寄 書

前兆評価の指標と地震前兆現象 の有意性との関係について

防災科学技術研究所*

井元政二郎

Relation between the Precursor Information
Criterion and the Level of Significance of
Precursory Phenomena

Masajiro IMOTO

National Research Institute for Earth Science
and Disaster Prevention, Tennodai 3-1,
Tsukubashi, Ibaraki, 305, Japan

(Received July 15, 1996;

Accepted December 3, 1996)

§1. はじめに

現在、提案あるいは研究されている地震発生の予測方法として、特定の現象の出現に拠って予測を行う方法がある。この場合、その現象が生起する時空間領域の一点において、地震発生が期待されることになる。そのような予測が何度かなされ、観測により各予測の当否が判明すると、当該予測手法の妥当性を統計的に検証することが可能となる。この検証には、二項分布を用いた統計的有意性の検定が一般的で簡便である [例えば、宇津 (1975)]。これとは異なる観点として、井元 (1994) は地震発生予測とは、観測された地震分布に対して適合度の高い地震発生率分布予測モデルを構築する問題であると考えた。そして、適合度を表す指標として、尤度関数から導かれた前兆評価の指標 PIC (Precursor Information Criterion) を提案した。

ここでは、二項分布を用いた統計検定における有意水準と PIC との関連について報告する。

§2. 二項分布検定

調査対象の領域 V_0 に、予測対象と同じ属性の地震が N_0 個発生しているとし、このデータにもとづいて、ある予測手法により合計 V_a の時空間領域に地震発生が予測されていたとする。予測された領域に実際に発生した

地震は N_a 個であったとする。当該予測手法がなんらかの意味を持つ場合には、予測により指定された領域とそれ以外の領域では、地震発生率に差が有ると考えられる。地震発生率の差の有無は、二項分布を用いて検定することができる [宇津 (1975)]。

帰無仮説として地震の発生率は全領域 V_0 で一定であるとする。このとき、 V_a 内に N_a 個以上の地震が観測される確率 $P(\geq N_a)$ が一定値 (有意水準) より小さければ、仮説を棄却することになる。その場合は、当該の予測手法は意味のあるものと考えられる。ちょうど N_a 個の地震が観測される確率 $p(N_a)$ は、

$$p(N_a) = \binom{N_0}{N_a} \left(\frac{V_a}{V_0}\right)^{N_a} \left(1 - \frac{V_a}{V_0}\right)^{N_0 - N_a} \quad (1)$$

となる。従って、確率 $P(\geq N_a)$ は次の式で与えられる:

$$P(\geq N_a) = \sum_{i=N_a}^{N_0} \binom{N_0}{i} \left(\frac{V_a}{V_0}\right)^i \left(1 - \frac{V_a}{V_0}\right)^{N_0 - i} \quad (2)$$

§3. 前兆評価の指標

地震発生率が全領域で一定だとすると、その最尤推定値は、 N_0/V_0 となる。 N_a 個の地震が V_a に、 $N_0 - N_a$ 個が $V_0 - V_a$ に観測される場合の尤度 L_0 は、

$$L_0 = \frac{e^{-V_a N_0/V_0} (V_a N_0/V_0)^{N_a}}{N_a!} \times \frac{e^{-(V_0 - V_a) N_0/V_0} ((V_0 - V_a) N_0/V_0)^{N_0 - N_a}}{(N_0 - N_a)!} \quad (3)$$

で与えられる。整理すると、

$$L_0 = \frac{e^{-N_0 (N_0/V_0)^{N_0}} (V_a)^{N_0} (V_0 - V_a)^{N_0 - N_a}}{N_a! (N_0 - N_a)!} \quad (4)$$

となる。

次に、予測により指定された領域とそれ以外の領域では地震発生率に差がある場合を考える。地震発生率の最尤推定値は、 V_a では N_a/V_a となり、 $V_0 - V_a$ では $(N_0 - N_a)/(V_0 - V_a)$ となる。この場合の尤度 L_1 は、

$$L_1 = \frac{e^{-N_a (N_a/V_a)^{N_a}} (N_a)^{N_a}}{N_a!} \cdot \frac{e^{-(N_0 - N_a) (N_0 - N_a)/(V_0 - V_a)^{N_0 - N_a}} (N_0 - N_a)^{N_0 - N_a}}{(N_0 - N_a)!} \\ = \frac{e^{-N_0 N_a/V_a} (N_a)^{N_a} (N_0 - N_a)^{N_0 - N_a}}{N_a! (N_0 - N_a)!} \quad (5)$$

となる。尤度の比 L_1/L_0 を求めると、

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{N_a}{V_a}\right)^{N_a} \left(\frac{N_0 - N_a}{V_0 - V_a}\right)^{N_0 - N_a} \left(\frac{V_0}{N_0}\right)^{N_0} \quad (6)$$

を得る。

前兆評価の指標 PIC [井元 (1994)] を尤度比 L_1/L_0 を用いて表すと、

$$\text{PIC} = 2 \times \ln \left(\frac{L_1}{L_0} \right) - C_1 - \alpha N \quad (7)$$

となる。 C_1 は、モデルパラメータ数の差を2倍した値で

* 〒305 茨城県つくば市天王台 3-1

あり、ここでは2となる。N は、Na や Va の選択を通じて PIC の最大化に関与したパラメータの数であり、 α は N_0 に関係した定数 (3 前後) である。No, Na, Vo, Va が PIC の最大化に関与しない場合には第3項の寄与はないので、ここではこの項を考慮しないこととする。この場合、PIC は情報量規準 [坂元・他 (1983)] の差 (以下 dAIC と記す) と等価になる。すなわち、

$$PIC = dAIC = 2 \times \ln \left(\frac{L_1}{L_0} \right) - 2 \quad (8)$$

である。

§ 4. 確率 $P(\geq Na)$ と PIC の比較

4.1 $Na = No$ の場合

確率 $P(\geq Na)$ は $p(N_0)$ と等しくなり、

$$p(N_0) = \left(\frac{Va}{Vo} \right)^{N_0} \quad (9)$$

となる。また、尤度比 L_1/L_0 は式 (6) から

$$\frac{L_1}{L_0} = \left(\frac{Vo}{Va} \right)^{N_0} \quad (10)$$

となる。式 (9) と式 (10) は逆数の関係にあり、

$$PIC = 2 \times \ln \frac{1}{p(N_0)} - 2 \quad (11)$$

の関係を得る。

4.2 $Na < No$ の場合

簡単な関係式を解析的に得ることはできないので、いくつかの場合に対して、数値実験により $P(\geq Na)$ と PIC の関係を調べた。地震数 N_0 を 100 個とし、Na として 20 から 100 までの各値を、 Va/Vo として 0.01 から 0.2

Fig. 1. Plots showing relation between $\ln P$ and PIC for various combinations of Na/No and Va/Vo . Two asterisk symbols indicate the cases given by the equation (11) for $PIC=0$ and 1000.

Fig. 2. Plots showing relation between $L_1/L_0 \times P$ and PIC for the same combinations of Na/No and Va/Vo as in Fig. 1. The cases of $L_1/L_0 \times P=1$ are observed for $Na=No$.

まで 0.01 刻みの値を用いた。予知率としては、0.2~1.0 に対応している。これらの値に対し、確率利得は 1~100 となる。Fig. 1 は $P(\geq Na)$ の対数 (自然対数) と PIC の関係を示す。数値実験で得られた値が、点で示されている。また、式 (11) から得られる関係が、 $PIC=0$ と $PIC=1000$ について * 印で示されている。数値実験の結果は、これら二つの * 印を結ぶ直線上に分布し、(11) の関係をほぼ満たしている。さらに、 $L_1/L_0 \times P(\geq Na)$ を調べると、PIC と無関係にほぼ 0.1~1.0 の間にあることが判る (Fig. 2)。従って、式 (11) からのかい離は、最大で $\ln 0.1 \approx -2.3$ 程度と推定され、 $P(\geq Na)$ と PIC の関係として、

$$PIC \approx 2 \times \ln \frac{1}{P(\geq Na)} - 2 \quad (12)$$

を得る。Fig. 2 において、 $L_1/L_0 \times P(\geq Na)=1$ となっているのは、 $Na=No$ (予知率=1) の場合であり、前項 4.1 の場合に対応している。

従って、確率値にして 1 桁の誤差を許容範囲とするなら、PIC から式 (12) に拠り確率値の見積が可能となり、当該予測手法の統計的有意性の判断を簡便に行うことができる。

謝 辞

本稿の改善に際し、東北大学の大竹政和教授および匿名の査読者から適切な意見を頂きました。ここに記して感謝いたします。

文 献

井元政二郎, 1994, 前兆現象の性能評価について, 地震
2, 47, 137-142.

坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎, 1983, 情報量統計
学, 情報科学講座 A・5・4, 共立出版, 236 pp.
宇津徳治, 1975, 関東地方の地震と飛驒地方の稍深発地
震の相関について, 地震 2, 28, 303-311.