異方性弾性体の固有周波数を 計算するための SEF と XYZ 法の比較

岡山大学理学部地学科*

小田 仁

ロスアラモス国立研究所**

W. M. ビッシャー

Comparison between SEF and XYZ Algorithms for
Computation of Eigenfrequencies of Elastically
Anisotropic Solid

Hitoshi Oda

Department of Earth Sciences, Faculty of Science,
Okayama University, 3-1-1, Tsushima-Naka,
Okayama-shi 700, Japan

William M. VISSCHER

Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New
Mexico 87545, U.S.A.

(Received January 19, 1994;

Accepted April 2, 1994)

§ 1. はじめに

球形の異方性弾性体の固有周波数をレーリー・リッツ法を用いて計算する方法は MOCHIZUKI (1988) によって開発された。この方法では、均質等方体である弾性球の自由振動の固有関数が基底関数として用いられている。ISODA *et al.* (1990) はこの方法を用いて球形単結晶ルチル（正方晶系）の固有周波数を計算し、計算値が測定した固有周波数と良く一致することを示した。しかし、球形等方弾性体の自由振動の固有関数のように複雑な関数を基底関数として用いた場合には、歪エネルギーや運動エネルギーの行列要素の計算に時間がかかりすぎるという欠点がある。ところで、レーリー・リッツ法で用いられる基底関数の選び方には制約がないはずであるから、計算時間を短縮するためには、歪エネルギーや運動エネルギーの行列要素を計算しやすいように基底関数を選ぶことが重要である。この様な考え方に基づいて、VISSCHER *et al.* (1991) は、 $x^l y^m z^n$ の形の基底関数を用いることを提案した。この方法は、球形だけでなく様々な形を

した弾性体の固有周波数を計算することができるという利点がある。ここでは、彼等の計算方法“XYZ 法”と MOCHIZUKI (1988) が開発した方法（ここでは“SEF 法”とよぶことにする）を比較する。

§ 2. 固有周波数の比較

SEF 法と XYZ 法による固有周波数の計算の具体的な手順については ISODA *et al.* (1990) と VISSCHER *et al.* (1991) を参照していただきたい。ここでは、両方の方法で計算した固有周波数の比較を行う。SEF 法の基底関数には、解の収束性を比べるためにポアソン比が 0.19 のときの球形等方弾性体の自由振動の固有関数を用いる。球形等方弾性体の自由振動はスフェロイダルモード ${}_n S_l^m$ とトロイダルモード ${}_n T_l^m$ に分けられる。ここで、 n, l, m は動径方向、緯度方向、経度方向の次数を表す。今回の計算では、 $n=5, l=9$ までの固有関数 1188 個を SEF 法の基底関数として用いた。一方、XYZ 法の基底関数の数は、 $x^l y^m z^n$ の指数の和 ($l+m+n$) を 11 とした場合の 1092 個である。したがって、両方の計算方法に用いる基底関数の個数はほぼ同じである。

球形等方弾性体（ポアソン比 0.25）の固有周波数を XYZ 法と SEF 法で計算し、解析的に求めた固有周波数と比較した (Fig. 1 参照)。計算に用いた弾性率を Table 1 に示す。両方の方法で計算したトロイダルモードの固有周波数は解析解と一致した。しかし、スフェロイダルモードについては、XYZ 法で求めた周波数の方が解析解に近く、SEF 法で求めた固有周波数は解析解よりも大きい

Fig. 1. Differences between spheroidal eigenfrequencies of ${}_n S_l^0$ modes ($l=2$ to 11), which are computed for an elastically isotropic sphere by the SEF and XYZ algorithms and by the analytic solution. The open and solid circles are the frequency differences, $f_{XYZ}-f$ and $f_{SEF}-f$, respectively, where f is the analytic solution of eigenfrequency and f_{SEF} and f_{XYZ} are those computed by the SEF and XYZ algorithms.

* 〒700 岡山市津島中 3-1-1

** Los Alamos, NM87545, USA

Table 1. Radii, densities and elastic constants of olivine, rutile, periclase and isotropic spheres.

Specimen	Olivine	Rutile	Periclase	Isotropic Solid
Radius (mm)	0.8930	4.0970	2.0568	1.0
Density (g/cm ³)	3.350	4.2539	3.5886	3.0
Easltic Constants (GPa)	(1)	(2)	(3)	(4)
C ₁₁	323.67	266.0	296.6	300.0
C ₂₂	197.57	266.0	296.6	300.0
C ₃₃	235.13	469.9	296.6	300.0
C ₄₄	64.62	123.9	156.2	100.0
C ₅₅	78.65	123.9	156.2	100.0
C ₆₆	79.04	188.6	156.2	100.0
C ₂₃	75.6	136.2	95.9	100.0
C ₃₁	71.6	136.2	95.9	100.0
C ₁₂	66.4	173.4	95.9	100.0

Data sources of the elastic constants are (1) KUMAZAWA and ANDERSON (1969), (2) WACHTMAN *et al.* (1962) and (3) SUMINO *et al.* (1983). The elastic constants of isotropic solid are assumed.

Fig. 2. Difference, $f_{SEF} - f_{XYZ}$, between the eigenfrequencies computed by the SEF and XYZ algorithms for olivine (open circles), rutile (solid circles) and periclase (crosses).

傾向が見られる。もしもポアソン比を 0.25 とした場合の固有関数を基底関数に用いたときには、SEF 法で求めた計算値は解析解と当然一致する。したがって、SEF 法で弾性球の固有周波数を精度良く計算するためには、その試料のポアソン比に対する自由振動の固有関数を基底関数に選ぶ必要があるといえる。カンラン石（斜方晶系）、ルチル（正方晶系）、ペリクレーズ（立方晶系）の球形試料の固有周波数を XYZ 法と SEF 法で計算し、その差を振動モード順に Fig. 2 に示した。それぞれの球の密度、半径、弾性率を Table 1 に示す。SEF 法で求めた固有周波数は、XYZ 法で求めた周波数よりも高いことが分かる。一般に、レーリー・リッツ法で求めた固有値は真の固有値よりも大きく求まる傾向があるので [佐藤 (1978)], SEF 法は XYZ 法よりも固有値の収束が悪く、固有周波数の計算精度が良くないと考えられる。もちろ

ん、基底関数の数を増やしたり適当なポアソン比を用いることにより、SEF 法でも高い精度の固有値を得ることができる。しかし、後で述べるようにこの方法では計算時間が長くなるので、基底関数の数を増加させることは得策ではない。

§ 3. 弾性率の比較

球形弾性体の弾性率は固有周波数の観測値と理論値を比較して求めることができる。このような弾性率の測定方法は球共振法 (RST) とよばれ、いくつかの異方性結晶の弾性率の測定に用いられている [Oda *et al.* (1992), 鈴木・他 (1992a), Suzuki *et al.* (1992b)]。ここでは、RST での固有周波数の計算に SEF 法と XYZ 法を用いて得られた弾性率を比較する。

測定データとしてはカンラン石、ルチル、ペリクレーズの球形試料の共振周波数を用いる。これらの試料の弾性率は SEF 法を RST に用いて既に求められているので [Oda *et al.* (1989), 鈴木・他 (1992a), Suzuki *et al.* (1992b)], その弾性率を Table 2 に示す。また、同じ測定共振周波数をデータとし、XYZ 法を適用して得た弾性率も Table 2 に示す。得られた弾性率は両方ともほぼ一致しているが、その誤差はルチル、ペリクレーズでは XYZ 法の方が SEF 法に比べて一桁小さいことが分かる。これは、XYZ 法を用いた場合の共振周波数の観測値と計算値の差の標準偏差が SEF 法を用いた場合のそれに比べて一桁小さいからである。すなわち、XYZ 法による固有値は計算精度がよいので、この方法を RST に用いると誤差の小さい弾性率を求めることができる。一方、カンラン石の場合には両方の標準偏差はほぼ同じで

Table 2. Comparison between the elastic constants obtained by using the SEF and XYZ algorithms in the RST.

Specimen	Olivine		Rutile		Periclase	
Number of Data	42		43		22	
Frequency (kHz)	2028-4352		351-1131		1088-2558	
Elastic Constants (GPa)	SEF ⁽¹⁾		SEF ⁽²⁾		SEF ⁽³⁾	
	XYZ		XYZ		XYZ	
C ₁₁	319.90±0.59	319.61±0.61	267.72±0.74	269.12±0.06	296.03±0.13	296.58±0.04
C ₂₂	196.96±0.57	197.32±0.58	267.72±0.74	269.12±0.06	296.03±0.13	296.58±0.04
C ₃₃	236.72±0.72	236.84±0.60	483.32±1.75	480.75±0.11	296.03±0.13	296.58±0.04
C ₄₄	63.94±0.06	64.06±0.06	123.36±0.16	123.88±0.01	155.86±0.05	156.02±0.02
C ₅₅	77.69±0.08	77.76±0.08	123.36±0.16	123.88±0.01	155.86±0.05	156.02±0.02
C ₆₆	78.27±0.08	78.34±0.08	192.29±0.39	193.40±0.02	155.86±0.05	156.02±0.02
C ₂₃	75.56±0.33	75.67±0.34	148.53±0.82	146.12±0.06	95.18±0.13	95.15±0.04
C ₃₁	71.04±0.36	70.92±0.36	148.53±0.82	146.12±0.06	95.18±0.13	95.15±0.04
C ₁₂	69.25±0.37	69.24±0.38	176.54±0.73	176.04±0.06	95.18±0.13	95.15±0.04
S.D. (kHz)	2.75	2.78	1.48	0.15	0.97	0.29

S.D.: Standard deviation of differences between the observed and computed eigenfrequencies. Data sources of elastic constants obtained by the SEF algorithm are (1) SUZUKI *et al.* (1992a), (2)SUZUKI *et al.* (1992b) and (3) ODA *et al.* (1989).

ある。これは、試料の形が回転楕円体に近く [鈴木・他 (1992a)], 試料の形状の誤差による固有周波数への影響が計算誤差よりも大きいためであると考えられる。

§ 4. 計算時間

固有周波数を求めるための計算時間は、XYZ 法では 1092 個の基底関数を用いたとき 20 秒程度であるのに対して、1188 個の基底関数を用いた SEF 法では約 2 時間である。この計算時間の差は、歪エネルギーや運動エネルギーの行列要素の計算に必要な時間の差である。各々のエネルギーの行列要素は異なる基底関数の積の体積積分、または、基底関数の空間微分の積の体積積分で表される。SEF 法ではこれらの体積積分は球座標で表され、球の緯度 θ や経度 ϕ に関する積分は解析的に表される。しかし、基底関数が球ベッセル関数を含む形で表されるために、球の動径 r に関する積分は数値的に行わなければならない。このことが、SEF 法による固有値の計算に時間がかかる原因である。一方、XYZ 法では各々の行列要素は解析的に表されるから [VISSCHER *et al.* (1991)], その計算に時間はあまりかからない。したがって、XYZ 法は SEF 法よりも球形弾性体の固有周波数を早く計算することができる。

§ 5. おわりに

SEF と XYZ 法を用いて計算した球形弾性体の固有周波数の比較を行った。その結果、基底関数の個数がほぼ同程度である場合には、XYZ 法は SEF 法よりも固有値の計算精度がよく、計算時間も格段に短い。したがって、XYZ 法を RST に用いた場合、高い精度で速やかに弾性率を測定することが出来る。

謝 辞

XYZ 法で弾性率を求める際に井上 靖氏の援助を受けた。また、査読者からのコメントは原稿の改訂に有益であった。これらの方々に感謝致します。計算は岡山大学情報処理センターで行った。

文 献

- ISODA, S., H. ODA, I. SUZUKI and K. SEYA, 1990, Displacement distribution of a freely oscillating rutile sphere, *Sci. Rep. Tohoku Univ.*, **5**, 32, 55-76.
 KUMAZAWA, M. and O. L. ANDERSON, 1969, Elastic moduli, pressure derivatives, and temperature derivatives of single-crystal olivine and single-crystal forsterite, *J. Geophys. Res.*, **74**, 5961-5972.
 MOCHIZUKI, E., 1988, Sphere-resonance method to determine elastic constants of crystal, *J. Appl. Phys.* **63**, 5668-5673.
 ODA, H., O. L. ANDERSON, D. G. ISAAK and I. SUZUKI,

- 1992, Measurements of elastic properties of single-crystal CaO up to 1200 K, *Phys. Chem. Min.*, **19**, 96-105.
- ODA, H., I. SUZUKI, S. ISODA and K. SEYA, 1989, An application of the resonant sphere technique to determine elastic constants of single crystal periclase, *EOS Trans. Am. Geophys. Union*, **70**, 1368.
- 佐藤泰夫, 1978, 弾性波動論, 岩波書店, 1-454.
- SUMINO, Y., O. L. ANDERSON and I. SUZUKI, 1983, Temperature coefficients of elastic constants of single crystal MgO between 80 and 1,300 K, *Phys. Chem. Min.*, **9**, 38-47, 1983.
- 鈴木 功・井上 靖・平尾淳一・小田 仁・斎藤俊明・瀬谷 清, 1992a, 球共振法による鉱物の弾性率と非弾性率の測定, *地震* **2**, **40**, 213-228.
- SUZUKI, I., H. ODA, S. ISODA, T. SAITO and K. SEYA, 1992b, Free oscillation of an elastic anisotropic sphere and its application to determining the elastic constants of rutile, *J. Phys. Earth*, **40**, 601-616.
- VISSCHER, W. M., A. MIGLIORI, T. M. BELL and R. A. REINERT, 1991, On the normal modes of free vibration of inhomogeneous and anisotropic elastic objects, *J. Acoust. Soc. Am.*, **90**, 2154-2162.
- WACHTMAN, J. B., JR., W. E. TEFFT and D. G. LAM, JR., 1975, Elastic constants of rutile (TiO_2), *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **64A**, 465-471.