対数正規分布モデルによる地震長期発生確率の計算

——宮城県沖地震の再検討——

気象庁精密地震観測室* 岡田 正 実

Probabilistic Estimation of Large Earthquake Occurrence from Several Earthquakes Using Lognormal Distribution Model

—Re-evaluation for the Oncoming Earthquake off Miyagi Prefecture, Japan—

Masami OKADA

Matsushiro Seismological Observatory

3511 Nishijo, Matsushiro-machi, Nagano-shi, 381-1232, Japan

(Received December 16, 2002; Accepted January 5, 2004)

I statistically discuss the method for estimating the probability of the next characteristic earthquake in a given time interval from the data on date of earthquakes in the past by using lognormal distribution model, based on the Bayesian approach. We assume that $n+1$ earthquakes have occurred on a fault or in a source area separated by n time intervals, T_i , of which logarithm, $x_i = \ln(T_i)$, are considered to follow a normal distribution, $N(\mu, \sigma^2)$. Here, μ and σ^2 are mean and variance parameters of a normal population distribution, respectively. Then the likelihood accounted for aseismic period since the last event is defined as $L(\mu, \sigma^2) = (1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)) \prod_{i=1}^n f_N(x_i; \mu, \sigma^2)$, where x_p , F_N and f_N are the logarithm of the time interval of aseismic period, T_p , since the last event, the cumulative distribution function, and the probability density function for $N(\mu, \sigma^2)$, respectively. We expect that normalized likelihood represents the density distribution of μ, σ^2 based on Bayesian rule with a prior distribution of $\pi(\mu, \sigma^2) = 1$. If μ and σ^2 are known, the probability of the next earthquake occurring in the forthcoming period from T_p through $T_p + \Delta T$ is denoted by a conditional probability, $P_q = (F_N(x_f; \mu, \sigma^2) - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)) / (1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2))$, where $x_f = \ln(T_p + \Delta T)$. However it is impossible to estimate real values from a small number of data without large error, and we can only know the distribution of parameters to calculate numerically the distribution of P_q as shown in this paper. The distribution of expected time interval, T , from the last event to the next event is computed analytically from a law that $\sqrt{n-3}(\ln(T) - \bar{x}) / \sqrt{(n+1)s^2}$ follows t-distribution of $n-3$ degrees of freedom. Here $\bar{x}$ and s^2 are mean and variance of data, $x_i = \ln(T_i)$. And the expected probability of characteristic earthquake occurrence in a time interval ΔT given that no earthquake has occurred in T_p , is the mean of variable P_q or a conditional probability of t-distribution. For the characteristic earthquakes off Miyagi prefecture, Japan, the estimates of probability in the periods of 10, 20 and 30 years after January 2001 are 0.28, 0.62 and 0.80, respectively, using the data set compiled by the Earthquake Research Committee of Japan. These estimates for 20 and 30 years are smaller than those, about 0.8 and larger than 0.9, given by the committee, respectively. Interval estimates of P_q for those periods are 0.15–0.41, 0.42–0.82 and 0.75–1.0.

Key words: probabilistic prediction, characteristic earthquake, Miyagi-oki earthquake, lognormal distribution, Bayesian approach

§1. はじめに

大地震の長期予測は古くから試みられており、今村 (1933) は歴史的資料や地殻変動から南海トラフ沿いで

* 〒381-1232 長野市松代町西条 3511

の大地震が近いことを警告したが、その警告通りに東南海地震(1944)と南海地震(1946)が発生した。1973年根室半島沖地震は、地震空白域の存在と地殻変動データから発生前にその危険性が指摘されていた[宇津(1972)]。このような長期予測に関しては、石橋・佐竹(1998)や宇津(1998)によって総合的な報告もされている。

地震発生の危険度を表す指標として、発生確率を採用し、活断層や沈み込み帯のプレート境界で繰り返し発生している大地震について確率予測が試みられた[力武(1976), Nishenko and Buland (1987)]。その際、大地震発生を更新過程と見なし、地震の発生間隔がある特定の確率分布に従うことが仮定される。米国 Parkfield における地震でも予測が行われたが、期間内に地震が発生せず、予測方法の問題点や手法の再検討がされた[Bakun and Lindh (1985), Davis *et al.* (1989), Savage (1993), Working Group on California Earthquake Probabilities (1995)]。

Nishenko and Buland (1987) は、世界各地のプレート境界で発生した固地地震または大地震の発生間隔を調べ、対数正規分布がよく適合し、時間間隔の対数の標準偏差が世界共通であるとした。そのうえで、各地域の固地地震の発生確率を求めた。これに対し、Davis *et al.* (1989) は、対象地域の選定過程で標準偏差の小さいものが選択されている恐れがあること、地域によっては分散のパラメータが明らかに異なる固地地震系列があることを指摘した。そのうえで、尤度に最後の地震からの経過時間も取り込み、パラメータの推定誤差を考慮した平均尤度法(mean likelihood method)の概念を用いて地震発生確率の計算方法を議論し、Parkfield の場合では Nishenko and Buland (1987) が与えた値より確率がかなり小さいことを主張した。

地震間隔の分布としてはいろいろなものが考えられる。Utsu (1984) はよく使用されている Weibull 分布、ガンマ分布、対数正規分布、2重指数分布を取り上げ、南海トラフなどで発生した大地震のデータと比較検討して、適合度に大差がないことを示した。島崎・他(1998) は、内陸の活断層を含めて同様な調査を行い、適合度に余り差がないことを確認し、内陸の顕著な4活断層についてはばらつきのパラメータが共通と見なせるとした。地震調査研究推進本部地震調査委員会(以下「地震調査委員会」と略す)は、様々な角度から検討し、最終的には地震の発生間隔の分布として、BPT (Brownian Passage Time) 分布を採用した[地震調査研究推進本部地震調査委員会長期評価部会(1998, 1999), 地震調査研究推進本部地震調査委員会(2001)]。

その後、地震調査委員会は、活断層などの活動度を系統的に評価し、大地震の発生確率を相次いで発表している。宮城県沖地震については、2001年1月から10年間、20年間および30年間における大地震の発生確率が、それぞれ約30%、約80%および90%以上と非常に高い[地震調査研究推進本部地震調査委員会(2000)]。この計算は、評価手法[地震調査研究推進本部地震調査委員会(2001)]が決まる前であり、対数正規分布モデルで行われた。Ohtake and Ueda (2002) も宮城県沖地震について同様な調査を行い、対数正規分布モデルで計算して、30年間の発生確率を97%としている。その際、地震調査委員会では地震発生間隔の対数の標本平均と標本標準偏差が、Ohtake and Ueda では標本平均と標本不偏分散の平方根が母集団の平均および標準偏差に等しいものとして扱っている。しかし、データ数が少ないので、パラメータの推定誤差が確率計算結果に及ぼす影響が無視できない。井元(1999)が指摘しているように、このような方法では、予測確率が1に近いと確率の誤差分布の対称性が崩れ、得られた結果が期待される確率の平均値からずれることになる。

ここでは、従来から行われているように、繰り返し発生している固地地震または大地震を更新過程と見なし、長期発生確率を計算する方法について考察する。その際、時間間隔の分布は、地震調査研究推進本部地震調査委員会(2000)と同じく、対数正規分布であると仮定する。計算では、Davis *et al.* (1989)と同様に、尤度関数に最後の地震からの経過時間も取り込み、求める発生確率にパラメータの曖昧さを反映させるようにした。少数のデータから母集団の平均と分散を精度よく決定することはできないが、事前分布を仮定し、ベイズの定理を使用すれば、パラメータの分布が推定できる。求める地震発生確率は、母集団の平均と分散の関数であり、その確率分布を厳密に計算する方法を新たに示し、それに基づいた発生確率の点推定および区間推定の方法を議論する。その方法を宮城県沖地震に適用し、結果を地震調査委員会などの値と比較検討する。

§2. 理 論

過去に $n+1$ 個の地震の発生時期が知られていて、それらの時間間隔を T_i とする。最後の地震から予測時点までの経過時間を T_p とし、予測期間を ΔT とする。 T_i , T_p および $T_p + \Delta T$ の自然対数を x_i , x_p および x_f とする。対数正規分布モデルでは、 x_i は正規分布に従うと仮定される。

2.1 尤度関数と母集団パラメータの分布

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数 $f_N(x; \mu, \sigma^2)$ は、

$$f_N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (1)$$

である。累積分布関数 $F_N(x; \mu, \sigma^2)$ を

$$F_N(x; \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^x f_N(x; \mu, \sigma^2) dx \quad (2)$$

とする。パラメータ μ, σ^2 の事前分布 $\pi(\mu, \sigma^2)$ は、事前に有効な情報がないので、

$$\pi(\mu, \sigma^2) = 1 \quad (3)$$

と仮定する。

尤度関数 $L(\mu, \sigma^2)$ は、最後の地震から予測日までの間に地震が発生していないことを考慮すると、

$$L(\mu, \sigma^2) = \{1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)\} \prod_{i=1}^n f_N(x_i; \mu, \sigma^2) \quad (4)$$

と定義される [例えば Ogata (1978), Davis *et al.* (1989)]. 標本平均 $\bar{x}$ と標本分散 s^2

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (6)$$

を使うと

$$L(\mu, \sigma^2) = \{1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)\} \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \times \exp\left\{-\frac{ns^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (7)$$

または

$$L(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{(n+1)/2} \times \int_{x_p}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(u-\mu)^2 + ns^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} du \quad (8)$$

となり、 $L(\mu, \sigma^2)$ は $n, \bar{x}, s^2$ および x_p の関数となる。

ベイズの定理から、期待される μ, σ^2 の同時密度分布は

$$h(\mu, \sigma^2 | n, \bar{x}, s^2, x_p) d\mu d\sigma^2 = \frac{L(\mu, \sigma^2)}{C} d\mu d\sigma^2 \quad (9)$$

で与えられる。ここで C は

$$\begin{aligned} C &= \int_{\sigma^2=0}^{\infty} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} L(\mu, \sigma^2) d\mu d\sigma^2 \\ &= \int_{\sigma^2=0}^{\infty} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_{\mu=x_p}^{\infty} f_N(u; \mu, \sigma^2) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n f_N(x_i; \mu, \sigma^2) du d\mu d\sigma^2 \\ &= \int_{\sigma^2=0}^{\infty} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} \int_{\mu=x_p}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{n+1} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{(u-\mu)^2 + ns^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} du d\mu d\sigma^2 \quad (10) \end{aligned}$$

である。右辺の被積分関数は、

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{n+1} \exp\left\{-\frac{(u-\mu)^2 + ns^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{2\pi})^n} J^{(n-2)/2} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \\ &\quad \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(n+1)}{2\sigma^2} \left(\mu - \frac{u+n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right\} \\ &\quad \times \frac{J}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(-\frac{1}{\sigma^2 J}\right)^{(n-2)/2+1} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2 J}\right) \quad (11) \end{aligned}$$

と書き換えることができる。ここで

$$J = \frac{2(n+1)}{n\{(\bar{x}-u)^2 + (n+1)s^2\}} \quad (12)$$

である。(10) 式では、積分区間が他の積分変数に依存しないので、積分の順序を入れ替えることができる。最初に μ について積分すると、(11) 式右辺の第 2 項が 1 となって消える。続いて σ^2 について積分すると第 3 項と第 4 項が 1 となるので、

$$\begin{aligned} C &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{2\pi})^n} \left\{\frac{2(n+1)}{n}\right\}^{(n-2)/2} \\ &\quad \times \int_{x_p}^{\infty} \frac{1}{\{(u-\bar{x})^2 + (n+1)s^2\}^{(n-2)/2}} du \quad (13) \end{aligned}$$

である。 u に関する積分式の不定積分を $G(u; n, \bar{x}, s^2)$ とすれば、

$$\begin{aligned} C &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{2\pi})^n} \left\{\frac{2(n+2)}{n}\right\}^{(n-1)/2} \\ &\quad \times \{G(\infty; n, \bar{x}, s^2) - G(x_p; n, \bar{x}, s^2)\} \quad (14) \end{aligned}$$

となる。 $G(u; n, \bar{x}, s^2)$ の数式表現は、 n が奇数ならば、 $m = (n-3)/2$ と置くと、

$$\begin{aligned} G(u; n, \bar{x}, s^2) &= \int \left\{ \frac{1}{(u-\bar{x})^2 + (n+1)s^2} \right\}^{(2m-1)/2} du \\ &= \frac{1}{\{(n+1)s^2\}^m} \sum_{r=0}^{m+1} \frac{(-1)^r}{2r+1} \left(\frac{m-1}{r}\right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{u-\bar{x}}{\sqrt{(u-\bar{x})^2 + (n+1)s^2}} \right\}^{2r+1} \quad (15) \end{aligned}$$

であり、 n が偶数のときは、 $m = (n-2)/2$ と置くと、

$$\begin{aligned} G(u; n, \bar{x}, s^2) &= \int \left\{ \frac{1}{(u-\bar{x})^2 + (n+1)s^2} \right\}^m du = \frac{(2m-3)!!}{(m-1)!} \end{aligned}$$

$$\times \left[\sum_{r=1}^{m-1} \frac{(m-r-1)!}{(2m-2r-1)!!} \frac{1}{\{2(n+1)s^2\}^r} \right. \\ \times \frac{u-\bar{x}}{\{(u-\bar{x})^2+(n+1)s^2\}^{m-r}} \\ \left. + \frac{1}{\{2(n+1)s^2\}^{m-1}} \frac{1}{\sqrt{(n+1)s^2}} \right. \\ \left. \times \arctan \left\{ \frac{u-\bar{x}}{\sqrt{(n+1)s^2}} \right\} \right] \quad (16)$$

となる [例えば, 森口・他 (1956)]. !!印がついた $(2m-3)!!$ などは $(2m-3)!! = (2m-3)(2m-5)\cdots 3\cdot 1$ などを表す.

2.2 地震発生確率の確率分布

予測期間 $(T_p \sim T_p + \Delta T)$ 内に地震が発生する確率 P_q ($T_p, T_p + \Delta T$) は, T_p まで地震が発生しておらず, それ以後に発生するので, 条件付き確率

$$P_q(T_p, T_p + \Delta T) = \frac{F_N(x_f; \mu, \sigma^2) - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)}{1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)} \quad (17)$$

となる. この式の値は, μ, σ^2 が既知であれば容易に計算できるが, 実際の場合は μ, σ^2 の正確な値が分からない. しかし, ベイズの定理から μ, σ^2 の分布が (9) 式で表されるので, $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の確率分布は以下のようにして計算できる.

$P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の累積分布関数を $F_P(p; n, \bar{x}, s^2, T_p, \Delta T)$ とすれば, その定義から

$$F_P(p; n, \bar{x}, s^2, T_p, \Delta T) = \Pr\{P_q(T_p, T_p + \Delta T) \leq p\} \\ = \iint_S h(\mu, \sigma^2) d\mu d\sigma^2 \quad (18)$$

となる. ここで, $\Pr$ は確率を意味し, p の変域は $0 \leq p \leq 1$ で, 積分領域 S は,

$$S = \left\{ (\mu, \sigma^2) \mid \frac{F_N(x_f; \mu, \sigma^2) - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)}{1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)} \leq p \right\} \quad (19)$$

である. 積分領域を解析的に求めることは容易でないので, $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の分布は, 観測データが与えられてから (18) 式で数値的に計算する.

一例として, 宮城県沖地震の 30 年間発生確率 $P_q(T_p, T_p + 30)$ の場合を紹介する. 計算条件 ($n=5, \bar{x}=3.598, s^2=0.031, x_p=3.1157, x_f=3.962, \Delta T=30$) は地震調査研究推進本部地震調査委員会 (2000) が採用したデータから求めたものである. μ, σ に対する $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ および $h(\mu, \sigma)$ の分布は Fig. 1 と Fig. 2 のようになる. これらの図では, 表示の都合で, μ, σ^2 の代わりに $\mu - \bar{x}, \sigma$ を独立変数として採用しており, h も $\mu - \bar{x}, \sigma$ に対する確率密度

Fig. 1. Conditional probability, P_q , for the occurrence of characteristic earthquake off Miyagi prefecture in 30 years since January 2001 as a function of population parameters, μ and σ . " $\bar{x}$ " is the mean of $x_i = \ln(T_i)$, which are obtained from the data set I compiled by the Earthquake Research Committee of Japan.

Fig. 2. Normalized likelihood function at January 2001 for the data set I which is compiled by the Earthquake Research Committee of Japan. The interval of contours corresponds 0.5 and the peak is 14.2 in normalized likelihood.

Fig. 3. Distribution of the probabilities, P_q , for the occurrence of characteristic earthquake off Miyagi prefecture since January 2001 estimated from the data set I.

$$h'(\mu - \bar{x}, \sigma) = \frac{2\sigma}{C} \{1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)\} \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \times \exp\left\{-\frac{n s^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (20)$$

を表している。Fig. 1 で σ が小さくなると、等値線が $\mu - \bar{x} = x_f - \bar{x} = 0.364$ に集中しているが、これは x_f が μ より大きいのか小さいかによって確率 $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ が大きく変化するためである。Fig. 2 に示した $h'(\mu - \bar{x}, \sigma)$ の分布は、直線 $\mu - \bar{x} = 0$ に対してわずかに非対称になる。

(19) 式の p が与えられると、Fig. 1 に示すような $P_q(T_p, T_p + \Delta T | \mu, \sigma) = p$ となる等値線が決まり、積分領域 S はその曲線の右側 (μ の大きい部分) となる。分布関数 $F_P(p; n, \bar{x}, s^2, T_p, \Delta T)$ の値は、領域 S で $h'(\mu, \sigma)$ を積分したものである。結果として Fig. 3 に示すような $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の確率分布が得られる。宮城県沖地震の場合は予測期間 $\Delta T = 10$ 年および 20 年だと非対称な凸型分布となるが、 $\Delta T = 30$ 年の場合は J 字型分布となる。

2.3 地震発生確率の期待値

地震発生の危険性を表現するために、地震発生確率を使用するのであれば、 $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の分布の代表値である期待値 (平均) や中央値を採用することが考えられる。最頻値 (モード) は、Fig. 3 の $\Delta T = 30$ 年の場合のように、J 字型分布の場合があるので、適当でない。筆者は、「 $n, \bar{x}, s^2, T_p, \Delta T$ が同じ活断層等が多数あった場合に、予測期間内に地震が発生する割合は $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の期待値 (平均) $\bar{P}_q(T_p, T_p + \Delta T)$ であり、その値が地震発生の危険性を表す点推定として最も適している。」と考える。そこで、Davis *et al.* (1989) と同様に、地震発生確率の点推定として、 $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の期待値 (平均) $\bar{P}_q$

($T_p, T_p + \Delta T$) を採用する。

$\bar{P}_q(T_p, T_p + \Delta T)$ は解析的に計算できることも好都合である。具体的には、

$$\begin{aligned} \bar{P}_q &= \bar{P}_q(T_p, T_p + \Delta T) = E\left\{\frac{F_N(x_f; \mu, \sigma^2) - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)}{1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)}\right\} \\ &= \int_{\sigma^2=0}^{\infty} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{F_N(x_f; \mu, \sigma^2) - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)}{1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)} \\ &\quad \times h(\mu, \sigma^2 | x_1, x_2, \dots, x_n; x_p) d\mu d\sigma^2 \end{aligned} \quad (21)$$

である。(2), (4), (9) 式を (21) 式に代入すると、(4) 式に現れる $1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)$ と (21) 式分母の $1 - F_N(x_p; \mu, \sigma^2)$ とが打ち消す。積分の順序を入れ替えると、

$$\begin{aligned} \bar{P}_q &= \frac{\left[\int_{u=x_f}^{x_f} \int_{\sigma^2=0}^{\infty} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} f_N(u; \mu, \sigma^2) \right. \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n f_N(x_i; \mu, \sigma^2) d\mu d\sigma^2 du \left. \right]}{\left[\int_{u=x_p}^{\infty} \int_{\sigma^2=0}^{\infty} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} f_N(u; \mu, \sigma^2) \right. \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n f_N(x_i; \mu, \sigma^2) d\mu d\sigma^2 du \left. \right]} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。被積分関数は (10) 式と同じであり、解析的に積分でき、

$$\bar{P}_q = \frac{G(x_f; n, \bar{x}, s^2) - G(x_p; n, \bar{x}, s^2)}{G(\infty; n, \bar{x}, s^2) - G(x_p; n, \bar{x}, s^2)} \quad (23)$$

となる。関数 $G(x; n, \bar{x}, s^2)$ は (15) または (16) 式で定義される。

2.4 地震発生間隔の分布

最後の地震から次の地震までの時間間隔 T の分布がどのようなかを検討する。最後の地震が発生した直後 $T \rightarrow 0$ を想定すると、 $x_p = -\infty$ であり、時間間隔の対数 x の累積分布関数 $F(x; n, \bar{x}, s^2)$ は、(23) 式から

$$F(x; n, \bar{x}, s^2) = \frac{G(x; n, \bar{x}, s^2) - G(-\infty; n, \bar{x}, s^2)}{G(\infty; n, \bar{x}, s^2) - G(-\infty; n, \bar{x}, s^2)} \quad (24)$$

となる。これに対応する確率密度関数 $f(x; n, \bar{x}, s^2)$ は、(24) 式を微分して、

$$\begin{aligned} f(x; n, \bar{x}, s^2) &= \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \{(n+1)s^2\}^{(n-3)/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right) \{(x-\bar{x})^2 + (n+1)s^2\}^{(n-2)/2}} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。(23) 式は、最後の地震から予測時点まで地震が発生していないという条件下の確率 (条件付き確率) であるのに対し、(24), (25) 式はそのような条件のない x の確率 (無条件確率) である。条件付き確率 $\bar{P}_q(T_p, T_p + \Delta T)$ は無条件確率 $F(x; n, \bar{x}, s^2)$ を用いれば、

$$\bar{P}_q = \frac{F(x_f; n, \bar{x}, s^2) - F(x_p; n, \bar{x}, s^2)}{1 - F(x_p; n, \bar{x}, s^2)} \quad (26)$$

Fig. 4. Expected cumulative distribution, $F(t)$, of the time interval between the last earthquake and the next one and the interval estimates. $F_{pq}=0.16$ and $F_{pq}=0.84$ correspond the points at which cumulative distribution function of P_q is equal to 0.16 and 0.84, respectively.

と簡明に表現され、解析的に計算できる。

さらに、(25)式で、

$$t = \frac{\sqrt{n-3}(x-\bar{x})}{\sqrt{(n+1)s^2}} \quad (27)$$

とおけば、 $\sqrt{n-3}dx = \sqrt{(n+1)s^2}dt$ であり、 t の密度関数 $f_t(t; n, x, s^2)$ は

$$f_t(t; n, x, s^2) =$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\sqrt{(n-3)\pi}\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n-3}\right)^{(n-2)/2}} \quad (28)$$

となる。したがって、(27)式の t 値は自由度 $n-3$ の t 分布に従うことが分かる。

時間間隔の累積分布（無条件確率分布）の例を Fig. 4 に示す。(24)式または(25)式で変数変換 $T = \exp(x)$ をすれば T の分布が得られる。 $n, \bar{x}, s^2$ は、宮城県沖地震の値 [地震調査研究推進本部地震調査委員会 (2000)] を使用した。図の横軸は、 $x = \ln(T)$ ではなく、最後の地震からの経過時間 T (年) を採用してある。 T が小さくなると、比較的速く確率が 0 に近づくのに対し、経過時間が平均発生間隔を超えて大きくなった場合は、確率が 1 に近づくのが遅いことが分かる。また、区間推定（推定誤差）の目安として、 P_q の累積分布 [(18)式] で確率 $\text{Pr} = 0.16$ と 0.84 に対応する p の曲線も示してある。これらの曲線の間の確率はいつの時点でも 0.68 で、正規分布の平均±標準偏差に対応している。経過時間 T が 10 年未満だと、平均が $\text{Pr} = 0.84$ の曲線より上に位置してい

Fig. 5. Dependence of the distributions for a time interval from the last earthquake to the next one on the number of events.

る。これは、 P_q の分布の非対称性が著しく、 $\text{Pr} = 0.84$ の点より平均値が大きくなることを意味している。

地震の個数 $N(=n+1)$ によって、予想される時間間隔 T の分布（無条件確率分布）がどのように変わるかを示したのが Fig. 5 である。 $\bar{x}, s^2$ は、Fig. 4 の場合と同じく、宮城県沖地震の値を使用した。地震が 5, 6 個と少ない場合は、対数正規分布 ($n = \infty$ の場合) と大きく異なり、モード値の確率密度が半分程度にしかならない。地震数が少ないと偶然的な要因によって、与えられた標本値 ($\bar{x}, s^2$) をとりうる可能性が高いので、分散が大きくなる。ピークの位置がずれるのは、横軸に $x = \ln(T)$ ではなく、経過時間 T を採用したためである。なお、今回採用した事前分布では、(28)式などから分かるように、地震数 N が 4 個以下になると地震発生確率を計算することができない。

§ 3. 宮城県沖地震への適用

3.1 データセット

宮城県沖では、数十年間隔で $M 7.5$ 前後の地震が繰り返し発生し、その活動が目目されてきた [瀬野 (1979), Utsu (1984)]。瀬野 (1979) は、それらの発生域を宮城近海とその沖合域に分けてまとめており、Table 1 は宮城近海で発生したとされている地震のリストである。1793 年の地震は海溝よりの区域で発生したが、破壊域が沿岸域まで及んだ公算があるとされている。Utsu (1984) によると、1646 年、1736 年および 1770 年の地震は内陸域で発生した可能性がある。また、地震調査研究推進本部地震調査委員会 (2000) では、1793 年より前の地震については、データが十分でないと判断し、評価を行っていない。Ohtake and Ueda (2002) では、資料

Table 1. Large earthquakes off Miyagi prefecture.

date	M	T_i year	data set			
			I	II	III	IV
9 Sept. 1616	7.0				○	○
9 June 1646	7.6	29.7			○	○
2 Oct. 1678	7.4	32.3			○	○
30 Apr. 1736	6.2	57.6			○	○
27 May 1770	7.4	34.1			○	
17 Feb. 1793	7.7	22.7	○		○	○
20 July 1835	7.5	42.4	○	○	○	○
21 Oct. 1861	7.4	26.3	○	○	○	○
20 Feb. 1897	7.4	35.3	○	○	○	○
3 Nov. 1936	7.5	39.7	○	○	○	○
12 June 1978	7.4	41.6	○	○	○	○

note: T_i is the time interval between successive events.

Table 2. Conditional probability of large earthquake occurrence off Miyagi prefecture after 1 January 2001.

data set	n	mean of $\ln(T_i)$	variance of $\ln(T_i)$	ΔT , year		
				10	20	30
I	5	3.598	0.0310	0.279 (0.3)	0.618 (0.8)	0.796 (≥ 0.9)
II	4	3.561	0.0318	0.268	0.533	0.675
III	10	3.556	0.0634	0.344	0.689	0.866
IV	9	3.661	0.0644	0.248	0.572	0.787

note: Numbers in parentheses are probabilities by the Earthquake Research Committee of Japan.

を最近 200 年間に限定し、最近の 5 個のみを使用している。Table 1 のマグニチュードは、最近の 3 例が Utsu (1984) に、それ以外は瀬野 (1979) に掲載されている値である。直前の地震からの経過年数は、地震調査研究推進本部地震調査委員会長期評価部会 (1999) からの転載である。

長期発生確率を計算するためのデータセットとしては、地震調査研究推進本部地震調査委員会 (2000) および Ohtake and Ueda (2002) が使用したものを取り上げ、それぞれデータセット I、データセット II とする。地震数を増やした場合として、地震調査研究推進本部地震調査委員会長期評価部会 (1999) と同様に、Table 1 の地震全部からなるデータセット III と、1770 年の地震を除いたデータセット IV を取り上げた。1770 年の地震は震央が全くあいまいであるとされている [Utsu (1984)]。これらのデータセットを用いて、地震発生確率の推定を行う。

3.2 点推定

データセット I から発生間隔の自然対数 ($=\ln(T_i)$) の標本平均 $\bar{x}$ と標本分散 s^2 を求めると、 $\bar{x}=3.598$, $s^2=$

0.031 である。また、最新の地震から予測時点 (2001 年 1 月 1 日) までの経過年数は 22.55 年である。地震数は $N=6$ で、発生間隔のデータ数は $n=5$ である。 $m=(n-3)/2=1$ となるので、(15) 式は、

$$G(u; n, \bar{x}, s^2) = \frac{1}{6s^2} \frac{u - \bar{x}}{\sqrt{(u - \bar{x})^2 + 6s^2}} \quad (29)$$

となる。予測時点 (2001 年 1 月 1 日) までの経過時間 (22.55 年) の対数 $x_p=3.1157$ で、予測時点から 10 年後、20 年後、30 年後までの経過時間の対数 x_f は 3.483, 3.751, 3.962 である。したがって、10 年後、20 年後、30 年後までの地震発生確率 $\bar{P}$ は、(23), (29) 式からそれぞれ 0.28, 0.62, 0.80 となる。Table 2 の括弧内の値は地震調査研究推進本部地震調査委員会 (2000) が発表しているものであるが、それに比べると、今回の結果は 20 年間および 30 年間の値がかなり小さい。

その他のデータセットについて発生確率を計算した結果も Table 2 に掲載してある。Ohtake and Ueda (2002) が宮城県沖地震として採用したデータセット II では、30 年間の発生確率の期待値が 0.68 となり、彼らが求めた値 0.97 より大幅に低下する。データセット I

より平均発生間隔は短い、地震数が少ないために、発生確率は小さくなる。データセット III の場合は、地震数が多くかつ平均発生間隔が短いので、確率が最も高い。データセット IV は、平均発生間隔が最も長く、分散が大きいが、30 年間の発生確率ではデータセット I とほぼ同じである。

3.3 区間推定

データセット I について、地震発生確率 P_q の確率分布を Fig. 3 に示してあるが、予測期間 $\Delta T=10$ 年, 20 年, 30 年について、確率の期待値 $\bar{P}$, 分散 v および標準偏差 s_q は

$$\Delta T=10 \text{ 年: } \bar{P}=0.28, v=0.0159, s_q=0.126$$

$$20 \text{ 年: } \bar{P}=0.62, v=0.0380, s_q=0.195$$

$$30 \text{ 年: } \bar{P}=0.80, v=0.0375, s_q=0.194$$

である。ここで用いた $\bar{P}$ 値は、数値計算で求めた $P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の分布から計算したものであるが、解析解 [(23) 式と (29) 式] で求めたものにほぼ完全に一致しており、分布計算では必要な精度が保たれていることを示唆している。

区間推定を“平均±標準偏差”で表すと、 $\Delta T=10$ 年, 20 年, 30 年の場合それぞれの値は $P_q = 0.28 \pm 0.126$, 0.62 ± 0.195 , 0.80 ± 0.194 となり、これらの推定区間内の確率は 0.67, 0.65, 0.76 である。 $\Delta T=10$ 年と 20 年の場合は、凸型分布 (Fig. 3) をして、区間内に最頻値 (モード) が含まれており、これらの値で差し支えない。しかし、 $\Delta T=30$ 年の場合は、非対称性が著しい J 字型分布をしており、“平均±標準偏差”では最頻値 ($P_q=1$) が推定区間外になり、区間推定の方法として問題である。そこで、確率密度の高い部分を優先し、信頼水準を 68.3% (正規分布で平均±標準偏差に相当する) とすれば、 $0.75 < P_q \leq 1$ となり、Fig. 3 の確率分布から受ける印象に整合する。区間推定の範囲は、 $\Delta T=10$ 年と 20 年では余り重ならないが、20 年と 30 年はかなり重なっている。

データセット IV について同様な計算をすると、地震発生確率 P_q の分布は Fig. 6 のようになる。各予測期間に対応する平均、分散、標準偏差は

$$\Delta T=10 \text{ 年: } \bar{P}=0.25, v=0.0080, s_q=0.089$$

$$20 \text{ 年: } \bar{P}=0.57, v=0.0162, s_q=0.127$$

$$30 \text{ 年: } \bar{P}=0.79, v=0.0150, s_q=0.122$$

である。データセット I に比べ、 P_q の分散が半分程度以下に減り、 $\Delta T=30$ 年の場合も凸型分布となる。形式的には、地震数が増えて誤差の標準偏差が小さくなるので、確率推定の精度が向上している。しかし、 $\Delta T=30$ 年の区間推定は、データセット I が $0.75 \leq P_q \leq 1$ で、データセット IV が 0.79 ± 0.122 であるので、その区間

Fig. 6. Distribution of the probabilities, P_q , of earthquake occurrence for the data set IV.

の長さはほとんど同じである。

§ 4. 考 察

尤度の定義に、最後の地震からの経過時間を考慮し、厳密な地震発生確率の計算方法を議論してきた。しかし、得られた確率値を解釈する際には、使用したデータセットや仮定した事前分布に注意する必要がある。

宮城県沖で発生した歴史地震については、地震調査研究推進本部地震調査委員会 (2000) に記されているように、瀬野 (1979), Utsu (1984) などの報告がある。それらには宮城県沖で発生した可能性がある古い地震がいくつも掲載されているが、門外漢の筆者には、宮城県沖地震として採用することの可否は分からない。ここでは 4 つのデータセットについて、地震発生確率の計算を行い比較した。

地震発生確率の計算の際に、標本平均 $\bar{x}$ と標本分散 s^2 を母集団パラメータ μ , σ^2 の代わりに用いて、(17) 式で計算することがあるが、Davis *et al.* (1989) が指摘しているように、このやり方は、最後の地震から予測時点までの経過時間、および標本値 $\bar{x}$, s^2 と母集団パラメータの性質の相違を無視している。データ数が少ないと推定値の誤差が大きくなり、計算結果が確率の期待値から相当偏っている恐れがある。特に、得られた確率値が 0 または 1 に近く、Hessian 行列 [井元 (1999)] を用いて求めた誤差範囲の一部が負になる場合や 1 を超えるような場合は、偏りが著しい。加えて、 μ , σ^2 として最尤推定値 ($\bar{x}$, s^2) を使っていても、確率計算の (17) 式は μ , σ^2 について非線形であり、得られた確率値はもはや確率の最尤推定 [$P_q(T_p, T_p + \Delta T)$ の分布の最頻値] とならない。

Davis *et al.* (1989) が使用した条件は今回のものと異なり、事前分布 $\pi(\mu, \sigma) = 1$ に相当する。この場合は、ベイズの定理から期待される μ , σ の同時密度分布が

$$h(\mu, \sigma | n, \bar{x}, s^2, x_p) d\mu d\sigma = \frac{L(\mu, \sigma^2)}{C} d\mu d\sigma$$

与えられる。ここで C は

$$C = \int_{\sigma=0}^{\infty} \int_{\mu=-\infty}^{\infty} L(\mu, \sigma^2) d\mu d\sigma$$

である。詳しい説明は省略するが、(11) 式以下も少しずつ式が変わる。 $\Delta T=10$ 年の地震発生確率 (点推定) は 0.28 で、今回求めた確率 (点推定) と同じである。しかし、20 年と 30 年では 0.69 と 0.87 であり、今回求めた値より大きい。

今回は $\pi(\mu, \sigma^2)=1$ を採用したが、様々な事前分布が考えられる。正規分布の平均 μ は、変動範囲に何ら制約がないので、全区間で一様であると仮定するのは自然な発想であろう。分散 σ^2 は、変動範囲 ($0 \leq \sigma^2 < \infty$) の両端の条件が異なるので、全区間について一様なものが適当であるとは限らない。標準偏差 σ について一様なモデル $\pi(\mu, \sigma)=1$ は、 $\pi(\mu, \sigma^2)=1/\sqrt{\sigma^2}$ の場合に該当し、 σ^2 の小さい方に大きな加重がかかることになる。

固有地震または繰り返し発生している地震系列では、異常に長い地震発生間隔 (例えば平均の 100 倍を超えるようなもの) や異常に短いもの (平均の 100 分の 1 以下) は想定しにくい。分散 σ^2 は事実上の上限があると考えられるので、 σ^2 が小さい方に加重がかかったモデルが好都合であろう。しかし、地震系列を選び出す際は、発生間隔が揃ったもの、すなわち、 σ^2 の小さいものを選びやすいことを考慮するならば、 σ^2 の大きい方に加重がかかったモデルも否定できない。

事前分布 $\pi(\mu, \sigma^2)=1$ は、見方を変えればデータや地震学的な知識に基づくものでないので、得られた結果の信頼性もおのずから限界がある。Fig. 7 はいくつかの報告等 [地震調査研究推進本部地震調査委員会長期評価部会

(1999), 長谷川 (2002), 長谷川・他 (2002)] から求めた $x_i = \ln(T_i)$ の標本平均 $\bar{x}$ と標本不偏分散 $ns^2/(n-1)$ との関係を示したものであるが、平均 $\bar{x}$ が大きくなるにつれて、分散が大きくなる傾向がある。しかし、平均値が小さい事例は、同程度規模の地震がほぼ等間隔で発生している事例として選び出された結果であり、無作為抽出ではない。そのため、今回使用した事前分布を必ずしも否定するものではない。釜石沖の場合は、一つのアスベリティで発生していると見なされており [Matsuzawa *et al.* (2002)], 固有地震の時間間隔分布や発生時期の予測を調べるうえで参考になる。今後の推移が注目される。

地震調査委員会では各地の活断層や地域の地震活動を精力的に進めており、蓄積された資料を用いて事前分布を求めることが望まれる。特定の断層や震源地について見ると、地震数が少ないので、分散に関してだけでも事前分布が得られれば、長期発生確率の精度が向上することが見込まれる。

今回は、地震発生確率を求めるための厳密な計算方法を提起することを大きな目的としており、基本的に地震調査委員会 (2000) と同じ条件 (データセット I で、予測期間 10 年, 20 年, 30 年) で発生確率を計算し、結果を比較した。地震調査委員会 (2000) が発表した発生確率値を点推定値 (確率の期待値) と比較すると、予測期間 20 年および 30 年の場合に計算方法による差が認められる。しかし、いずれの予測期間についても、今回行った区間推定の範囲内である。地震発生確率の分布 (Fig. 3) から分かるように、調査委員会の値はさほど大き過ぎるものでなく、点推定値との差は統計的に有意ではなさそうである。また、区間推定で、予測期間 20 年と 30 年の範囲がかなり重なり合っており、両者を区別する十分な根拠がないことを示唆している。このように統計的に有意な差がない場合に、予測結果の相違をどのように扱うのが適当であるか今後検討する必要がある。

§ 5. 結 論

繰り返し発生した $n+1$ 個の大地震または固有地震の発生時が知られているが、パラメータ値について事前の情報がない場合について、対数正規分布モデルによる地震長期発生確率の計算方法をベイズの定理を用いて求めた。事前分布として $\pi(\mu, \sigma^2)=1$ を採用するならば、最後の地震から次の地震までの間隔 T は、 $\sqrt{n-3}(\ln(T) - \bar{x})/\sqrt{(n+1)s^2}$ が自由度 $n-3$ の t -分布に従うので、その分布は容易に計算できる。 $\bar{x}, s^2$ は時間間隔の対数の標本平均と標本分散である。一方、ベイズの定理を使えば、母集団のパラメータ μ, σ^2 の確率分布が求まるので、与えられた予測期間内に次の地震が発生する確率 P_q の確

Fig. 7. Distribution of the mean and unbiased variance of data, x_i , observed at some characteristic earthquake sequences.

率分布も計算できることを示した。

地震調査研究推進本部地震調査委員会(2000)が宮城県沖地震として同定したデータセットで長期発生確率 P_q の分布を計算すると、2001年1月1日から10年間に発生する確率の期待値(点推定)は地震調査委員会の値(約0.3)に近い。20年間、30年間の発生確率は調査委員会の値より小さい。他のデータセット(3例)についても計算したが、同様な結果であった。

発生確率 P_q の区間推定を“平均±標準偏差”で表すと、10年、20年、30年の場合それぞれの値は $P_q=0.28 \pm 0.126$, 0.62 ± 0.195 , 0.80 ± 0.194 となり、各区間内の確率は0.67, 0.65, 0.76である。 $\Delta T=30$ 年の場合は、非対称性が著しいJ字型分布をしており、確率密度の高い部分を採用すれば、 $0.75 < P_q \leq 1$ となる。

なお、今回使用したパラメータ μ , σ^2 の事前分布は $\pi(\mu, \sigma^2)=1$ であるが、今後その妥当性を検討評価する必要がある。

謝 辞

本研究の一部として、統計数理研究所の共同研究「地震発生の続発生・間欠性の調査研究」(課題番号14・地研2031, 尾形良彦教授担当)の費用を使用しました。東京大学地震研究所山科健一郎氏および匿名の査読者からは多々ご指摘をいただきました。これらの方々および関係者に御礼申し上げます。

文 献

Bakun, W. H. and A. G. Lindh, 1985, The Parkfield, California, earthquake prediction experiment, *Science*, **229**, 619–624.
 Davis, P. M., D. D. Jackson and Y. Y. Kagan, 1989, The longer it has been since the last earthquake, the longer the expected time till the next?, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **79**, 1439–1456.
 長谷川 昭, 2002, 的中した地震発生予測, *科学*, **72**, 581–583.
 長谷川安秀・橋本徹夫・草野富二雄・吉川一光・大西星司, 2002, 東北地方における固有地震的地震活動の検出, 日本地震学会講演予稿集, 2002年度秋季大会, C 36.
 今村明恒, 1933, 南海道沖大地震の謎, *地震* **1**, 5, 607–626.
 井元政二郎, 1999, 更新過程における予測確率の誤差, *地震* **2**, **52**, 337–340.
 石橋克彦・佐竹健治, 1998, 古地震研究によるプレート境界巨大地震の長期予測の問題点—日本付近のプレ-

ート沈み込み帯を中心として—, *地震* **2**, **50**, 別冊, 1–21.
 地震調査研究推進本部地震調査委員会, 2000, 宮城県沖地震の長期評価, インターネット公開.
 地震調査研究推進本部地震調査委員会, 2001, 長期的な地震発生確率の評価手法について, 99pp.
 地震調査研究推進本部地震調査委員会長期評価部会, 1998, (試案) 長期的な地震発生確率の評価手法及びその適用例について, 73pp.
 地震調査研究推進本部地震調査委員会長期評価部会, 1999, (改訂試案) 長期的な地震発生確率の評価手法について, 試案「長期的な地震発生確率の評価手法及びその適用例について」に対する意見募集の結果及び寄せられた意見に対する長期評価部会の考え方について, 55–138.
 Matsuzawa, T., T. Igarashi and A. Hasegawa, 2002, Characteristic small-earthquake sequence off San-riku, northeastern Honshu, Japan, *Geophys. Res. Lett.* **29**, 11, 1543, doi: 10.1029/2001GL014632, 2002.
 森口繁一・宇田川銑久・一松 信, 1956, 岩波数学公式 I—微分積分・平面曲線—, 岩波書店, 318pp.
 Nishenko, S. P. and R. Buland, 1987, A generic recurrence interval distribution for earthquake forecasting, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **77**, 1382–1399.
 Ohtake, M. and H. Ueda, 2002, Statistical forecast of the next Miyagi-oki, northeast Honshu earthquake, *Tohoku Geophys. J.*, **36**, 299–310.
 Ogata, Y., 1978, The asymptotic behavior of maximum likelihood estimators for stationary point processes, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **30**, 243–261.
 力武常次, 1976, 地震予知論入門, 共立全書, 212pp.
 Savage, J. C., 1993, The Parkfield prediction fallacy, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **83**, 1–6.
 瀬野徹三, 1979, 宮城県沖に予想される地震について, 地震予知連絡会会報, **21**, 38–43.
 島崎邦彦・河瀬和重・佐竹健治・鈴木康弘・尾形良彦・井元政二郎・隈元 崇, 地震の繰り返し発生に関する統計モデルの検討, 日本地震学会講演予稿集, 1998年度秋季大会, P136.
 宇津徳治, 1972, 北海道周辺における大地震の活動と根室南方沖地震について, 地震予知連絡会会報, **7**, 7–13.
 Utsu, T., 1984, Estimation of parameters for recurrence models of earthquakes, *Bull. Earthq. Res. Inst.*, **59**, 53–66.
 宇津徳治, 1998, 地震活動パターンと大地震の長期予測—繰返し・空白域・静穏化・先行地震・移動・相関など—, *地震* **2**, **50**, 別冊, 73–82.
 Working Group on California Earthquake Probabilities, 1995, Seismic hazards in southern California: probable earthquakes, 1994 to 2024, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 379–439.