高速層がある場合の弾性波の反射，屈折について

中央気象台 宇佐美 龍夫

(昭和 26 年 7 月 30 日受理)

Reflection and Refraction of SH waves incident upon a High-speed Layer

Tatsuo USAMI

Central Meteorological Observatory

(Received July 30., 1951)

The reflection and refraction of plane SH waves incident upon a high-speed layer with a constant thickness d were studied. Numerical calculations were executed in a case when $\nu_1/\nu_2=0.5507$, $\mu_2/\mu_1=3.25$, and medium 1 and 3 are equal, and the results are given graphically. According to the results, the so-called total reflection is considered to be taken place when $d/L \geq 5$, and no plane SH waves can be propagated parallel to the discontinuous layer.

§. 弾性波の反射屈折の計算は，地震学上及び応用地震学上に役に立つので，古くから多くの人々により色々な場合が計算されて居るけれども，まだ十分であるとは云い難い。その 1 例として SH 波が高速層に入射する場合について計算をした。これと似た場合については既に妹沢，金井両博士の計算¹⁾があるが，取扱つた場合が異なるので報告する。

§. 各媒質は homogeneous, isotropic であるとして，二次元の場合を取扱う。Fig 1 図の如く，座標軸をとり，媒質 2 の厚さは一様に d

であるとする。媒質 1 から入射角 i_1 で平面 SH 波が不連続面 $z=0$ に入射する場合を考える。各媒質中の変位を v_i ，密度を ρ_i ，Lamé の常数を μ_i とすると，各媒質中で

$$\rho_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = \mu_i \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

が成立する。suffix i で媒質を区別する。入射波を

$$e^{i\kappa(x+\gamma_1 z - \omega t)} \quad (2)$$

とすると，各媒質中での変位は次式で与えられる。

$$v_1 = e^{i\kappa(x+\gamma_1 z - \omega t)} + C_1' e^{i\kappa(x-\gamma_1 z - \omega t)} \quad (3)$$

$$v_2 = C_2 e^{i\kappa(x+\gamma_2 z - \omega t)} + C_2' e^{i\kappa(x-\gamma_2 z - \omega t)} \quad (4)$$

Fig 1

$$v_3 = C_3 e^{i\kappa(\alpha - \gamma_3 z + \omega t)} \quad (5)$$

(3), (4), (5) 式は次の境界条件を満足しなければならない。すなわち

$$\left. \begin{aligned} z=0 : v_1 &= v_2, \quad \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ z=d : v_2 &= v_3, \quad \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} = \mu_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

従つて次の式が得られる。

$$C_1' = (p''q' + p'q'' e^{2i\kappa\gamma_2 d}) / \Phi \quad (7)$$

$$C_2 = 2\gamma_1 q' / \Phi \quad (8)$$

$$C_2' = 2\gamma_1 q'' e^{2i\kappa\gamma_2 d} / \Phi \quad (9)$$

$$C_3 = 4\gamma_1 \gamma_2 e^{i\kappa(\gamma_2 - \gamma_3)d} / \Phi \quad (10)$$

$$\Phi = p'q' + p''q'' e^{2i\kappa\gamma_2 d} \quad (11)$$

こゝに

$$\left. \begin{aligned} p' &= \gamma_1 + \mu_{12}\gamma_2, \quad p'' = \gamma_1 - \mu_{12}\gamma_2 \\ q' &= \gamma_2 + \mu_{23}\gamma_3, \quad q'' = \gamma_2 - \mu_{23}\gamma_3 \\ \mu_{12} &= \mu_2 / \mu_1, \quad \mu_{23} = \mu_3 / \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

又 (1)~(5) 式から容易に次の関係のある事が分る。

$$\gamma_i = \cot i_i \quad (13)$$

$$\kappa = 2\pi \sin i_1 / L \quad (14)$$

$$\kappa\omega = 2\pi / T \quad (15)$$

こゝに i_i は各媒質の入射角、反射角、屈折角、を意味し、 L は入射波の波長である。

§. こゝで次の事を考えてみる。 $z=0$ に媒質 1 と媒質 2 との不連続面があつて媒質 3 が無い時、媒質 1 の方から平面 SH 波が入射すると、反射及び屈折係数は

$$A' = A_{\text{refl}} = p''/p', \quad A = A_{\text{refr}} = 2\gamma_1/p' \quad (16)$$

又媒質 2 の方から入射すると

$$B' = B_{\text{refl}} = -p''/p', \quad B = B_{\text{refr}} = 2\mu_{12}\gamma_2/p' \quad (17)$$

次に媒質 1 がなく、 $z=d$ で媒質 2 と 3 とが接して居る時に、媒質 2 の方からの入射に対しては

$$C' = C_{\text{refl}} = q'' e^{2i\kappa\gamma_2 d} / q', \quad C = C_{\text{refr}} = 2\gamma_2 e^{i\kappa(\gamma_2 - \gamma_3)d} / q' \quad (18)$$

この様な場合の反射及射及び屈折波を適当に superpose して (7), (8), (9), (10) の各式が得られるかどうかをしらべてみると簡単な計算により、それが得られる事が分る。例えば

$$A' + ABC' + ABC'B'C' + \dots = A' + ABC' / (1 - B'C') = C'$$

となり、 C_2 , C_2' , C_3 の場合も同様にして得られる。

以上の事より、もし媒質 2 が x 方向に無限に延びず、一端又は両端がある場合には、その

方向の長さ及 d に応じて, (16), (17), (18) の場合の反射及屈折係数を波の径路に応じて適宜に乗じて, 有限回加へ合せばよい

§. 数値計算をするに当つて, 媒質 1 と 3 とは全く同じであるとした. 又媒質 2 を伝る横波の速度は媒質 1, 3 のそれよりも大であるとして, 次の如き常数を使用した.

Medium	Velocity= $\sqrt{\mu/\rho}$	Density= ρ	Poisson's ratio	μ
1,3	1.9 km/sec	2.68 g/cm ³	0.22	9.67×10^{10} c.g.s.
2	3.45	2.64	0.26	31.42×10^{10}

これは飯田博士の実験結果²⁾の中, 石灰岩及粘板岩を選び且つ Poisson 比 0.21~0.29 のものの平均値である.

$$\mu_{12}=1/\mu_{23}=3.25,$$

$$k=\sqrt{\mu_1/\rho_1}/\sqrt{\mu_2/\rho_2}=0.5507$$

故に幾何光学的な意味で全反射の起きる入射角 i_c は

$$\sin i_c = k$$

$$\text{より } i_c = 33^\circ 25'$$

$$\text{又 } C_1' \text{ の分子は } (\mu_{23}\gamma_1^2 - \mu_{12}\gamma_2^2)(1 - e^{2ik\gamma_2 d})$$

となるから $C_1' = 0$ になるのは

$$\mu_{23}\gamma_1^2 - \mu_{12}\gamma_2^2 = 0 \quad (19)$$

$$\text{及び } 1 - e^{2ik\gamma_2 d} = 0 \quad (20)$$

の場合で, この中 (19) 式から定まる入射角 i_a は d 及び L に無関係に定り

$$i_a = 28^\circ 41' 25''$$

となる. これは $k < 1$ の時には常に i_c より小である事が証明出来る. 又 (20) 式から得られる入射角 i_b は d/L により異なり, d/L の増加と共にその数が増す. 又 $i_b < i_c$ である事が証明される. $i_1 = i_a$, 又は $i_1 = i_b$ の時には $C_1' = 0$ 従つて

Fig. 2 (a)

Fig. 2 (b)

Fig. 2 (d-1)

Fig. 2 (c)

Fig. 2 Amplitudes of the displacements.
 Full line; $|C_1'|$, waves reflected to the first medium.
 Dotted line; $|C_2 + C_2'|_{z=0}$, waves refracted in the second medium.
 Chain line: $|C_3|$, waves transmitted to the third medium.
 Small figures represent amplitudes changes in the second medium.
 a) $d/L=1/20$, b) $d/L=1/4$, c) $d/L=1$, d) $d/L=5$.

Fig. 3 (a)

Fig. 3 (b)

Fig. 2 (d-2)

Fig. 3 (c)

Fig. 3 Amplitudes of the displacements as functions of d/L .

a) $|C_1'|$, b) $|C_2+C_2'|_{z=0}$, c) $|C_3|$.

$$|C_2+C_3'|_{z=0}=1 \quad |C_3|=1$$

となる。又この外に $|C_2+C_2'|_{z=0}=1$ にする i_1 がある。それを i_a とすると i_a は L 及 d に無関係に定り $i_a=42^\circ 26' 19.5''$ で且つ $i_a > i_1 > i_a$ なる i_1 に対しては $|C_2+C_2'|_{z=0} > 1$ となる計算の結果は才 2 図及び才 3 図に示してある。

§. 以上の計算の結果よりわかつた事を記すと、まず

- 1) $d/L \geq 5$ になると幾何光学的な意味での全反射が起ると考えてよい。
- 2) $i_1=90^\circ$ の時には $|C_1'|=1$, $|C_2+C_2'|_{z=0}=0$, $|C_3|=0$ となるが C_1' の位相は -180° (図には煩雑になるので示してない) となり, 入射波と打消し合う。つまり境界面に平行に進む平面 SH 波は存在しない。
- 3) i_1 を固定すると $i_1 < i_c$ なる範囲で $|C_1'|$, $|C_2+C_2'|_{z=0}$, $|C_3|$ は d/L に関して週期的に変化し, その週期は i_1 の増加と共に大きくなる。従つて又週期的に $|C_1'|=0$ になる d/L が表われ, かつかゝる値は無限個ある
- 4) $i_1 > i_c$ の時には $v_2 = C_2 e^{-\kappa \gamma_2 |z| + i\kappa(\gamma_2 z - \omega t)} + C_1' e^{\kappa(\gamma_2 |z| + i\kappa(\gamma_2 z - \omega t))}$ となり, 境界波の如きものとなる。終りに臨み色々御助言を載いた松沢先生に感謝致します。

文 献

- 1) K. SEZAWA and K. KANAI, "Nature of transverse waves transmitted through discontinuity layer," B. E. R. I. 14 (1936), 151.
- 2) 飯田波事, "振動方法による岩石の弾性率測定" 地震 13 (1941), 299.