)^{M+1}} \sum_{m=0}^M \frac{\omega^2 j^m}{\omega^2 + (S_1 k^m)^2} \Big]^{1/2} \quad (18)$$

この加速度スペクトルは、中間周波数帯で、 $\omega^{7/2}$ で増加する。Fig. 5に上式とそれに非弾性による減衰を $\exp(-\omega t^*)$ の関数形で考慮した加速度スペクトルを示す。ここで考えた減衰式は単なる近似で、現実のそれとは異なるだろう。減衰が非常に小さい場合($t^*=0.000039$)と比較的大きい場合($t^*=0.00069$)の2通りを考えている。ただし t^* は W/β で規格化してある。これはあくまでも高周波数帯での減衰を考えてのことであり、広い周波数帯での減衰式ではない。しかし、低周波数帯では減衰の影響は小さいから、減衰式の仮定だけでこれから述べる結論を大きく変えることはない。

減衰が小さい場合、フラクタル加速度スペクトルにコーナー周波数、パッチコーナー周波数、そして、第3のコーナー周波数が見いだせる。カントールパルスやコッホパルスのフラクタル断層パッチモデルは、第3のコーナー周波数がシャープなカットオフ周波数になっている。この第3のコーナー周波数は断層パッチの一番短い破壊時間で決まっている。伝播性破壊確率モデルでは、シャープではないが、第3のコーナー周波数が同様

に存在する。しかし、これは減衰の影響だけで生じる第3のコーナー周波数である。

減衰が大きい場合、コーナー周波数、パッチコーナー周波数はカントールパルスやコッホパルスの加速度スペクトルに見いだせる。また、第3のコーナー周波数は、すべて減衰の影響を強く受けていることがわかる。伝播性破壊確率モデルでは、パッチコーナー周波数と第3のコーナー周波数はともにあまりシャープではなく、スペクトル包絡線振幅のシャープな折れ曲がり、コーナー周波数だけである。減衰が大きい場合、小さい場合どちらでも、フラクタル震源スペクトルは伝播性破壊確率モデルのスペクトルより明瞭でシャープな第3のコーナー周波数を与えることがわかる。減衰の影響だけでは説明できない第3のコーナー周波数はフラクタル震源スペクトルに見いだせることになる。

フラクタル断層パッチモデルでは、3つの特徴的なコーナー周波数が存在することがわかった。断層全体の破壊時間によるコーナー周波数、最大の断層パッチ破壊時間によるコーナー周波数、そして、最小の断層パッチ破壊時間に依存するコーナー周波数である。第2のコーナー周波数は、従来我々が考えてきた、パッチコーナー周波数に対応するだろう。これは、巨大地震の際に短周

Fig. 6 Fault patch nucleation pattern. Fracture nucleates and it expands until a critical patch size more or less in a steady manner. Once the fracture size exceeds the critical patch size, a sudden rupture propagation occurs radiating short-period seismic waves. Otherwise the fracture remains incomplete stress drop.

期地震波を放出したアスペリティーの大きさ [例えば, KIKUCHI and KANAMORI (1986)] などにあたり, 実際の物理量に対応している。

第3のコーナー周波数に関し, フラクタル断層パッチモデルは, なんら物理的な意味づけをあたえていない。ただ断層パッチの最小の破壊時間と考えているだけである。一つの考え方として, 破壊の種が突然拡大するのではなく, さらに進行するかしないかをきめる臨界パッチ長 (critical patch size) があると考え, 臨界パッチ長まではゆっくりとした破壊が進行し, 臨界パッチ長にいたらない不均質領域は完全に破壊しない。臨界パッチ長をこえると, 急激なすべりをおこし, 不均質な断層パッチとして短周期地震波を励起する。これが断層パッチの最小破壊時間である。Fig. 6 に破壊の種がどのような拡大のパターンをするのか図に描いた。このように考えれば, 第3のコーナー周波数にもそれなりの物理的な実態があたえられたことになる。

PAPAGEORGIOU and AKI (1983) は, 破壊の先端で凝着領域を考え, 加速度スペクトルのカットオフ周波数 $f_{\max}$ に物理的な意味づけをした。HANKS (1982) 等は $f_{\max}$ が波動エネルギーの減衰によるカットオフ周波数であると考えている。PAPAGEORGIOU (1988) は, $f_{\max}$ を定式化が簡単な地盤の減衰で評価しようとしている。このように, $f_{\max}$ には, 震源パラメータであるとする考え方と伝播系

の影響であるとする考え方の二通りがある。しかし, どちらの考え方でも, 観測されるスペクトルに与える影響は同じである [小山 (1988)]。ここで考えたフラクタル断層パッチモデルでは, 減衰の小さいとき, $f_{\max}$ が最小の断層パッチ破壊時間に依存することをしめした。また, 減衰が大きいとき, $f_{\max}$ は減衰の特性に強く依存し, 断層破壊の不均質性にはよらないことが示された。このような $f_{\max}$ の統一的な考え方は, 不均質な断層破壊過程と波動エネルギーの減衰を共に考えたことにより始めてえられた考え方である。

§ 6. 結 論

I. 自己相似なランダムパルスによる波動をフラクタル時間のランダム波動として一般的に考察した。

II. 一般化したカントールパルス, コッホパルスからえられるエネルギースペクトルを理論的に表現し, エネルギースペクトルの減衰べき係数を解析的に導いた。ランダム波動のエネルギースペクトルが周波数の $2-\gamma$ のべきで減衰することがしめされた。ただし, γ はランダムパルスのフラクタル次元である。これにより任意に減衰するフラクタルスペクトルとそのもとになるランダム時系列の素過程の統計的な性質が一般的に理解される。

III. ランダム波動のエネルギースペクトルとパワースペクトルの違いを考察し, 我々の議論と MONTROLL and SHLESINGER (1984) 等のパワースペクトルの議論との違いを明確にした。そして, ランダム波動の特徴を確率事象の和であらわすときとアンサンブル平均で表すときの違いを明らかにした。

IV. 不均質な断層が自己相似の破壊時間で表現されるとき, スムーズな断層破壊とインコヒーレントな断層破壊がどのような震源スペクトルを与えるのかを考えた。

V. 上のフラクタル断層パッチモデルでは, その震源スペクトルが $\omega^0 - \omega^{-2} - \omega^{-\delta} - \omega^{-2+\gamma/2} - \omega^{-2}$ の周波数依存性をしめすことが明らかにされた。ただし, δ は1程度, γ はランダムなパルス幅のフラクタル次元である。

VI. フラクタル断層パッチモデルでは, 震源スペクトルの折れ曲がりを示す3つのコーナー周波数が存在する。その物理的背景として, 断層全体の破壊時間, 最大の断層パッチの破壊時間, 最小の破壊時間が考えられる。

VII. フラクタル断層パッチモデルでは, 大地震の加速度スペクトルに見られるパッチコーナー周波数 [小山 (1986)] が最大の断層パッチ破壊時間で決まる。これは, 伝播性破壊確率モデルのパッチコーナー周波数が断層パッチの平均破壊時間で決まるとする考えと違う点である。

VIII. フラクタル断層パッチモデルでは、第3のコーナー周波数が存在する。これは、大地震の加速度スペクトルにみられるカットオフ周波数($f_{\max}$)に対応していると考えられる。このカットオフ周波数は、波動エネルギーの減衰が小さな時、断層不均質領域の最小の破壊単位(最小の断層パッチ破壊時間)の性質を反映し、減衰が大きいき、減衰の効果によりきまる。

謝辞: 本研究の一部は文部省科学研究費(重点領域)課題番号 63601005, 01601006 によった。

文 献

- BOORE, D. M., 1983, Stochastic simulation of high-frequency ground motions based on seismological models of the radiated spectra, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 1865-1894.
- BOORE, D. M. and W. B. JOYNER, 1978, The influence of rupture incoherence on seismic directivity, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **68**, 283-300.
- BRUNE, J. N., 1970, Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes, *J. Geophys. Res.*, **75**, 4997-5009.
- GRUNEIS, F. and T. MUSA, 1986, Clustering Poisson process and $1/f$ noise, *Jpn. J. Appl. Phys.*, **25**, 1504-1509.
- GUSEV, A. A., 1983, Descriptive statistical model of earthquake source radiation and its application to an estimation of short-period strong motion, *Geophys. J. Roy. Astro. Soc.*, **74**, 787-808.
- HANKS, T. C., 1982, $f_{\max}$, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **72**, 1867-1879.
- HARA, H. and S. OKAYAMA, 1988, Fractal dimension and scaling behavior of cracks in a random medium: "Frequency-rank" distribution described by generalized random walks, *Phys. Rev.*, **B**, **37**, 9504-9511.
- HARA, H., O. K. CHUNG, and J. KOYAMA, 1989, 投稿準備中.
- HARTZELL, S. H., 1978, Earthquake aftershocks as Green's functions, *Geophys. Res. Lett.*, **5**, 1-4.
- HARTZELL, S. H. and T. H. HEATON, 1988, Failure of self-similarity for large ($M_w > 8 \frac{1}{4}$) earthquakes, *Seism. Soc. Am.*, **78**, 478-488.
- HIRASAWA, T. and W. STAUDER S. J., 1965, On the seismic body waves from a finite moving source, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **55**, 237-262.
- KIKUCHI, M. and H. KANAMORI, 1986, Inversion of complex body waves—II, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **43**, 205-222.
- 小山順二, 1983, 伝播性破壊確率モデルと地震の震源スペクトル, *地震 II*, **36**, 225-235.
- 小山順二, 1984, 伝播性破壊確率モデルと短周期実体波の励起, *地震 II*, **37**, 295-305.
- KOYAMA, J., 1985, Earthquake source time-function from coherent and incoherent rupture, *Tectonophysics*, **118**, 227-242.
- 小山順二, 1986, 破壊の物理モデル, *数理地震学 1986*, 統計数理研究所, 46-59.
- 小山順二, 1987, 1983 年日本海中部地震の時間依存モーメントテンソル, *地震 II*, **40**, 405-416.
- 小山順二, 1988, 伝播性破壊確率モデルと最大加速度・rms 加速度, *地震 II*, **41**, 351-357.
- 小山順二・原 啓明, 1989, ランダム波動のフラクタルスペクトル構造, *地震 II*, **42**, 1-12.
- 小山順二・泉谷恭男, 1988, 最大加速度・rms 加速度の方位依存性—ランダム位相の短周期地震波—, *地震 II*, **41**, 79-87.
- KOYAMA, J. and Y. IZUTANI, 1989, Seismic excitation and directivity of short-period body waves from a stochastic fault model, *Tectonophysics*, in press.
- KOYAMA, J. and S. H. ZHENG, 1985, Excitation of short-period body-waves by great earthquakes, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **37**, 108-123.
- KOYAMA, J., M. TAKEMURA, and Z. SUZUKI, 1982, A scaling model for quantification of earthquakes in and near Japan, *Tectonophysics*, **84**, 3-16.
- MONTROLL, E. W. and M. F. SHLESINGER, 1984, On the wonderful world of random walks, *Studies in Statistical Mechanics XI*, edit. E. E. MONTROLL and J. L. LEBOWITZ, North-Holland Physics Pub., Amsterdam, pp. 1-121.
- PAPAGEORGIOU, A. S., 1988, On two characteristic frequencies of acceleration spectra: Patch corner frequency and $f_{\max}$, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **78**, 509-529.
- PAPAGEORGIOU, A. S. and K. AKI, 1983, A specific barrier model for quantitative description of inhomogeneous faulting and the prediction of strong ground motion. Part I. Description of the model, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **73**, 693-722.
- SATO, T. and T. HIRASAWA, 1975, Effect of partial relaxation of the effective stress upon seismic radiation, *Sci. Rep. Tohoku Univ.*, Ser. 5, Geophysics, **22**, 153-165.
- SHLEGINGER, M. F. and B. D. HUGHES, 1981, Analogs of renormalization group transformations in random processes, *Physica*, **109A**, 597-608.
- 武村雅之・小山順二, 1983, 低周波地震のスケーリングモデル—津波地震と中小規模低周波地震の関係—, *地震 II*, **36**, 323-336.