ゲラー氏のコメントに 対する返答

東京大学理学部地球物理学教室*

鈴木 保典

Reply to the Comment by R. J. Geller

Yasunori SUZUKI

Geophysical Institute, Faculty of Science,
The University of Tokyo, Yayoi 2-11-16,
Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

(Received June 19, 1990;

Accepted August 1, 1990)

ゲラー (1990) は、表面力によって為される仕事を計算し、36 個の独立した弾性定数 ($C_{kl ij} \neq C_{ij kl}$) を持つ Hooke 弾性体に対する弾性エネルギーの表現式 (9), (10), および (11) を得たと主張している。そして、その表現式から導びかれる式 (15) が、鈴木 (1989) の議論の基礎に用いた式 ($dW = \sigma_{ij} de_{ij}$) と矛盾しているから、鈴木 (1989) の議論は誤りであると結論づけている。しかしながら、ゲラー (1990) の弾性エネルギーに関する議論が誤りであることは、SUZUKI (1990) が既に示した定理「36 個の独立な弾性定数を持つ Hooke 弾性体に於いては、外力の為す仕事の値は、例え最終的な歪状態が同じでも歪の経路に依存し、一意には定まらない。」から明らかである。即ち、36 個の独立な弾性定数を持つ Hooke 弾性体では、歪の経路に依らず、最終歪値と弾性定数によって一意的に表されるような (状態量としての) 弾性エネルギーは存在しない (定義できない) のである。存在しない物理量の表現式は、物理学的に無意味である。従って、ゲラー (1990) の (9) 式から (15) 式までは、彼が主張するように $C_{kl ij} \neq C_{ij kl}$ であるならば、物理学的に何の意味も無い式である。

後出の付録 (1) では、36 個の独立な弾性定数を持つ Hooke 弾性体の場合、同じ最終歪状態に到達する 3 つの異なる歪経路に対して、外力の為す仕事の値が異なってくる 2 つの具体例 [SUZUKI (1990)] を示す。次に、SUZUKI (1990) で証明を省略した 2 番目の例について計算し、ゲラー (1990) の仕事の式 (5), (6), (7), および (8) が、 $C_{kl ij} \neq C_{ij kl}$ の場合には、歪の経路に依らず一般的に成

り立つ式ではないことを指摘する。

またゲラー (1990) は、弾性体に対して外力の為す仕事を $d'A = \int d'W dV$ と表した時 $d'W = \sigma_{ij} de_{ij}$ と書けることは、証明されていないと主張している。その論拠は、弾性体に対する $d'W = \sigma_{ij} de_{ij}$ という表現式が、気体に対する $d'W = -pdv$ という表現式からの類推に基づき、単に $-p$ を σ_{ij} に、 dv を de_{ij} に置き換えたものに過ぎないというものである。しかし、弾性体に対して外力の為す仕事を、気体に対する式から単に上記の置き換えをして導いているだけという、まともな教科書は無い。例えば、LOVE (1944) に於いても AKI and RICHARDS (1980) に於いても、動的問題に熱力学第 1 法則を適用した箇所で、 $d'W = \sigma_{ij} de_{ij}$ に相当する式をきちんと導いている。付録 (2) では、(準) 静的問題に対してこの式を導びいて置く。この小論では、必ずしも完全微分とは限らない微小量を表現するのに d' を、完全微分を表現するには d を使用している事に注意されたい。

付録 (3) では、鈴木 (1989) が議論の出発点とした $dW = \sigma_{ij} de_{ij}$ は Hooke 弾性体に弾性エネルギーが存在する (即ち、保存系である) 事と全く等価であることを示す。これにより、鈴木 (1989) の議論には何の誤りも無いことは明らかである。

ゲラー (1990) は「古典弾性論に混乱がある」と言っているが、何か混乱があるとすれば、ばねからの単なる類推で、「仕事は歪の経路に関わりなく常に $\frac{1}{2} \times$ 最終力 $\times$ 最終変位で与えられる」と仮定しているゲラー (1990) の (5) 式がその原因である。この誤った仮定から、「36 個の独立した Hooke 弾性体に弾性エネルギーが存在する」という、GELLER (1988), ゲラー (1990) の誤った結論 (熱力学第 1 法則に違反する結論) が導かれたのである。我々は積分法を知っているのであるから、仕事を最終状態量ですぐさま表現しようとしなくて、微小仕事を積分するという物理学の基本的方法に依って仕事を計算すべきである。Hooke 弾性体では、積分して得られる仕事は、歪の経路に関わりなく $\frac{1}{2} \times$ 最終力 $\times$ 最終変位と表現できるのは保存系に限るのであって、この時独立な弾性定数は 21 個である事は、付録 (3) で $dW = \sigma_{ij} de_{ij}$ が Hooke 弾性体に弾性エネルギーが存在する為の必要充分条件であることを証明した時点で明らかとなる。

付録 (1). 独立な弾性定数が 36 個の Hooke 弾性体には、弾性エネルギーが存在しない

ここでは、まず 36 個の独立な弾性定数を持つ Hooke 弾性体では、同じ最終歪状態に到達する 3 つの異なる歪経路に対して仕事は異なってくるという、2 つの具体例 [SUZUKI (1990)] を示す。次に、SUZUKI (1990) で証明を

* 〒113 東京都文京区弥生 2-11-16

省いた 2 番目の例について計算し、ゲラー (1990) の仕事の式 (5), (6), (7), および (8) が, $C_{klij} \neq C_{ijkl}$ の場合には正しくないことを示す。

弾性体の単位体積を考えて, その表面を $x_1 = \pm(1/2)$, $x_2 = \pm(1/2)$, $x_3 = \pm(1/2)$ とする。初期平衡状態 (0) では, 歪も応力も共に 0 であり, 変位はこの状態から測る。最終の平衡状態 (3) に到達する途中の 2 つの中間平衡状態を各々 (1) と (2) とする。歪の経路 (I) は状態 (0) から (1) を経て (3) に到達するものであり, 経路 (II) は状態 (0) から (2) を経て (3) に到達し, 経路 (III) は状態 (0) から (3) に直接に到達するものとする。以上の 3 経路について表面力によって為される (機械的) 仕事を, それぞれ A_I , A_{II} , A_{III} とする。

例 1. 状態 (1): $u_1 = \epsilon_1 x_1$, $u_2 = u_3 = 0$,

状態 (2): $u_1 = 0$, $u_2 = \epsilon_2 x_2$, $u_3 = 0$,

状態 (3): $u_1 = \epsilon_1 x_1$, $u_2 = \epsilon_2 x_2$, $u_3 = 0$.

$$A_I = (1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2 + C_{2222}\epsilon_2^2) + C_{2211}\epsilon_1\epsilon_2$$

$$A_{II} = (1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2 + C_{2222}\epsilon_2^2) + C_{1122}\epsilon_1\epsilon_2$$

$$A_{III} = (1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2 + C_{2222}\epsilon_2^2) \\ + (1/2)(C_{1122} + C_{2211})\epsilon_1\epsilon_2$$

この結果は, 既に Suzuki (1990) の Appendix で導いてある。

例 2. 状態 (1): $u_1 = \epsilon_1 x_1$, $u_2 = u_3 = 0$,

状態 (2): $u_1 = 0$, $u_2 = (1/2)\epsilon_2 x_3$, $u_3 = (1/2)\epsilon_2 x_2$,

状態 (3): $u_1 = \epsilon_1 x_1$, $u_2 = (1/2)\epsilon_2 x_3$,

$$u_3 = (1/2)\epsilon_2 x_2.$$

$$A_I = (1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2 + C_{2323}\epsilon_2^2) + C_{2311}\epsilon_1\epsilon_2$$

$$A_{II} = (1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2 + C_{2323}\epsilon_2^2) + C_{1123}\epsilon_1\epsilon_2$$

$$A_{III} = (1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2 + C_{2323}\epsilon_2^2) \\ + (1/2)(C_{1123} + C_{2311})\epsilon_1\epsilon_2$$

上記の 2 つの具体例は, $C_{klij} \neq C_{ijkl}$ の場合には, A_I , A_{II} , A_{III} が互いに異なる値を取る事を示している。従って, $C_{klij} \neq C_{ijkl}$ の場合にも, 外力の為す仕事の値が歪経路に依らず一意的に定まるとするゲラー (1990) の主張 [(7) および (8) 式] は誤りである。

以下では例 2 についての結果を導びく。今の場合, 変位は, $u_1 = f(s)\epsilon_1 x_1$, $u_2 = g(s)(1/2)\epsilon_2 x_3$ および $u_3 = g(s)(1/2)\epsilon_2 x_2$ と表せる。ここで, $f(s)$ と $g(s)$ は, 変形過程を表すパラメタ $s(0 \leq s \leq 1)$ の連続で一階微分可能な関数であり, 次の条件を満足する。 $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$ 。このような関数 $f(s)$ と $g(s)$ を用いれば, $e_{11} = f(s)\epsilon_1$, $e_{23} = e_{32} = (1/2)g(s)\epsilon_2$ となり, 他の歪テンソル成分は 0 である。一方応力テンソル成分は, $\sigma_{ij} = C_{ij11}f(s)\epsilon_1 + C_{ij23}g(s)\epsilon_2$ で与えられる。よく知られているように, 表面力は $T_i = \sigma_{ij}n_j$ という Cauchy の関係式で与えられる。ここに, n_j は表面に於ける外向き単位法線ベクトルである。

(i) $x_1 = \pm(1/2)$ の表面における外力の為す仕事の合計。

$$T_i = \pm \sigma_{i1} = \pm (C_{1111}f(s)\epsilon_1 + C_{1123}g(s)\epsilon_2),$$

$$du_1 = \pm(1/2)\epsilon_1 df(s), \quad du_2 = (1/2)\epsilon_2 x_3 dg(s),$$

$$du_3 = (1/2)\epsilon_2 x_2 dg(s).$$

変形過程を表すパラメタ s が ds だけ増加する際に, $dx_2 dx_3$ の微小面積に働く表面力の為す仕事は $x_1 = \pm(1/2)$ の各面に対して,

$$T_i du_i = (C_{1111}f(s)\epsilon_1 + C_{1123}g(s)\epsilon_2)(1/2)\epsilon_1 df(s)$$

$$dx_2 dx_3$$

$$\pm (C_{2111}f(s)\epsilon_1 + C_{2123}g(s)\epsilon_2)(1/2)\epsilon_2 x_3 dg(s) dx_2 dx_3$$

$$\pm (C_{3111}f(s)\epsilon_1 + C_{3123}g(s)\epsilon_2)(1/2)\epsilon_2 x_2 dg(s) dx_2 dx_3$$

で与えられる。上式右辺の第 2 項, 第 3 項はそれぞれ x_3 , x_2 の奇関数であるから, x_3 , x_2 に関してそれぞれ $-(1/2)$ から $(1/2)$ まで積分すれば寄与は 0 である。結局, $x_1 = \pm(1/2)$ の両面を通して外力の為す仕事の合計は,

$$A(x_1 = \pm(1/2))$$

$$= 2 \int (C_{1111}f(s)\epsilon_1 + C_{1123}g(s)\epsilon_2)$$

$$\times (1/2)\epsilon_1 df(s) \int \int dx_2 dx_3$$

$$= (1/2)C_{1111}\epsilon_1^2 + C_{1123}\epsilon_1\epsilon_2 \int g(s)df(s)$$

(ii) $x_2 = \pm(1/2)$ の表面における外力の為す仕事の合計。

$$T_i = \pm \sigma_{i2} = \pm (C_{i211}f(s)\epsilon_1 + C_{i223}g(s)\epsilon_2),$$

$$du_1 = \epsilon_1 x_1 df(s), \quad du_2 = (1/2)\epsilon_2 x_3 dg(s),$$

$$du_3 = \pm(1/4)\epsilon_2 dg(s).$$

結局, $x_2 = \pm(1/2)$ の両面を通して外力の為す仕事の合計は,

$$A(x_2 = \pm(1/2))$$

$$= 2 \int (C_{3211}f(s)\epsilon_1 + C_{3223}g(s)\epsilon_2)(1/4)\epsilon_2 dg(s)$$

$$= (1/4)C_{3223}\epsilon_2^2 + (1/2)C_{3211}\epsilon_1\epsilon_2 \int f(s)dg(s)$$

(iii) $x_3 = \pm(1/2)$ の表面における外力の為す仕事の合計。

$$T_i = \pm \sigma_{i3} = \pm (C_{i311}f(s)\epsilon_1 + C_{i323}g(s)\epsilon_2),$$

$$du_1 = \epsilon_1 x_1 df(s), \quad du_2 = \pm(1/4)\epsilon_2 dg(s),$$

$$du_3 = \epsilon_2 x_2 dg(s).$$

結局, $x_3 = \pm(1/2)$ の両面を通して外力の為す仕事の合計は,

$$A(x_3 = \pm(1/2))$$

$$= 2 \int (C_{2311}f(s)\epsilon_1 + C_{2323}g(s)\epsilon_2)(1/4)\epsilon_2 dg(s)$$

$$=(1/4)C_{2323}\epsilon_2^2+(1/2)C_{2311}\epsilon_1\epsilon_2\int f(s)dg(s).$$

以下に示すように、 $\int f(s)dg(s)$ は、経路の取り方によって、少なくとも 0, 1/2, 1 と 3 通りの値を取る。(iii) の場合についてのゲラー (1990) の (6) 式は、単位体積当たり $(1/4)C_{2323}\epsilon_2^2+(1/4)C_{2311}\epsilon_1\epsilon_2$ の仕事を与えるから、 $x_3 = \pm(1/2)$ の両面を通して外力の為す仕事の合計を正しく表現してはいない。ゲラー (1990) の (5) 式も、単に (6) 式の $\frac{1}{2}$ であるから、 $x_3=1/2$ の上面を通して外力の為す仕事を正しく表現していないことは言うまでもない。

(i), (ii), (iii) で求めた 6 つの表面での仕事を合計して次式を得る。

$$A=(1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2+C_{2323}\epsilon_2^2) \\ + (C_{1123}\int gdf + C_{2311}\int fdg)\epsilon_1\epsilon_2.$$

この式を用いて、 $f(s)$ および $g(s)$ に適当な形を与えれば、経路 (I), (II), (III) に対して外力の為す仕事が求められる。

経路 I: 状態 (0) → 状態 (1) → 状態 (3)

$$f(s)=1(0\leq s\leq 1), g(s)=0(0\leq s\leq (1/2)),$$

$$\int g(s)df(s)=0, \int f(s)dg(s)=1.$$

従って、経路 (I) に対しては、 $A_I=(1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2+C_{2323}\epsilon_2^2+C_{2311}\epsilon_1\epsilon_2)$

経路 II: 状態 (0) → 状態 (2) → 状態 (3)

$$f(s)=0(0\leq s\leq (1/2)), g(s)=1((1/2)\leq s\leq 1),$$

$$\int g(s)df(s)=1, \int f(s)dg(s)=0.$$

従って、経路 (II) に対しては、 $A_{II}=(1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2+C_{2323}\epsilon_2^2+C_{1123}\epsilon_1\epsilon_2)$

経路 III: 状態 (0) → 状態 (3)

$$f(s)=g(s)(0\leq s\leq 1),$$

$$\int g(s)df(s)=\int f(s)dg(s)=(1/2).$$

従って、経路 (III) に対しては、

$$A_{III}=(1/2)(C_{1111}\epsilon_1^2+C_{2323}\epsilon_2^2) \\ + (1/2)(C_{1123}+C_{2311})\epsilon_1\epsilon_2.$$

ゲラー (1990) は、上面を通して表面力の為す仕事として $W_{top} = \left(\frac{1}{2}\sigma_{ix}\delta x\delta y\right)\left(\frac{1}{2}u_{i,z}\delta z\right)$ なる式 [ゲラー (1990) の (5) 式] を提示している。ばねの場合には、外力 T は変位 u に比例するから、外力の為す仕事は $T-u$ 図における三角形の面積 $\frac{1}{2}T\mu_f$ (下添字 f は最終状態を示す) で与えられることは良く知られている。しかし、今の場合は、 $T_i=\sigma_{ix}$ はベクトルであり、 σ_{ix} は変位ベクトル成分 u_i ではなく、歪テンソル成分 e_{ki} の線形和であ

る ($\sigma_{ix}=C_{ikl}e_{kl}$)。だからどんな歪み方に対しても、仕事が上式で与えられるということにはならない。既示したように、ゲラー (1990) の (5) 式 (あるいは (6) 式) は例 2 のような簡単な最終歪状態に対しても $x_3=1/2$ の上面 (あるいは $x_3=\pm(1/2)$ の両面) を通して外力の為す仕事 (の合計) を正しく表現してはいない。同様に、この (5), (6) 式から導かれる (7), (8) 式も、外力の為す仕事の値を正しく表現していない事も既示された。

付録 (2). $d'W=\sigma_{ij}de_{ij}$ の導出

弾性体の (準) 静的変形を考える。(体積力 f_i , 表面力 $T_i(\mathbf{n})$, 変位 u_i) の状態から $(f_i+df_i, T_i(\mathbf{n})+dT_i(\mathbf{n}), u_i+du_i)$ の状態に変化した時に、外力が弾性体に対して為す仕事は

$$d'A = \int f_i du_i dV + \int T_i(\mathbf{n}) du_i dS \\ = \int f_i du_i dV + \int \sigma_{ij} n_j du_i dS \\ = \int \{f_i du_i + (\sigma_{ij} du_{i,j})\} dV \\ = \int \{(f_{ij} + \sigma_{ij,j}) du_i + \sigma_{ij} du_{i,j}\} dV \\ = \int \sigma_{ij} de_{ij} dV = \int d'W dV$$

で与えられる。ここで、式の変形には、Cauchy の関係式 $T_i(\mathbf{n})=\sigma_{ij}n_j$, Gauss の定理 $\int \Phi n_j dS = \int \Phi_{,j} dV$, 平衡 (釣合) 方程式 $f_i + \sigma_{ij,j} = 0$, 応力テンソルの対称性 $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, 微小歪テンソルの定義式 $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ を使用した。体積 V を取り囲む閉曲面 S の法線ベクトル $\mathbf{n}$ は外向きを取っている。

上に導びいた最後の表現式は、外力の為す仕事 $d'A$ は弾性体の単位体積当たり $d'W=\sigma_{ij}de_{ij}$ として体積積分すれば求められる事を示している。これは応力の平衡方程式を満足し、応力テンソルの対称性が成立する弾性体ならば、Hooke 弾性体 (36 個の独立な弾性定数を持ってもよい) に限らず成立することは導き方から明らかである。SUZUKI (1990) 及び本稿の付録 (1) では、体積力 f_i がいない場合について、表面力 $T_i(\mathbf{n})$ の為す仕事を定義どおり表面積分で計算したが、この表現式を使えば、もっと簡単に最終的な仕事の表現式を得ることができる。付録 (1) の例 2 については、 $d'W=\sigma_{11}de_{11}+\sigma_{23}de_{23}+\sigma_{32}de_{32}=C_{1111}\epsilon_1^2 df + (C_{1123}g df + C_{2311}fdg)\epsilon_1\epsilon_2 + C_{2323}\epsilon_2^2 dg$ となるから、後は各々の歪過程について積分するだけである。なお、念のために付け加えれば、この (準静的) 過程は、弾性体が初めの平衡状態から終りの平衡状態へ変形する実際の過程なのであって、その際

に弾性体に生ずる変位は実際の (actual) 変位であり、仮想 (virtual) 変位などではない。

付録 (3). Hooke 弾性体が (力学的) 保存系であるための必要充分条件

Hooke 弾性体が (力学的) 保存系であるとは、弾性 (歪み) エネルギーという状態量が定義出来る (存在する場合) を言う。Hooke 弾性体に関して次の 3 つの命題は全く等価である。

- (I) (力学的) 保存系である。
- (II) $dW = \sigma_{ij} de_{ij}$ を満足する W が存在する。ただし、左辺は W の完全微分を意味する。
- (III) 独立な弾性定数は $C_{kl ij} = C_{ij kl}$ により最大限 21 個である。

鈴木 (1989) は、既に (II) と (III) の等価性を示している。しかしゲラー (1990) は、保存系に対して (II) が成立しないと主張しているので、ここでは (I) と (II) は等価であることを示す。

そもそも、考えている系が (力学的) 保存系であるというのは、外界の為す仕事の値が、歪みの経路に関わりなく、一意に定まるということである。言い換えると、歪空間内の任意の閉曲線を考えた時、その閉曲線に沿って外力の為す仕事が 0 になるということである。そのための必要充分条件は、付録 (3) の $d'W$ 、即ち $\sigma_{ij} de_{ij}$ が何かある関数 (少し紛らわしいが歪エネルギー関数を W と表現するのが慣例なのでそれに従う) の完全微分になっているということである。

$$\sigma_{ij} de_{ij} = dW$$

この関係が成立していれば任意の閉曲線に沿って外力の為す仕事は

$$\begin{aligned} \oint_{(e)} d'A &= \oint_{(e)} \int_V d'W dV = \oint_{(e)} \int_V \sigma_{ij} de_{ij} dV \\ &= \oint_{(e)} \int_V dW dV = \int_V \oint_{(e)} dW dV = \int_V 0 dV = 0 \end{aligned}$$

となり、充分条件であることは明らかである。また必要条件の方も、 $\sigma_{ij} de_{ij}$ の原点からの任意の経路に沿った線積分の値が、経路の終点のみで定まることから、 $\int \sigma_{ij} de_{ij} = W$ と書け、これを微分すれば、 $\sigma_{ij} de_{ij} = dW$ を得ることから明らかである。

[(II) の表現について本来的には、6 成分法を用いた $dW = \sum_{r=1}^6 \tau_r d\epsilon_r$ の形のほうが数学的には好ましいというのが鈴木 (1989) の立場である。しかし、ここでは計算の便りを優先させた。以上の議論の途中で、対称歪テンソルの独立な成分は 6 個であることが気になる人は、その箇所で 6 成分法の表現を用いれば、議論に曖昧な点は何も無いことが分かる筈である。]

参考文献

- AKI, K. and P. G. RICHARDS, 1980, Quantitative Seismology: Theory and Methods, Vol. 1, W. H. Freeman, San Francisco.
- GELLER, R. J., 1988, On the derivation of the elastic equation of motion, J. Phys. Earth, **36**, 201-228.
- ゲラー ロバート, 1990, 鈴木保典氏の「Hooke 弾性体の独立な弾性定数は 21 ケか 36 ケか?」についてのコメント, 地震 **2**, **43**, 133-135.
- LOVE, A. E. H., 1944, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, (4th ed.), Dover, New York.
- 鈴木保典, 1989, Hooke 弾性体の独立な弾性定数は 21 ケか 36 ケか?, 地震 **2**, **42**, 521-524.
- SUZUKI, Y., 1990, Comment on "On the derivation of the elastic equation of motion" by R. J. Geller, Jour. Phys. Earth, **38**, 179-186.