有限歪弾性論における歪-歪力式の一般化

東京大学理学部地球物理学教室 島 津 康 男*

(昭和 28 年 5 月 20 日受理)

Generalization of the Stress-Strain Relations in the Theory of Finite Elastic Strain.

Yasuo SHIMAZU

Geophysical Institute, Faculty of Science, Tokyo University.

(Received May 20, 1953)

In case of finite elastic strain, we must distinguish the following two view points. (L) Whether the initial unstrained position is used as the independent variables in terms of which the strain is described, or (E) the final strained position is used. It is shown in § 2 that four sorts of strain definitions are possible. Two of them are (L) and the other two are (E). In § 3 and § 5, two sorts of definitions of stress are shown. They are (L) and (E) respectively. Admitting these definitions, eight sorts of expressions for the stress-strain relations are obtained. These eight expressions are equivalent, and we may adopt any of them in accordance with circumstance. The transformation theorem between these expressions is also given.

§ 1 序 論

弾性体についての議論の中心は、変形（歪）とこれを起すのに必要な力（歪力）との関係を知ることであろう。後で述べるように、歪力にははつきりした物理的な意味づけが出来るので、歪力の定義はさして困難でない。それに反して、歪の方には定義の仕方についていろいろの立場が考えられる。この論文では、一般に四種類の歪と二種類の歪力とが定義出来ることを示したい。又それに伴つて歪と歪力の関係にも八種類の表現が考えられる。併し、これらはあくまで立場の違いによつて生れた見かけ上の違いで、数学的には全く同等なものである。故に、一つの歪-歪力関係式の表現から他の表現への変換は常に可能である。我々は場合に依じて使い易いものを選べばよい。

ところで、この複雑さは変形が非常に小さければ起らない。非常に小さい変形とは、歪が無限小の量で、その2乗以上の量が無視出来る時である。我々はおつと一般に変形が小さくない場合を扱おうとするのであるが、その場合、次のように二つの立場を區別して考えねばならない。

(L) 変形を受けない前の座標を独立変数として議論するか、

(E) 変形後の座標を独立変数とするか。

* 現在名古屋大学理学部地球科学教室 Institute of Earth Science, Faculty of Science, Nagoya University. (Present Address)

Murnaghan¹⁾はこれらをそれぞれ Lagrange 的, Euler 的と呼んだ。これは流体力学での二つの立場に相当するからで、この二つの立場を区別することが我々の取扱いを複雑にするのである。

例えば、高圧を受けている物質の弾性を調べようとすれば、先ず大きな変形を与えた後、更に微小な変形（ある場合には弾性波などのダイナミカルなもの）を加えて実験するわけであるから、高圧を与えない前の座標系よりも、高圧を与えた後の座標系をもとにして考えた方が、取扱いがより楽になる。具体的に云うと、高圧のかけ方が静水圧的でない場合は、かけ方によつては初めの座標系では直交していた方向も、圧力をかけたために直交しなくなつて、取り扱いは面倒になる。変形後に直交する量をもとにして、後の微小な変形に関しては普通の弾性論を使えばよいわけである。又、境界条件のある問題の場合には、変形後の境界面の形自身が未知なのであるから、どうしても変形前の座標系について境界条件を与えなければならない。

ここでは先ず歪の定義を分類し、次に歪と歪力との関係を分類して、相互間の変換則を与える。但し、完全弾性体（歪と歪力とは一対一の対応にあり、弾性餘効や履歴は考えない）の仮定は捨てないことにする。

§ 2 歪テンソル

変形が無限に小さくない場合〔以下これを有限歪弾性論 (finite strain theory) と称し、無限小の場合を古典論と呼ぶ〕の弾性論について、もつとも明確な数学的議論をしたのは Murnaghan^{1,2)} である。変形の 2 乗量をも考えに入れてフックの法則を一般化しようとする試みは、以前から多くの人によつて行われていた。それらを統一的に論ずると、以下述べるように四種類になるのである。

先ず、§1 にも述べたように、弾性媒質内の任意の歪は、変形前と変形後との二つの座標をもっている。我々はその二つをそれぞれ独立な座標系 α, x で表わそう。従つて α -系に変化を与えることなく x -系を変換することが出来、その逆も可能である。テンソル解析の言葉で云うと、一方の座標系が他の座標系変換に対して不変量 (invariant) になる、これによつて更に二つの立場を考えることが出来るから、結局、 (α^i, x^λ) の二系によつて変形を考える方法 (A) と、 (α^λ, x^i) の二系による方法 (B) とになる。ここで i は invariant になる方の座標系を示す。変形が無限に小さければ α, x -系の區別はなくなる。次に各座標が微分可能であれば

$$\begin{array}{ll} \alpha_\lambda^i = \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^\lambda} & (2.1) \\ \beta_i^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \alpha^i} & (2.2) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \alpha_i^\lambda = \frac{\partial \alpha^\lambda}{\partial x^i} & (2.3) \\ \beta_\lambda^i = \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^\lambda} & (2.4) \end{array} \quad \begin{array}{l} (A) \\ (B) \end{array}$$

を定義することが出来る。これらの間には

$$\alpha_\lambda^i \beta_j^\lambda = \delta_j^i, \quad \beta_i^\lambda \alpha_\mu^\lambda = \delta_\mu^i, \quad \alpha_i^\lambda \beta_\mu^\lambda = \delta_\mu^i, \quad \beta_\lambda^i \alpha_j^\lambda = \delta_j^i \quad (2.5)$$

の相反関係がある。但し、 $\delta_\mu^\lambda, \delta_j^i$ はそれぞれ $\lambda=\mu, i=j$ の時に 1, それ以外の時は 0 である。

さて、(A) において変形前の線素分を ds_0 , これが変形後に ds になつたとすると、

$$(A) \quad (ds_0)^2 = da^i da^j, \quad (ds)^2 = dx^\lambda dx^\mu \quad (2.6)$$

これらより

$$(ds_0)^2 = da^i da^j = h_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu, \quad h_{\lambda\mu} = \alpha_\lambda^i \alpha_\mu^j \quad (2.7)$$

$$(ds)^2 = dx^\lambda dx^\mu = k_{ij} da^i da^j, \quad k_{ij} = \beta_i^\lambda \beta_j^\mu \quad (2.8)$$

を得るから

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (1 - h_{\lambda\mu}) dx^\lambda dx^\mu \quad (2.6)$$

$$= (k_{ij} - 1) da^i da^j \quad (2.10)$$

において、

$$(F_A) \quad 2\varepsilon_{\lambda\mu} = 1 - h_{\lambda\mu} \quad (2.11)$$

$$(L_A) \quad 2\eta_{ij} = k_{ij} - 1 \quad (2.12)$$

をそれぞれ A 型の Euler, Lagrange 歪と定義する。剛体的な変形の場合には、線素の長さに変化はないから、 $h_{\lambda\mu} = k_{ij} = 1$, 従つて (2.11), (2.12) において $\varepsilon_{\lambda\mu} = \eta_{ij} = 0$ である。すなわち歪は剛体的な変形 (移動, 廻転) からのずれを表わすものである。

次に (B) において

$$(ds_0)^2 = da^\lambda da^\mu = m^{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu, \quad m^{\lambda\mu} = \alpha_\lambda^i \alpha_\mu^j, \quad (2.13)$$

$$(ds)^2 = dx^i dx^j = n^{ij} da^i da^j, \quad n^{ij} = \beta_i^\lambda \beta_j^\mu, \quad (2.14)$$

より

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (1 - m^{\lambda\mu}) dx^\lambda dx^\mu \quad (2.15)$$

$$= (n^{ij} - 1) da^i da^j \quad (2.16)$$

となるから

$$(E_B) \quad 2\varepsilon^{\lambda\mu} = 1 - m^{\lambda\mu} \quad (2.17)$$

$$(L_B) \quad 2\eta^{ij} = n^{ij} - 1 \quad (2.18)$$

をそれぞれ B 型の Euler 歪, Lagrange 歪を定義することが出来る。

(2.11), (2.12), (2.17), (2.18) が四種類の歪の定義である。この中、(E_A) は E. G. Coker と L. N. G. Filon³⁾ が用ゐ、(L_A) は R. Kappus⁴⁾, L. Brillouin⁵⁾ のに、(E_B) は菅本⁶⁾ のに、(L_B) と (E_A) は F. D. Murnaghan^{1,2)} の用ゐたものに相当する。特に直角座標系で書くと、

$$(E_A) \quad 2\varepsilon_{11} = 1 - \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right)^2.$$

$$2\varepsilon_{23} = - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}, \text{ etc.} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 (L_A) \quad 2\eta_{11} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial a_1}\right)^2 - 1 \\
 2\eta_{23} &= \frac{\partial x_1}{\partial a_2} \frac{\partial x_1}{\partial a_3} + \frac{\partial x_2}{\partial a_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_3} + \frac{\partial x_3}{\partial a_2} \frac{\partial x_3}{\partial a_3}, \text{ etc.} \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E_B) \quad 2\varepsilon^{11} &= 1 - \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right)^2. \\
 2\varepsilon^{23} &= -\frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial a_3}{\partial x_1} - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}, \text{ etc.} \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (L_B) \quad 2\eta^{11} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_3}\right)^2 - 1, \\
 2\eta^{23} &= \frac{\partial x_2}{\partial a_1} \frac{\partial x_3}{\partial a_1} + \frac{\partial x_2}{\partial a_2} \frac{\partial x_3}{\partial a_2} + \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \frac{\partial x_3}{\partial a_3}, \text{ etc.} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

となる。

これら四種の歪の間の関係は、代数的に考えると、考え易い。すなわち、マトリックス (α_λ^i) を M で表わすと、(2.1)–(2.4) は

$$\begin{aligned}
 (\alpha_\lambda^i) &= M, \quad (\beta_i^\lambda) = M^{-1}, \\
 (\alpha_i^\lambda) &= M^*, \quad (\beta_\lambda^i) = (M^{-1})^*, \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

と書ける。ここで M^{-1} , M^* はそれぞれ M の逆 (reciprocal) 及び転置 (transposed) マトリックスである。従つて

$$(h_{\lambda\mu}) = M^* M \quad (2.24), \quad (k_{ij}) = (M^{-1})^* M^{-1} \quad (2.25)$$

$$(m^{\lambda\mu}) = (M^*)^* M^* = M M^*, \quad (2.26)$$

$$(n^{ij}) = ((M^{-1})^*)^* (M^{-1})^* = M^{-1} (M^{-1})^* \quad (2.27)$$

である。但し M が対称マトリックスであること、すなわち

$$M^* = M$$

を用いた。結局

$$(L_B) = (E_A)^{-1}, \quad (2.28) \quad (E_B) = (L_A)^{-1}, \quad (2.29)$$

$$(E_A) = M^{-1} (E_B) M, \quad (2.30) \quad (L_B) = M (L_A) M^{-1} \quad (2.31)$$

の関係をj得る。(2.28)–(2.31) は歪一歪力の関係の間の変換法則において重要な役割りを演ずる。

歪を受けている弾性媒質の平衡条件を議論するためには、ここまでの静的立場を離れて動力学的な立場をとらねばならない。そのためには、歪を加えた状態に更に仮想変位を加えてみるわけである。(A) (B) について仮想変位をそれぞれ δx^λ , δx^i とすると

$$(E_A) \quad \delta \varepsilon_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} \delta h_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \left[(\delta_{\nu\mu} - 2\varepsilon_{\nu\mu}) \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\lambda} + (\delta_{\lambda\nu} - 2\varepsilon_{\lambda\nu}) \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \right] \quad (2.32)$$

$$(L_A) \quad \delta\eta_{ij} = \frac{1}{2}\delta k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta x^\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\lambda}\right)\beta_i^\lambda\beta_j^\mu \quad (2.33)$$

$$(E_B) \quad \delta\varepsilon^{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}\delta m^{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta x^i}{\partial x^j} + \frac{\partial\delta x^j}{\partial x^i}\right)\alpha_i^\lambda\alpha_j^\mu \quad (2.34)$$

$$(L_B) \quad \delta\eta^{ij} = \frac{1}{2}\delta n^{ij} = \frac{1}{2}\left[(\eta_{ki} - 2\delta_{ki})\frac{\partial\delta x^k}{\partial x^i} + (\eta_{ik} - 2\delta_{ik})\frac{\partial\delta x^k}{\partial x^j}\right] \quad (2.35)$$

となる。これは Murnaghan¹⁾ の記法に合わせてある。これをみると (E_A) と (L_B) 及び (L_A) と (E_B) はそれぞれ似た表現をもっている。これは (2.28) (2.29) から容易に察せられるところである。特に (2.19), (2.20) に対応して

$$(E_A) \quad 2\delta\varepsilon_{23} = \frac{\partial\delta x_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\delta x_3}{\partial x_2} - 2\left(\varepsilon_{21}\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_3} + \varepsilon_{22}\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_3} + \varepsilon_{23}\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3}\right) \\ - 2\left(\varepsilon_{31}\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_2} + \varepsilon_{32}\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_2} + \varepsilon_{33}\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_2}\right), \text{ etc.} \quad (2.36)$$

$$(L_A) \quad 2\delta\eta_{23} = 2\left(\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_2}\frac{\partial x_1}{\partial a_3} + \frac{\partial\delta x_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_3} + \frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial a_3}\frac{\partial x_3}{\partial a_3}\right) \\ + \left(\frac{\partial\delta x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\delta x_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial a_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_3} + \frac{\partial x_2}{\partial a_2}\frac{\partial x_1}{\partial a_3}\right) \\ + \left(\frac{\partial\delta x_3}{\partial x_3} + \frac{\partial x_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial a_2}\frac{\partial x_3}{\partial a_3} + \frac{\partial x_3}{\partial a_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_3}\right) \\ + \left(\frac{\partial\delta x_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\delta x_3}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial x_3}{\partial a_2}\frac{\partial x_1}{\partial a_3} + \frac{\partial x_1}{\partial a_2}\frac{\partial x_3}{\partial a_3}\right), \text{ etc.} \quad (2.37)$$

を得る。

§ 3 歪力の定義と仮想仕事

今面力 F が面積素分に働いているものとする。変形前後の面積素分をそれぞれ dS_0 , dS とすると、外力は変形の前後で保存されるから

$$F^i dS_0 = F^\omega dS \quad (3.1)$$

こゝで歪力テンソルを次のように定義する。

$$F^i dS_0 = T^{ik} dS_k \quad (3.2)$$

$$= F^\omega dS = T^{\omega\nu} dS_\nu \quad (3.3)$$

すなわち歪力テンソル T^{ik} は α -系について定義され、 $T^{\omega\nu}$ は x -系について定義されている。

先ず考え易い $T^{\omega\nu}$ で話を進めよう。平衡条件を求めるには、仮想変位を与えた時の仮想仕事を計算して見ればよい。 (L_A) についての仮想仕事は

$$I = \int_S (F^\mu dS) \delta x^\mu = \int_S (T^{\mu\nu} dS_\nu) \delta x^\mu \quad (3.4)$$

Gauss の定理によつてこれは

$$I = \int_V \frac{\partial(T^{\mu\nu}\delta x^\mu)}{\partial x^\nu} dV \quad (V: \text{変形後の体積}) \quad (3.5)$$

と書ける。一方単位質量に働く体積力を X とすると、体積力による仮想仕事は

$$II = \int_V \rho X^\mu \delta x^\mu dV \quad (3.6)$$

ここで ρ は変形後の媒質密度である。故に、仮想仕事は全体で

$$T.V.W. = I + II = \int_V \left[\left(\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \rho M^\mu \right) \delta x^\mu + T^{\mu\nu} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} \right] dV \quad (3.7)$$

仮想変位が剛体的な移動である場合には

$$\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} = 0 \text{ であつて、その時仮想仕事は } 0 \text{ であるから、}$$

$$T.V.W. = \int_V \left(\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \rho X^\mu \right) \delta x^\mu dV = 0 \quad (3.8)$$

これは任意の δx^μ について成り立つから

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \rho X^\mu = 0 \quad (3.9)$$

これは平衡条件に他ならず、古典論の場合と同じである。次に剛体的な仮想変位

$$\delta(ds)^2 = \left(\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu dx^\nu = 0 \quad (3.10)$$

についても仮想仕事はだから

$$T.V.W. = \int_V T^{\mu\nu} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} dV = 0 \quad (3.11)$$

又は

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

すなわち $T^{\mu\nu}$ は対称テンソルである。結局、

$$T.V.W. = \frac{1}{2} \int_V T^{\mu\nu} \left(\frac{\delta x^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \right) dV \quad (3.12)$$

が一般の仮想変位に対して成り立つ、古典論では α, x 系の区別がなくなり、従つて $\beta_i^\lambda \beta_j^\mu = 1$ となるから (2.33) において

$$\delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta x^\lambda}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \quad (3.13)$$

で、従つて

$$T.V.W. = \int T^{\mu\nu} \delta \eta_{ij} dV \quad (3.14)$$

である。

§ 4 歪-歪力の関係

変形前後でエネルギーは常に保存されるから、一般に

$$\delta(u dm) = T \cdot V \cdot W + \delta(Q dm) \quad (4.1)$$

但し dm は質量素分, u, Q はそれぞれ単位質量当りの内部エネルギーと熱エネルギーである. エントロピーを σ , Helmholtz の自由エネルギーを $\phi = u - T\sigma$, T を温度とすると (4.1) から

$$\delta\phi dm = T \cdot V \cdot W - \sigma \delta T dm \quad (4.2)$$

又

$$dm = \rho dV \quad (4.3)$$

だから, (3.12) を用いて

$$\int_V (\delta\phi + \sigma \delta T) \rho dV = \frac{1}{2} \int_V T^{\mu\nu} \left(\frac{\delta x^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\delta x^\nu}{\partial x^\mu} \right) dV \quad (4.4)$$

を得る. (2.33) より

$$\frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} = 2\delta\eta_{ij}(\beta_i^\mu \beta_j^\nu)^{-1} \quad (4.5)$$

を得るから, (4.5) を (4.4) に入れて

$$\int_V \rho(\delta\phi + \sigma \delta T) dV = \int_V T^{\mu\nu} \delta\eta_{ij}(\beta_i^\mu \beta_j^\nu)^{-1} dV \quad (4.6)$$

(4.6) は (L_A) についての一般化された歪-歪力の式である. 媒質が均算の場合には (4.6) は

$$\rho(\delta\phi + \sigma \delta T) = T^{\mu\nu} \delta\eta_{ij}(\beta_i^\mu \beta_j^\nu)^{-1}$$

又は

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{\delta\phi + \sigma \delta T}{\partial \eta_{ij}} \beta_i^\mu \beta_j^\nu \quad (4.7)$$

等温変化の場合には $\delta T = 0$ だから

$$(L_A) \quad T^{\mu\nu} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{ij}} \beta_i^\mu \beta_j^\nu = 2\rho \frac{\partial \phi}{\partial k_{ij}} k_{ij} \quad (4.8)$$

となる.

これは (L_A) についてであるが, その他の歪については, 例えば (2.28)–(2.31) を用いると,

$$(L_A) = (E_B)^{-1} \text{ より } \frac{\partial \phi}{\partial k_{ij}} = -m^{\mu j} \frac{\partial \phi}{\partial m^{\mu\nu}} m^{\nu i} \text{ であるから}$$

$$(F_B) \quad T^{\mu\nu} = -2\rho \frac{\partial \phi}{\partial m^{\mu\nu}} m^{\mu\nu}$$

$$(L_B) = M^*(L_A)(M^{-1})^* \text{ より } \frac{\partial \phi}{\partial k_{ij}} = M^* \frac{\partial \phi}{\partial n^{ij}} M^* \text{ であるから}$$

$$(N_B) \quad T^{\mu\nu} = 2\rho \frac{\partial \phi}{\partial n^{ij}} n^{ij}$$

$(L_B) = (E_A)^{-1}$ だから, $(L_A) \rightarrow (E_B)$ と同様にして

$$(F_A) \quad T^{\mu\nu} = -2\rho \frac{\partial \phi}{\partial h^{\mu\nu}} h_{\mu\nu}$$

を得る。結局

$$(E_A)_E \quad T^{\mu\nu} = -2\rho \frac{\partial \phi}{\partial h^{\mu\nu}} h_{\mu\nu}$$

$$(L_A)_E \quad T^{\mu\nu} = 2\rho \frac{\partial \phi}{\partial h_{ij}} k_{ij}$$

$$(E_B)_E \quad T^{\mu\nu} = -2\rho \frac{\partial \phi}{\partial m^{\mu\nu}} m^{\mu\nu}$$

$$(L_E)_E \quad T^{\mu\nu} = 2\rho \frac{\partial \phi}{\partial n^{ij}} n^{ij}$$

を得る。

古典論の場合には

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mu\nu} = \eta_{ij} = \varepsilon^{\mu\nu} = \eta^{ij} \quad (4.13)$$

$$\rho = \rho_0 \quad (4.14)$$

であつて (4.9) — (4.12) は

$$T = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \quad (4.15)$$

となる。

Brillouin⁵⁾ の得たものは $(L_A)_E$ であり, Murnaghan^{1), 2)} の得たのは $(L_B)_E$, $(E_A)_E$ に相当する。Birch⁷⁾ は $(E_A)_B$ を具体的な問題に応用した。前にも述べたように有限の歪を論じた人は多いが, 歪と歪力との関係については餘り注意を払わなかつたように思われる。(4.9) — (4.12) において一番重要なことは, 歪を加えた場合の密度変化を考えに入れたことであろう。それから (3.12) と (3.14) とを比べて判るように, 歪に代つて仮想変位ベクトルの方が物理的には基本の意味を持つてゐることである。古典論での歪—歪力の関係 (4.15) を言葉で云うと,

“歪力テンソルは, Helmholtz の自由エネルギーの歪テンソルに関する勾配である”。ということになるが, 有限歪の場合には, (3.12) が根本の意味を持つていて,

“歪力テンソルと, 仮想変位ベクトルの空間微分とのスカラー積は, 媒質全体についてなされた仮想仕事に等しい”。

と云うことが出来る。そして古典論の場合に限つて, 歪テンソルの変分と, 仮想変位ベクトルの空間微分とが等しいのである。

§ 5. Lagrange 的歪力

§ 4 で述べた歪力テンソル $T^{\mu\nu}$ は (3.3) で見たように x 系で定義されたもので, Euler 的

な定義である。(3.2) の Lagrange 的歪力についての歪一歪力関係は

$$T^{jk}dS_k = T^{\mu\nu}dS_\nu \quad (5.1)$$

から導くことが出来よう。その前に面積素分の変換法則を調べなくてはならない。一般に α 系上の任意の量が u, v 2 つの独立変数の函数である時、面積素分は

$$dS_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha^i}{\partial u} & \frac{\partial \alpha^j}{\partial u} \\ \frac{\partial \alpha^i}{\partial v} & \frac{\partial \alpha^j}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = co\left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial w}\right) dudv \quad (5.2)$$

で定義される。但し、 $co\left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial w}\right)$ は

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha^i}{\partial u} & \frac{\partial \alpha^j}{\partial u} & \frac{\partial \alpha^k}{\partial u} \\ \frac{\partial \alpha^i}{\partial v} & \frac{\partial \alpha^j}{\partial v} & \frac{\partial \alpha^k}{\partial v} \\ \frac{\partial \alpha^i}{\partial w} & \frac{\partial \alpha^j}{\partial w} & \frac{\partial \alpha^k}{\partial w} \end{vmatrix}$$

の $\frac{\partial \alpha^k}{\partial w}$ に関する餘因数行列式である。同様に、この面積素分は x 系では

$$dS_\nu = co\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial w}\right) dudv \quad (5.3)$$

であるから

$$\frac{dS_k}{dS_\nu} = co\left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial x^\nu}\right) = co(\alpha_\nu^k)$$

$$\text{又, } co(\alpha_\nu^k) = (\det \alpha_\nu^k) \beta_\nu^k \quad (5.5)$$

$$\det \alpha_\nu^k = \frac{dV_0}{dV} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (5.6)$$

を用いると、

$$\frac{dS_k}{dS_\nu} = \frac{dV_0}{dV} \beta_\nu^k = \frac{\rho}{\rho_0} \beta_\nu^k \quad (5.7)$$

(5.7) を (5.1) に入れると

$$\begin{aligned} T^{jk}dS &= T^{jk} \frac{\rho}{\rho_0} \beta_\nu^k dS_\nu \\ &= T^{\mu\nu} dS_\nu \end{aligned}$$

より

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{\rho_0} T^{jk} \beta_k^\nu \quad (5.8)$$

を得る。(5.8) は両方の歪力表現間の変換法則である。これを (4.9)–(4.12) に入れると、

$$(E_A)_L \quad T^{jk} = -2\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial h_{\mu\nu}} h_{\mu\nu} \alpha_\nu^k \quad (5.9)$$

$$(L_A)_L \quad T^{jk} = 2\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial k_{jk}} \beta_k^\mu \quad (5.10)$$

$$(E_B)_L \quad T^{jk} = 2\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial m^{\mu\nu}} m^{\mu\nu} \alpha_\nu^k \quad (5.11)$$

$$(L_B)_L \quad T^{jk} = -2\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial n^{jk}} n^{jk} \alpha_\nu^k \quad (5.12)$$

(4.9)–(4.12), (5.9)–(5.12) がもつとも一般化した歪と歪力との関係式であつて, § 1 に述べたように. 問題の性質によつて適当なものを選べばよい. Murnaghan²⁾ の modified stress は (5.10) である.

実際の問題を解くには, ϕ が弾性エネルギーであるとして, 歪の函数と仮定するわけであるが, その具体的な例として, 例えば Birch は等方性物質に静水圧をかけた場合に $(E_A)_E$ を応用し⁷⁾, 結晶体に静水圧をかけた場合に $(E_A)_E$, $(L_B)_E$ ⁸⁾ を応用した. その他の例については島津・竹内⁹⁾ 及び島津¹⁰⁾ の $(E_A)_E$ による二三の例がある. 境界条件を含む問題については § 1 で述べたように Lagrange 的歪力を考えねばならず, 簡単な場合については Murnaghan²⁾ の計算があるが, 特にダイナミカルな問題については後の機会に改めて述べることにしたい.

文 献

- 1) Murnaghan, F. D., "Finite Deformations of an Elastic Solid." Am. J. Math., **59**, (1937), 235–260.
- 2) Murnaghan, F. D., "Finite Deformation of an Elastic Solid." John Wiley & Sons, New York, (1951).
- 3) Coker, F. G. and Filon, L. N. G., "A Treatise on Photo-Elasticity," Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1931), chap. 3.
- 4) Kappus, R., Z. A. M. M., **19**, (1939), 271, 344.
- 5) Brillouin, L., "Les Tenseurs en Mecanique et en Elasticité," 2nd Ed., Masson, Paris, (1949), Chap. 10.
- 6) 菅本新助, "弾性・可塑性・粘性に関する現象論的諸理論の熱力学的導来法", I, 物性論研究, **20**, (1949), 29, II, ibid., **21**, (1949), 34.
- 7) Birch, F., "The effect of pressure upon the elastic parameters of isotropic solids, according to Murnaghan's theory of finite strain," Jour. Appl. Phys., **9**, (1938), 279.
- 8) Birch, F., "Finite elastic strain of cubic crystals," Phys. Rev., **71**, (1947), 809.
- 9) Shimazu, Y., and Takeuchi, H. "Effect of tension upon the elastic parameters of isotropic solids," Geophys. Notes, Tokyo Univ., **2**, No. 23, (1949).
- 10) 島津康男, "歪を受けた等方弾性媒質の中を伝わる弾性波", 地震, **5**, (1952), 35.