重力と地下構造との関係 (II)

—— 地殻物質密度の分布と均衡異常との関係 ——

帝国石油株式会社 加 藤 元 彦

(昭和 28 年 6 月 20 日受理)

On the Relations between Gravity and Subterranean Structure (II)

Relations between the isostatic anomaly and the
distribution of density of subterranean matters.

Motohiko KATO

Teikoku Oil Co.

(Received June.20, 1953)

In the preceding paper, the author assumed the density distribution of the subterranean structure was the eq. (4) and he deduced the coefficient C_m from the boundary conditions, these were the gravity and the density both observed on the earth surface.

By this method, he showed the actual structure was reasonably explained by the gravity anomaly.

Consulting the eqs. (2) and (6), he now assumes the distribution of excess mass on the surface ρ_{em} and their compensated subterranean mass ρ_{cm} . They are the eqs. (8) and (9).

He takes this model for that of isostasy and calculates some quantities which are shown in Table 1. and Fig. 1.

When the surface topography are represented by the eq. (17) and the density on the surface is ρ_0 , the isostatic anomaly is the eq. (28) in his model of isostasy.

These results are agreed with that of the *Tsuboi's model* which is identically independent from this model.

The relation between the isostatic anomaly and the *coefficient of the rate of change of density* λ is shown by the eq. (29).

§ 1. 緒 論¹⁾

重力の均衡異常を説明する為の地殻の地球物理学的構造は J. B. Airy, J. H. Pratt²⁾ 以来地殻均衡説が提出せられ、それ以後にも J. H. Hayford, W. Bowie, W. Heiskanen, 坪井, 熊谷³⁾ 等がこの地殻均衡模型に種々な検討を加え或は新たな模型を提出して均衡異常を説明する試みがなされた。

1) 本稿の要旨は昭和 27 年春季地震学会講演会, 秋季物理探鉱協会講演会にて論述した。

2) 文献 (4), (5)。

3) 文献 (1), (2), (3) 及び (6) から (12)。

然し元来地殻の構造は地表から浅い所の小さい構造を除外して考えるべきものではないが、従来の模型では地殻均衡の成立つ大きな構造のみに着目して論ぜられたのである。筆者の提出しようとする密度分布の模型は、これらを一つの模型で説明し得る所に特長があつて、こゝに新たな模型を提出した意義があるのである。

即ち筆者は前稿⁴⁾において地下資源探査の目的から一つの密度分布の模型を考えたが、この模型を更に拡張して均衡異常を説明する事が出来且つ筆者の模型で重要な常数であつた密度変化係数 λ の地球物理学的意義を明確にする事が出来たのでこれを本稿に述べようと思う。

前稿において座標軸は地表面内に X, Y 軸、鉛直下方に Z 軸を採り、地表の平均密度を $\bar{\rho}_0$ 、深さ無限大の所の密度を ρ_t とし適当な密度変化係数 λ をきめれば、地下任意の深さの平均密度 $\bar{\rho}$ は

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + (1 - e^{-\lambda z})(\rho_t - \bar{\rho}_0) \quad (1)$$

で表わされるとした。地表の密度分布を

$$\rho_0 = \bar{\rho}_0 + \sum D_m \frac{\cos}{\sin} a_m x, \quad (2)$$

深さ z の一水平面内の密度分布を

$$\rho = \bar{\rho} + (1 - e^{-\lambda z}) \sum e^{-\lambda_m z} C_m \frac{\cos}{\sin} a_m x \quad (3)$$

とすれば、(1), (2), (3) から地下の密度分布を表わす一般式は

$$\rho = \bar{\rho}_0 + \sum D_m \frac{\cos}{\sin} a_m x + (1 - e^{-\lambda z})(\rho_t - \bar{\rho}_0 - \sum D_m \frac{\cos}{\sin} a_m x) + (1 - e^{-\lambda z}) \sum e^{-\lambda_m z} C_m \frac{\cos}{\sin} a_m x, \quad (4)$$

又はこれを変形して

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \sum X_m \frac{\cos}{\sin} a_m x, \\ X_m &= e^{-\lambda z} D_m + (1 - e^{-\lambda z}) e^{-\lambda_m z} C_m \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

となる。(4) 又は (4') で表わされる密度分布の模型を仮定し、地表の重力 g を

$$g = B_0 + \sum B_m \frac{\cos}{\sin} a_m x \quad (5)$$

とすると、地下の密度分布の係数 C_m は

$$C_m = \frac{1}{\lambda} (\lambda + \lambda_m + a_m) (\lambda_m + a_m) \left\{ \frac{B_m}{2\pi k^2} - \frac{D_m}{\lambda + a_m} \right\} \quad (6)$$

で表わされる事を示し、又この模型を使つて地下 1500 m 迄の密度分布を求めて実際の構造とよく一致する事が判つた。即ちこの模型において $\rho_t - \bar{\rho}_0 = 0.95$ C. G. S. とし、構造の波長を l とすると

4) 本稿中、前論文又は前稿とは文献 (13) を指す。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= 0.5 \times 10^{-5} \text{ C. G. S.} = \frac{2\pi}{L}, & L &= 12.57 \times 10^5 \text{ C. G. S.}, \\ \lambda_m &= a_m = \frac{2\pi}{l} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とした場合は物理的状態をよく説明し得たのである。

(6) 式中の地表の密度分布の係数 D_m を含む項に負号がついている事は、表面の質量過剰に対して地下にそれに対応する質量不足がある事を示すものである。今構造の波長 l が充分長い即ち $\lambda \gg a_m$ と考え、 $B_m = 10 \text{ mgal}$, $D_m = 0.1 \text{ C. G. S.}$ とすれば (6) 式の括弧内の量は

$$\frac{B_m}{2\pi k^2} \approx 2 \times 10^4 \text{ C. G. S.}, \quad \frac{D_m}{\lambda + a_m} \approx 2 \times 10^4 \text{ C. G. S.}$$

となつて波長が大きくなると明かに後者は前者に比して無視出来ない事が判る。夫故この模型で地表の過剰密度分布の係数 D_m に対して

$$-\frac{1}{\lambda}(\lambda + \lambda_m + a_m)(\lambda_m + a_m) \frac{D_m}{\lambda + a_m}$$

を地下の補償密度分布の係数と考えてこの模型をそのまま地殻均衡の模型として採用してみよう。

§2. 地殻均衡の模型に關係した諸量の算定

地殻均衡が成立する様な大きな構造に対して、上と同じように λ の値が $0.5 \times 10^{-5} \text{ C. G. S.}$ であると言ふ保証はない。前稿の例の如く第三紀第四紀のような新しい地層では密度変化係数が大きいが、地殻の均衡が成立つ様な古い地層や火成岩に対しても、このような大きな値がその儘採用し得ることは疑わしく、恐らくもつと小さい値であらう想像される。故に密度変化係数 λ の値は次項で検討を加える事にして本項では λ は或る常数であるとする。

先ず (6) 式中の括弧内の D_m にかかる係数 $1/(\lambda + a_m)$ の値が構造の波長 l に依つて如何に変化するかを見る為に $\lambda/(\lambda + a_m)$ という量の値を Fig. 1. 及び Table. 1. に示した。これらは長さの単位を $L = 2\pi/\lambda$ として表わした。

Fig. 1. Quantities related to the model of Isostasy.

Table 1. Quantities related to the model of isostasy.

Put $\lambda_m = a_m$. The unit of l, Z, d is $L = 2\pi/\lambda$. Numbers in () are ratios l/Z or l/d . l_0 is the value of l when $\lambda = 0.5 \times 10^{-5}$ C.G.S.

l	$\frac{\lambda}{\lambda + a_m}$	E	Z (mean)	Z (comp)	Z (max)	d	$d\lambda$	l_0 (km)
0.0398	0.038	0.150	0.012 (3.20)		0.006 (6.41)	0.0207 (1.93)	0.130	0.5
0.0597	0.056	0.219	0.018 (3.23)		0.009 (6.47)	0.0273 (2.18)	0.172	0.75
0.0796	0.074	0.284	0.024 (3.26)		0.012 (6.53)	0.0330 (2.41)	0.208	1.0
0.119	0.107	0.404	0.036 (3.32)		0.018 (6.65)	0.0425 (2.81)	0.267	1.5
0.159	0.137	0.512	0.047 (3.37)		0.024 (6.77)	0.0503 (3.16)	0.316	2
0.239	0.193	0.697	0.069 (3.48)		0.034 (7.01)	0.0626 (3.82)	0.393	3
0.318	0.241	0.829	0.089 (3.57)	0.053 (5.97)	0.044 (7.24)	0.0720 (4.42)	0.452	4
0.477	0.323	1.08	0.127 (3.75)	0.078 (6.09)	0.062 (7.69)	0.0858 (5.56)	0.539	6
0.637	0.389	1.25	0.163 (3.90)	0.103 (6.19)	0.078 (8.12)	0.0957 (6.65)	0.601	8
0.955	0.488	1.48	0.230 (4.16)	0.153 (6.23)	0.107 (8.95)	0.1089 (8.77)	0.684	12
1.273	0.560	1.61	0.292 (4.36)	0.194 (6.55)	0.131 (9.74)	0.1175 (10.84)	0.738	16
1.910	0.656	1.76	0.408 (4.68)	0.280 (6.82)	0.170 (11.23)	0.1280 (14.92)	0.804	24
2.55	0.718	1.84	0.520 (4.90)	0.361 (7.04)	0.201 (12.64)	0.1342 (18.97)	0.844	32
3.82	0.792	1.91	0.734 (5.20)	0.518 (7.38)	0.250 (15.26)	0.1414 (27.0)	0.888	48
5.09	0.836	1.95	0.944 (5.40)	0.669 (7.62)	0.288 (17.71)	0.1453 (35.0)	0.913	64
7.64	0.884	1.97	1.357 (5.63)	0.963 (7.93)	0.343 (22.3)	0.1496 (51.1)	0.940	96
10.19	0.911	1.98	1.766 (5.77)	1.252 (8.14)	0.384 (26.5)	0.1518 (67.1)	0.954	128
15.28	0.939	1.99	2.58 (5.92)	1.822 (8.38)	0.444 (34.4)	0.1524 (70.2)	0.969	192
20.4	0.953	2.00	3.39 (6.00)	2.39 (8.53)	0.487 (41.8)	0.1538 (131.1)	0.976	256
30.6	0.968	2.00	5.02 (6.09)	3.52 (8.69)	0.549 (55.6)	0.1566 (195.1)	0.984	384
40.7	0.976	2.00	6.64 (6.14)	4.65 (8.77)	0.594 (68.6)	0.1573 (259.)	0.988	512
∞	1.000	2.00	∞ (6.28)	∞ (9.06)	∞ (∞)	0.1592 (∞)	1.000	∞

一方地表の過剰密度分布の第 m 項 ρ_{em} 及びこれに対する補償密度分布の第 m 項 ρ_{cm} は (4), (6) 式から

$$\rho_{em} = e^{-\lambda z} D_m \frac{\cos a_m x}{\sin a_m x}, \quad (8)$$

$$\rho_{cm} = -(1 - e^{-\lambda z}) e^{-\lambda_m z} \frac{1}{\lambda} (\lambda + \lambda_m + a_m)(\lambda_m + a_m) \frac{D_m \cos a_m x}{\lambda + a_m \sin a_m x} \quad (9)$$

である。これら補償質量と過剰質量の総量の比 E は各項について

$$E = E_m = \left| \int_0^\infty \rho_{cm} dz / \int_0^\infty \rho_{em} dz \right| = \left(1 + \frac{a_m}{\lambda + \lambda_m} \right) \left(1 + \frac{a_m}{\lambda_m} \right) \left(1 - \frac{a_m}{\lambda + a_m} \right) \quad (10)$$

となる。こゝで $\lambda_m = a_m = 2\pi/l$ とすると

$$E = 2 \left\{ 1 - \frac{a_m^2}{(\lambda + a_m)^2} \right\}, \quad (\lambda_m = a_m \text{ の時}) \quad (11)$$

となる。この E の値 (Fig. 1 及び Table 1) は構造の波長が大きくなる程 2 に近づく量であつて、こゝに挙げた二つの量の観察から波長の長いもの程質量補償が充分成立していて、波

長の短い地形に対してはそうでない事が判る。E がその極限値の半分になる波長は $0.42L$ である。

過剰質量の総量 M_{em} の分布は (8) を z について 0 から ∞ まで積分して

$$M_{em} = \frac{D_m}{\lambda} \frac{\cos a_m x}{\sin a_m x} \quad (12)$$

であるから補償質量の総量 M_{cm} の分布は次の如く表わされる：

$$M_{cm} = \frac{E_m D_m}{\lambda} \frac{\cos a_m x}{\sin a_m x}. \quad (13)$$

補償質量の平均の深さ $Z(\text{mean})$ は m の一つについて

$$Z(\text{mean}) = \int_0^\infty \rho_{cm} z dz \bigg/ \int_0^\infty \rho_{cm} dz = \frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda + \lambda_m} \quad (14)$$

となる。過剰質量と補償質量の地表面からの総量が等しくなる深さ、即ち重力が一定で静水力学平衡にあると考えた時の両方の質量による圧力が 0 となる所謂補償面の深さ $Z(\text{comp})$ は

$$\int_0^z \rho_{em} dz + \int_0^z \rho_{cm} dz = 0$$

を満足する z であつて、 $\exp(-\lambda z) \ll 1$ で且つ $\lambda_m = a_m$, $a_m^2 \ll a_m$ ならば

$$Z(\text{comp}) \div \frac{1}{a_m} \log \left\{ 2 + \frac{2a_m}{\lambda + 2a_m} \right\}, \quad (\lambda_m = a_m \text{ の時}) \quad (15)$$

で表わされる。又補償質量の一水平面内の振巾の最大になる深さ $Z(\text{max})$ は $\partial \rho_{cm} / \partial z = 0$ とおいて

$$Z(\text{max}) = \frac{1}{\lambda} \log \left\{ 1 + \frac{\lambda}{\lambda_m} \right\} \quad (16)$$

である。

以上挙げた諸量は密度変化係数 λ に従つて変る値であるので、長さの単位を $L = 2\pi/\lambda$ とし、又 $\lambda_m = a_m$ とした時の値を Table 1 に示した。括弧内の値は比 l/Z であつて、補償質量の平均の深さ $Z(\text{mean})$ が構造の波長の $1/4$ から $1/6$ 程度で、補償面の深さ $Z(\text{comp})$ が $1/6$ から $1/8$ 程度である事は注意すべき事柄である。

§ 3. 均衡異常と密度変化係数との関係

今地表の凹凸 h が

$$h = H_0 + \sum H_m \frac{\cos a_m x}{\sin a_m x} \quad (17)$$

で表わされたとする。地表面即ち高さ h の所の密度は一定で ρ_0 とし表面から深くなるにつれて密度は (1) 式と同様に

$$\rho = \rho_0 + \{1 - e^{-\lambda(z+h)}\}(\rho_t - \rho_0) \quad (18)$$

で表わされる様に大きくなると仮定する。従つて高さ h である山の下の $z=0$ の水平面上の

密度 ρ_h は $\lambda h \ll 1$ とすると

$$\rho_h = \rho_0 + \lambda(\rho_t - \rho_0)H_0 + \sum \lambda(\rho_t - \rho_0)H_m \frac{\cos}{\sin} \alpha_m x \quad (19)$$

となる。筆者の模型では $z=0$ の面から下の過剰質量は $\exp(-\lambda z)\rho_h$ となるから、これを z が 0 から ∞ まで積分して過剰質量の総和は m の一つの項について

$$(\rho_t - \rho_0)H_m \frac{\cos}{\sin} \alpha_m x \quad (20)$$

となり、これに依る重力異常の係数 B_{em} は

$$\begin{aligned} B_{em} &= 2\pi k^2 \int_0^\infty e^{(-\lambda + \alpha_m)z} \lambda(\rho_t - \rho_0)H_m dz \\ &= 2\pi k^2 \frac{\lambda}{\lambda + \alpha_m} (\rho_t - \rho_0)H_m \end{aligned} \quad (21)$$

となる。

一方 $z=0$ から上の全過剰質量は $\lambda h \ll 1$ として m の一つの項について

$$\rho_0 H_m \frac{\cos}{\sin} \alpha_m x \quad (22)$$

となるから、過剰質量の総量 M_{em} は (20), (22) を加えて

$$M_{em} = \rho_t H_m \frac{\cos}{\sin} \alpha_m x \quad (23)$$

となる。これに対して前述 (13) のような補償質量が存在するとする。即ち前項の D_m に相当する量は (12), (23) を比べて

$$D_m = \lambda \rho_t H_m \quad (24)$$

となるから補償質量の分布は

$$\rho_{cm} = -(1 - e^{-\lambda z})e^{-\lambda_m z} \frac{(\lambda + \lambda_m + \alpha_m)(\lambda_m + \alpha_m)}{\lambda + \alpha_m} \rho_t H_m \frac{\cos}{\sin} \alpha_m x \quad (25)$$

で表わされる。これによる地表の重力の係数 B_{cm} は

$$B_{cm} \frac{\cos}{\sin} \alpha_m x = 2\pi k^2 \int_0^\infty e^{-\alpha_m z} \rho_{cm} dz$$

即ち

$$B_{cm} = -2\pi k^2 \frac{\lambda}{\lambda + \alpha_m} \rho_t H_m \quad (26)$$

となる。均衡異常 g を

$$g = B_0 + \sum B_m \frac{\cos}{\sin} \alpha_m x \quad (27)$$

とするならば明かに

$$B_m = B_{em} + B_{cm}$$

であるから (21), (26) 式より

$$B_m = -2\pi k^2 \frac{\lambda}{\lambda + a_m} \rho_0 H_m \quad (28)$$

となる。或はこれを変形して

$$\frac{\lambda}{\lambda + a_m} = -\frac{B_m}{2\pi k^2 \rho_0 H_m} \quad (29)$$

となるから、均衡異常と地表の凹凸から密度変化係数 λ を求める事が出来る筈である。

坪井の模型⁵⁾では地殻の厚さ d は

$$d = -\frac{1}{a_m} \log \left(-\frac{B_m}{2\pi k^2 \rho_0 H_m} \right) \quad (30)$$

であるから (29) 式より

$$d = -\frac{1}{a_m} \log \frac{\lambda}{\lambda + a_m} \quad (31)$$

である。これから d 及び $d\lambda$ の値を求めると Table 1 の如くなる。又 $a_m d = 2\pi d/l \gg (a_m d)$ とすれば

$$d = \frac{1}{\lambda} \quad \text{或は} \quad L = 2\pi d \quad (32)$$

となつて、坪井の模型の地殻の厚さ d から密度変化係数 λ を簡単に見当づける事が出来るのである。本項の結果を導く過程では λ_m に対して前項又は前稿で附した条件： $\lambda_m = a_m$ が入っていない事は注意すべきである。又均衡異常 (28) にも地殻の厚さ (31) にも λ_m が入っていないで、 λ のみが未知量である事は重要な事柄である。

坪井の模型を使つて各地の重力分布から求めた地殻の厚さ d や均衡の最小限 R 等は Table 2. に示した⁵⁾。これらの値は各種の波長 l をもつた構造についての平均値であるが、地殻の厚さ d は大約 30 km~60 km と見做す事が出来る。これから L は 190 km~380 km 従つて λ は $0.02 \times 10^{-5} \sim 0.03 \times 10^{-5}$ (C. G. S.) となつて前稿で用いた値 (7) に比して1桁小さい。これは地殻の均衡が成立する為には非常に長い時間が経つているので、均衡の成立していない新しい地層よりもそれだけ物質の圧縮或は老齢化による密度の増大も極限或はそれに近い状態

Table 2. Tsuboi's model

Region	d	R	R/d	
Japan	50 km	85 km	1.9	C. Tsuboi
U. S. America	61 "	145 "	2.4	"
Korea	30 "	85 "	2.7	M. Hayakawa
E. Indies (1)	29 "	80 "	2.8	C. Tsuboi
" (2)	26 "	60 "	1.7	"

5) 文献 (1)

に來て居り、深さによる密度の変化がこの様に小さいと考えるのである。

前項で考えた $\lambda/(\lambda+a_m)$ 又は E なる量を見ると補償が成立している構造の波長の最小限 R の見当がつく、即ち E がその最大値の半分になる所 $0.42L$ をその極限とすれば、この値は $80\text{ km} \sim 160\text{ km}$ となる。又地殻の厚さ d に (32) 式を使うと $R/d \doteq 0.84\pi \doteq 2.6$ となつて、これらの値もよく一致している。故に密度変化係数 λ を $0.02 \times 10^{-5} \sim 0.03 \times 10^{-5}$ (C. G. S.) 程度と考える限り、筆者の模型で地殻均衡の状態を説明し得る事が判る。

又坪井先生の結果から各波長の構造に対する d は波長の短くなる程小さくなる傾向が見られ、 λ も考える構造の波長の或る函数である事が判る。夫故探鉱の際に考える波長の短い構造に対しては λ は (7) の様な大きな値を探つても良い事が予想せられる。

λ が (7) の場合の地殻の厚さ d を (31) 式から求めると Table 3. の如くなる。資源探査の目的で浅い所を論ずる時でも、地球物理学的に深い所を論ずる時でも、 d は考える地下構造の深さの中心を示すべきであるが、これが略々満足されている事が判る。

Table 3. Model of eq. (7)

l	E	d	l/d	$d\lambda$
1 km	0.28	0.42 km	2.4	0.21
2 "	0.51	0.63 "	3.2	0.32
3 "	0.70	0.79 "	3.8	0.39
4 "	0.83	0.90 "	4.4	0.45
6 "	1.08	1.08 "	5.6	0.54
8 "	1.25	1.20 "	6.6	0.60
12 "	1.48	1.37 "	8.8	0.68
16 "	1.61	1.48 "	10.8	0.74
24 "	1.76	1.61 "	14.9	0.80

λ は実際の密度分布から求められるものだが、これと地殻の厚さ (30) 式との積 $d\lambda$ が 1 に近い程均衡論的平衡にあり、これが 0 に近い程弾性論的平衡にあると考えて良く、又積 $d\lambda$ が 0.5 となる波長即ち $0.42L$ では、半分は弾性的応力によつて半分は均衡論的にその構造が支えられていると考えて良いであろう。夫故波長の短い構造例えば Table 3. に示した様な 24 km, 16 km, のものと云えども大部分均衡論的平衡にある事が結論される。

§ 4. 結 語

前稿で用いた地殻物質密度分布の模型を拡張して、これと全く独立な坪井の模型から得られた結果とよく一致する事が示された。又密度変化係数 λ と坪井の模型の地殻の厚さ d との関係を導きその地球物理学的意義を明かにし、密度変化係数 λ は考える構造によつて適当な値をとり、構造の波長が小さい程 λ は大きくなるべき事を予想した。かくて均衡の成立していない浅い小さい構造に対しても、又均衡されている大きな構造に対しても著者の模型を用いて

統一的に論じ得る事を示した。⁶⁾

最後に本稿の校閲を給つた東京大学坪井先生及び京都大学熊谷、佐々両教授を始め熱心に討論して下さい坪井研究室、地震学会、物理探鉱協会の諸賢に謝意を表すると共に、会社内にて始終便宜を与えられた林物探課長及び同課職員に対し深く感謝する次第である。

参 考 文 献

- (1) 坪井忠二: “重力” [改訂増補], (1944).
- (2) 坪井忠二: “地球物理学”, (岩波講座).
- (3) 松山基範: “地殻及び地球内部の物理学”, (岩波講座).
- (4) J. B. Airy: Phil. Trans., **145** (1855), 101.
- (5) J. H. Pratt: Phil. Trans., **148** (1858), 745.
- (6) J. H. Hayford: Sp. Publ. U. S. Coast Geod. Survey, **12** (1909).
- (7) W. Bowie: Sp. Publ. U. S. Coast Geod. Survey, **40** (1917).
- (8) W. Heiskanen: Ann. Akad. Sci. Fenn., **36** (1932), 1.
- (9) C. Tsuboi: Bull. Earthq. Res. Inst., **16** (1938), 285; **17** (1939), 351, 385; **19** (1941), 26.
- (10) 金子徹一, 宮村摂三, 矢橋徳太郎: 地震 **11** (1939), 1.
- (11) C. Tsuboi: Proc. Imp. Acad., **16** (1940), 449.
- (12) N. Kumagai: Jap. Journ. Astro. & Geophys., **17** (1940) 447.
- (13) 加藤元彦: “重力と地下構造との関係 (I)” 地震, 第2輯, 第6巻, 第3号 (1953).

・6) 本稿では二次元の問題のみを論じた。三次元の密度分布の問題でも全く同様に論ずる事が出来る。

即ち各種の量を二重 Fourier 級数: $\Sigma \Sigma_{sin}^{cos} a_m x_{sin}^{cos} b_n y$ の形で表わすならば本稿の $B_m, C_m, \dots$ 等を $B_{mn}, C_{mn}, \dots$ 等とし a_m の代りに $\sqrt{a_m^2 + b_n^2}$ 波長 l の代りに X, Y 方向の波長 l_m, l_n を考えて $l_m l_n / \sqrt{l_m^2 + l_n^2}$ を用いれば良い。