寄 書

鈴木保典氏の「Hooke 弾性体の独立な弾性定数は 21 ヶか 36 ヶか？」についてのコメント

東京大学理学部地球物理学教室¹

ゲラー ロバート

Comment on "Is the Number of independent elastic constants of a Hookean elastic material 21 or 36?" by Y. Suzuki

Robert J. GELLER

Department of Geophysics, Faculty of Science,
Tokyo University Yayoi 2-11-16,
Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

(Received March 19, 1990;

Accepted March 26, 1990)

§ 1. はじめに

本論文では、一般力学に基づいて鈴木 (1989) の (1) から (5) 式を直接使い、弾性体を平衡状態から無限小だけ変形するのに要する弾性エネルギー W を計算する。そして、得られた W についての式が鈴木氏の (6) 式と矛盾することを示し、GELLER (1988) の結論が正しいことを確かめる。最後にこの問題に関して生じた混乱の原因について議論する。

ここで表記法は鈴木 (1989) ではなく GELLER (1988) に従うことにする。和の規約は i, j, k などの添え字が繰り返された場合に適用し、添え字が x, y, z の場合には用いない。

応力や歪みテンソルの対称性、Hooke の法則は鈴木 (1990) の (1) から (5) 式または GELLER (1988) の (1) から (5) 式で与えられ、それらは弾性論についての他の標準的な文献のいずれとも矛盾しない。基礎方程式は以下のとおりである。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (1)$$

ただし、 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ は応力テンソルである。歪みテンソル $e_{ij} = e_{ji}$ は次式で定義される。

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

また、弾性テンソルは次の対称性をもつ。

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} \quad (3)$$

(1) から (3) 式には単純な物理的意味がある。ここで応力も歪みも小さく、これら 2 つの微小量は線型関係にあると仮定する。 e_{ij} と σ_{ij} はそれぞれ 6 ヶの独立な成分を持つので、この 2 つの量の間の最も一般的な線型関係、つまり一般化された Hooke の法則では、 $6^2 = 36$ ヶの弾性定数が存在しなければならない。

Fig. 1 に示す微小な直方体の物体を考える。この物体は初めは平衡状態にあったもので、それぞれの面に働く traction (面力) によって現在の状態に変形されている。ここで、これらの traction によってなされる仕事を計算する。任意の面に働く traction は

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (4)$$

によって与えられる。ただし n は外向きの単位法線ベクトルを、各面の重心における traction にはその面に働く traction の平均値を与える。

まず最初に単位法線ベクトル n が $(0, 0, 1)$ である上面について考える。この時上面に働く traction の平均は $T_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{iz}$ である。平衡状態では traction の平均はゼロであるので、平衡状態から現在の状態への変形の経路に沿った traction の平均は最終的な値の半分、つまり $\sigma_{iz}/2$ となる。一方、直方体の上面の重心から直方体の重心までの距離は $\delta z/2$ なので、ここで Taylor 展開を用いて、直方体の上面の重心の平衡からの変位を $u_{i,z} \delta z/2$ とあらわす。ただし、 $u_{i,z}$ は直方体の重心において計算されたものである。また、直方体の上面の面積は $\delta x \delta y$ である。従って直方体の上面の、平衡状態からその最終的な位置への変位においてなされた仕事は、経路の平均力 (つまり、上面の重心における traction の半分と上面の面積の積) と変位の内積、すなわち

$$W_{top} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{iz} \delta x \delta y \right) \left(\frac{1}{2} u_{i,z} \delta z \right) \quad (5)$$

となる。ただし和の規約は i のみで、 z には適用しないことに注意。

(5) 式は上面を変位させるのに要する仕事を与える。単位法線ベクトル n が $(0, 0, -1)$ である下面を変位させるのに要する仕事も、2 つの負の符号が打ち消しあうので明らかに W_{top} と等しい。従って上面と下面における仕事の和は、

$$W_z = \frac{1}{2} \sigma_{iz} u_{i,z} \delta x \delta y \delta z \quad (6)$$

他の 2 組の面における仕事についても同様の式が得られ、それらより全仕事は

¹ 〒113 東京都文京区弥生 2-11-16

Fig. 1. Infinitesimal rectangular parallelepiped whose elastic deformation is considered in this paper.

$$W = \frac{1}{2} \alpha_{ij} u_{i,j} \delta x \delta y \delta z \quad (7)$$

となる。ところで $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ であるから、 $u_{i,j}$ を e_{ij} で置き換えると

$$W = \frac{1}{2} \alpha_{ij} e_{ij} \delta x \delta y \delta z \quad (8)$$

となる。ここで一般化された Hooke の法則 (1) 式を (8) 式に代入し、弾性エネルギーは

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \delta x \delta y \delta z \quad (9)$$

である。

(8) と (9) 式は微小体積についての仕事を与えるので、全弾性エネルギー E は

$$E = \int \frac{1}{2} \alpha_{ij} e_{ij} dV \quad (10)$$

ここで一般化された Hooke の法則 (1) 式を (10) 式に代入して、

$$E = \int \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV = \int \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV \quad (11)$$

である。ただし、上式の後の変形には (3) 式の対称的な性質を用いた。

§ 2. 独立な弾性定数の数について

上記の議論において、36 々の独立な弾性定数 C_{ijkl} の存在を仮定する。ところで、GELLER (1988, p. 205-206) に示されるように弾性定数 C_{ijkl} は対称部分の 21 々の独立な成分

$$S_{ijkl} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{klij}) \quad (12a)$$

と反対称部分の 15 々の独立な成分

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} - C_{klij}) \quad (12b)$$

にわけることができる。

(12a) 式で与えられる弾性テンソルの対称部分の 21 々の独立な成分のみが (10) 式と (11) 式の弾性エネルギーに寄与することは明白であり、GELLER (1988 p. 205-206) でも詳しく議論されている。(12b) 式で与えられる C_{ijkl} の反対称部分の 15 々の独立な成分は (10) 式と (11) 式の弾性エネルギーに何らの寄与もしない。

ここまでの導出における物理的な意味は以下のように要約できる。36 々の独立な弾性定数と、応力と歪の間の線型関係の存在を仮定し、一般力学についての初歩的な結果を適用することにより、弾性体を平衡状態から無限小だけ変形するのに要する仕事を計算すると、その結果として得られる仕事の表式は、対称部分の 21 々の独立な弾性定数のみが弾性エネルギーに寄与することを示している。

従って、次の 2 つの選択ができる：

(1) 如何なる一般性も失わずに、反対称部分 A_{ijkl} の 15 々の独立な成分をゼロにすることができる。

(2) 又は、15 々の反対称成分が弾性エネルギーや仮想仕事、運動方程式に何の寄与もしないことに留意しつつ、弾性テンソル C_{ijkl} が 36 々の独立な成分を持つものとして扱うことができる。

ここでいくつかの点について強調しておきたい。まず、現実的な地震学研究においては上述の前者を常に選ぶべきで、 C_{ijkl} の反対称部分の 15 々の独立な成分は如何なる観測量にも寄与しないので、それらを計算することによって時間を浪費する必要はない。しかしながら、純粋に理論的な立場からは、我々の出発点である一般化された Hooke の法則 (1) 式と全く矛盾がないので、

36ヶの独立な弾性定数を保持することも可能である。

次に、この後者のアプローチが熱力学の第一法則と全く矛盾がないことを示す。

§ 3. 熱力学の第一法則との整合性

保存系についての熱力学の第一法則は、変形においてなされる仕事に変形前と変形後の状態にのみ依存し、変形がなされた過程には依存しないことを要求する (FERMI, 1937, p. 11-12). 36 個の独立な弾性定数が許されるという GELLER (1988) の結果は FERMI が述べた要求と全く矛盾しないことを示す. (11) 式を微分することにより仮想変位 δu_i による仮想仕事の式を得る.

$$\begin{aligned} \delta E &= \int d\left(\frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l}\right) dV \\ &= \int \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{klij}) u_{k,l} \delta u_{i,j} dV \end{aligned} \quad (13)$$

(13) 式は完全微分なので、任意の初期変位場 $u_i^{(0)}$ から任意の最終変位場 $u_i^{(1)}$ まで変形するのに要するエネルギーは経路によらず、

$$\Delta E = \int \frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{i,j}^{(1)} - u_{i,j}^{(0)}) dV - \int \frac{1}{2} C_{ijkl} u_{i,j}^{(0)} dV \quad (14)$$

となる。従って、GELLER (1988) の結果は熱力学の第一法則と全く矛盾しない。

§ 4. 鈴木氏の主張の問題点

鈴木 (1989) は、彼の (6) 式 $dW = \alpha_{ij} de_{ij}$ を要求するため、GELLER (1988) の結果は正しくないと主張した。ところが、この (6) 式を彼の (1) から (5) 式に基づいて、導いたわけではなく、むしろ単に以前に発表された式を引用したことに注意すべきである。実際に、鈴木 (1989) の (1) から (5) 式から得られる弾性エネルギー W は本論文の (8) 式である。 (8) 式の微分をとると、得られるのは鈴木 (1989) の (6) 式ではなく次式のようになる。

$$dW = \frac{1}{2} (\alpha_{ij} de_{ij} + d\alpha_{ij} e_{ij}) = \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{klij}) e_{kl} de_{ij} \quad (15)$$

これは鈴木 (1989) の (6) 式が誤りであることを証明し、従って彼の論文の残りの議論は正しくない。

§ 5. 混乱の原因

3つの変数 P, T, V のうちのいずれか2つによって定義される保存系 (いわゆる ideal gas) の仮想仕事は次式のように示される (FERMI, 1937, p. 19-20).

$$dW = PdV$$

いくつかの文献では (15) 式のスカラー P をテンソル α_{ij} に、スカラー dV をテンソル de_{ij} にただ単に置き換えることによって、弾性論における dW の表式を得ている。しかし、このように一般化することが道理にあっていないように見えるとはいえず、実際にはこのことについて何の正当性もない。基本原理から導くと、得られる式は鈴木 (1989) の (6) 式でなく、上記の (15) 式となる。これが混乱の原因である。

§ 6. 結 論

(1) GELLER (1988) の結論が正しく、鈴木 (1989) による異議は矛盾していることが証明された。

(2) 一般化された Hooke の法則と 36ヶの独立な弾性定数を出発点に、弾性エネルギーについての簡単な計算を行うことによって、弾性テンソルの対称部分の 21ヶの独立な成分のみが寄与する弾性エネルギーの式を得ることを証明した。この方法では熱力学の第一法則を表立って導入せずに、しかも全くそれらに矛盾しない結果が得られる。

謝 意

岡野憲太氏からは内容又は日本語の表現についていろいろ示唆を受けました。感謝の意を表します。

文 献

- FERMI, E., 1937, Thermodynamics, Prentice-Hall (reprinted by Dover Publications Inc., New York).
GELLER, R. J., 1988, On the derivation of the elastic equation of motion, J. Phys. Earth, 36, 201-228.
鈴木保典, 1989, Hooke 弾性体の独立な弾性定数は 21ヶか 36ヶか?, 地震 2, 42, 521-524.