重力と地下構造との関係 (III)

——静水力学の平衡にある地殻物質の密度分布——

帝国石油 加藤 元彦

昭和 28 年 6 月 25 日受理

On the Relations between Gravity and Subterranean Structure (III)

Distribution of density of subterranean matter in
hydrostatic equilibrium

Motohiko KATO

Teikoku Oil Co.

(Received June 25, 1953)

In this paper it is shown that the distribution of density in the earth's crust the author adopted in the previous paper (II) is not inconsistent with the elastic property of the crust.

If the subterranean matter was in a hydrostatic equilibrium and if its compressibility and the gravity are assumed to be constant being independent of the depth z , the density of subterranean matter increases indefinitely great as the depth does so. This is evidently absurd. Should the density remain finite at the infinitely great depth, the compressibility should change with depth. Thus the author obtains the compressibility as a function of depth and from this result are deduced values of Young's modulus E and velocity of longitudinal wave v .

§ 1. 緒 論

本稿は前稿^{註1)}で述べた地殻物質の平均密度分布の式：

$$\rho = \rho_0 + (1 - e^{-\lambda z})(\rho_t - \rho_0)$$

(但し ρ : 平均密度, ρ_0 : 地表の平均密度, ρ_t : 深さ無限大の平均密度, λ : 密度変化係数, 且つ地表面内に X, Y 軸, 鉛直下方に Z 軸を採る) で表わされる状態が, 地殻物質の弾性的性質を考慮に入れた場合実際に有り得るかと言う事の検討であつて, この密度分布の模型から地殻の弾性的性質を論ずるのではない。

地下の充分深い所はさておき, 少くとも地殻と呼ばれる範囲では地殻物質は弾性的内部応力に依つても支えられているが, 本稿では重力による静水力学の圧力のみが作用していると考え

(註 1) 前稿とは文献 (7), (8) をいう。

て、見かけの弾性率や見かけの地震波の速度を計算し、実際の値との差異の凡ての原因を見かけの弾性率の異常に持って来ようとするのである。

§ 2. 地殻物質密度の深さによる変化

今地殻物質の均衡状態は静水力学的平衡にあると仮定する。或る一定の岩石或いは地殻を構成する物質の集合体を一つの岩石と考えて、深さ z 、圧力 p におけるその岩石の密度を ρ 、体積圧縮率を κ 、体積変化率を δ とし圧力 0 における密度を ρ_0 、重力を g とすると

$$\frac{dp}{dz} = \rho g, \quad \delta = \kappa p, \quad \rho = \rho_0(1 + \delta) \quad (1)$$

の三式が成立つ。体積圧縮率 κ も重力 g も深さによって変化しないとするこの解は

$$\rho = \rho_0 e^{\kappa \rho_0 g z} \quad (2)$$

で密度変化率は

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \kappa \rho_0 g 2 e^{\kappa \rho_0 g z} \quad (3)$$

となる。

今考える模型では

$$\rho = \rho_0 + (1 - e^{-\lambda z})(\rho_t - \rho_0) \quad (4)$$

であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \lambda(\rho_t - \rho_0)e^{-\lambda z} \quad (5)$$

となる。

これらの量を計算する為に実験から求められた花崗岩 (Granite) 及び蛇紋岩 (Serpentine) の常数を参考にして^{註2)}、Table 1. のような弾性常数をもつた二つの岩石の模型 (G), (S) について考察する。この Table 中体積圧縮率 κ 及び縦波の速度 v は

Table 1. Models of Rock (G), (S).

	E (C. G. S.)	ρ_0 (C. G. S.)	ν	κ (C. G. S.)	v
(G)	40×10^{10}	2.65	0.25	3.8×10^{-12}	4.25 km/sec
(S)	70×10^{10}	2.70	0.20	2.6×10^{-12}	5.37 km/sec

$$\kappa = \frac{3(1-2\nu)}{E}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0} \sqrt{1 + \frac{2\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}}}$$

から計算した。但し Young 率, Poisson 比を E, ν と表わした。

重力は一定で

$$g = 980 \text{ (C. G. S.)}$$

(註 2) 文献 (3), (5), (6)。

とすると (3) 式の常数は

$$(G); \quad \kappa\rho_0g=0.99\times10^{-8}(\text{C. G. S.}), \quad \kappa\rho_0^2g=2.6\times10^{-8}(\text{C. G. S.}),$$

$$(S); \quad \kappa\rho_0g=0.69\times10^{-8}(\text{C. G. S.}), \quad \kappa\rho_0^2g=1.9\times10^{-8}(\text{C. G. S.})$$

Table 2. Values of $\partial\rho/\partial z$ (units in 10^{-8} C. G. S.)

Z (km)	Model (G)			Model (S)			Z (km)	$\lambda=0.5\times10^{-5}$ $\rho_t-\rho_0=0.95$
	Eq. (3)	λ_1	λ_2	Eq. (3)	λ_1	λ_2		
0	2.6	5.2	7.8	1.9	3.8	5.7	0	475.
10	2.6	4.3	5.8	1.9	3.1	4.2	0.5	370.
20	2.7	3.5	4.3	1.9	2.5	3.1	1.0	288.
30	2.7	2.9	3.2	1.9	2.1	2.3	2.5	136.
40	2.7	2.3	2.3	2.0	1.7	1.7	5.0	39.
50	2.7	1.9	1.7	2.0	1.4	1.3	10.0	3.2
60	2.8	1.6	1.3	2.0	1.1	0.9	20.0	0
70	2.8	1.3	1.0	2.0	0.9	0.7		

となる。これを (3) 式に用いて計算した密度変化率を Table 2. に示した。

(5) 式で計算する為には ρ_t を求めねばならぬが、(2) 式から深さ 100 km の密度を求めて之を ρ_t とした：

$$(G); \quad \rho_t-\rho_0=0.26(\text{C. G. S.}),$$

$$(S); \quad \rho_t-\rho_0=0.19(\text{C. G. S.}).$$

この値を用い、密度変化係数 λ を前論文 (II) で求められた値：

$$\lambda_1=2.0\times10^{-7}(\text{C. G. S.}),$$

$$\lambda_2=3.0\times10^{-7}(\text{C. G. S.})$$

として密度変化率を (5) 式から求めて Table 2. に示した。

§ 3. 見かけの弾性率の深さによる変化

実際の地殻は各種の岩石からなり、それらの組成も深さや場所によって異なる故弾性率も一定であるとは見做されない。又たとえ地殻が均一な岩石であっても、一般にその弾性率は作用する圧力によつて変り、圧力の大きい時程弾性率は大きくなる。例えば D. Grigg^{註3)}の行った実験によつても圧力 0 の時 $24\times10^3 \text{ kg/cm}^2$ である Quartz は、圧力が 14×10^3 気圧の時は $34\times10^3 \text{ kg/cm}^2$ になることを示している。従つて体積圧縮率も一定でないと考えるのが妥当である。

体積圧縮率が一定ならば (2) 式の様に深さが深くなるにつれ、どこまでも増加する密度分布をするのだが、これが一定でない為に (4) 式の様な密度分布を考えると考え、この時圧縮率 κ

(註 3) 文献 (9), (10)

κ が深さにつれて如何に変れば (4) 式の密度分布を与えるかを見よう。即ち (1) 及び (4) 式を解いて

$$p = \left\{ \rho_t z - (\rho_t - \rho_0) \frac{1 - e^{-\lambda z}}{\lambda} \right\} g, \quad (8)$$

$$\delta = \frac{\rho_t - \rho_0}{\rho_0} (1 - e^{-\lambda z}) \quad (9)$$

だから

$$\kappa = \frac{\delta}{p} = \frac{\lambda (\rho_t - \rho_0) (1 - e^{-\lambda z})}{\{ \rho_t \lambda z - (\rho_t - \rho_0) (1 - e^{-\lambda z}) \} \rho_0 g}$$

となる。 $z=0$ の時のこの値を κ_0 とすると

$$\kappa_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \kappa = \frac{\rho_t - \rho_0}{\rho_0} \frac{\lambda}{\rho_0 g} \quad (10)$$

だから

$$\kappa = \kappa_0 \frac{\rho_0 (1 - e^{-\lambda z})}{\rho_t \lambda z - (\rho_t - \rho_0) (1 - e^{-\lambda z})} \quad (11)$$

となる。これは勿論弾性的内部応力や空隙、亀裂等は無いと見做した時の値で、いわば見かけの体積圧縮率である。上に用いた岩石の模型について計算した結果を Table 3. に示した。

Table 3. Apparent volume compressibility κ (C. G. S.)

Z (km)	Model (G)		Model (S)		$\lambda = 0.5 \times 10^{-5}$ $\rho_t - \rho_0 = 0.95$
	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	
0.	7.6×10^{-12}	11.3×10^{-12}	5.3×10^{-12}	8.0×10^{-12}	158×10^{-11}
0.5	7.6 //	11.3 //	5.3 //	7.9 //	132 //
1.0	7.5 //	11.1 //	5.3 //	7.9 //	111 //
2.5	7.4 //	10.9 //	5.2 //	7.7 //	73 //
5.0	7.2 //	10.5 //	5.0 //	7.4 //	43 //
10	6.8 //	9.7 //	4.8 //	6.8 //	22 //
20	6.1 //	8.3 //	4.3 //	5.9 //	10.6 //
30	5.5 //	7.2 //	3.9 //	5.1 //	7.0 //
40	5.0 //	6.3 //	3.6 //	4.5 //	5.2 //
50	4.6 //	5.6 //	3.3 //	4.0 //	4.2 //
60	4.2 //	5.0 //	3.0 //	3.6 //	3.5 //
70	3.9 //	4.5 //	2.8 //	3.2 //	3.0 //

これらの計算に用いた多くの実験値は一つの緻密な小さい試験片によつて得られた値である。実際に地殻を構成している時は液体又は気体で充された、試験片に対しては大きな空隙や亀裂が介在する事は予想せられる。夫故緻密な場合に比し、このような状態では圧縮率は Table 3. の如く大きくなり仮定した真値との喰違ひが生ずる。実質部分の弾性常数がその作用する圧力

によつて変化する事も考えられるが、そのみでは浅い所の喰違ひは説明出来ない。これは空隙、亀裂等の影響を考えて次の様に解釈出来るであろう。即ち浅い所ではこれらの実質部分も圧縮せられると同時に空隙も圧縮されて小さくなる影響が大きい。空隙を充す液体や気体の圧縮率は実質部分のそれより数十倍も大きいから見かけの圧縮率 κ は大きくなり、見かけの密度変化率も Table 2. の如く浅い所程大きいのである。然し或る空隙が圧縮せられれば、それ以上空隙を小さくする為に必要な圧力と、空隙のある実質部分を圧縮する圧力とは等しくなる（この圧力は勿論空隙のない緻密の実質部分を圧縮する圧力即ち実験室で行うときの圧力より小さくなる筈である）。このような深さになれば、 $\partial\rho/\partial z$ は (3) 式で計算した値に接近し、 κ は略一定な値になつて来るべきで、この深さの最小限は Table 2, 又は 3. から判る如く 30 km 前後である事は注目すべきである^{註4)}。

§ 4. 地震波の速度の変化

Table 4. Estimated values of E & v .

	λ	Z	κ	ν	ρ	E	v
(G)	λ_1	0	7.6×10^{-12}	0.25	2.65	19.7×10^{10}	2.99 km/sec
	λ_2	0	11.3 //	0.25	2.65	13.3 //	2.45 //
(S)	λ_1	0	5.3×10^{-12}	0.20	2.70	34.0×10^{10}	3.74 //
	λ_2	0	8.0 //	0.20	2.70	22.5 //	3.05 //
$\lambda = 0.5 \times 10^{-5}$ $\rho_t - \rho_0 = 0.95$		0	158×10^{-11}	0.25	1.75	0.0943×10^{10}	0.254 //
		1 km	111 //	0.25	2.12	0.135 //	0.276 //
		50 km	4.2 //	0.25	2.70	3.57 //	1.26 //

Table 4. には ν , ρ の値をその表の如くとして Young 率 E 及び縦波の速度 v をこの圧縮率から計算したものを示したが、初めに仮定した値 (Table 1.) との喰い違いは明かである。然し地震探鉱において実測せられる縦波の速度は実験室で求めた速度より小さくこの程度の差異が起るのが常である。

この計算に用いた κ , ρ は空隙をも含めた平均の即ち見かけの値であつて、実質部分の κ はもっと小さく従つて E はもっと大きいと考えねばならず、又その密度ももっと大きくならねばならぬ。水や空気の体積圧縮率は実質部分のそれに比して数十倍以上も大きいから、空隙の平均 Young 率 ϵ の相対的影響は平均密度 ϵ の影響より大きい。従つて地震波が空隙や亀裂に差無関係で実質部分の常数できまる速度 v_0 で伝播するならば $v_0 > v$ でなければならぬ。このを Δv とすると $v_0 - v = \Delta v > 0$ である。

(註 4) 近時、極浅発近地地震の観測から、補償面と地表との中間附近に一つの不連続面の存在が予想されている。

然し多くの粒子の集合体を通過する弾性波の速度は、その集合体全体にかかる圧力に左右され、圧力が小さい程速度が遅く又圧力が小さい程圧力の変化による速度の遅くなる割合が急である事が F. Gassmann^(註5)によつて論ぜられている。この様な現象が空隙や亀裂のある時にも起ると考えられるので、その時の速度を v_1 とすると $v_0 - v_1 = \Delta v_1 > 0$ である。

若し物質が緻密で空隙が少いならば $\Delta v_1 \approx \Delta v$ か或はそのどちらも非常に小さいと考えられるから $v_1 \approx v$ であつて、野外で実測せられる速度 v_1 は Table 4. の値 v と大体等しくなる筈である。

前稿で用いた条件 $\lambda = 0.5 \times 10^{-5}$ (C. G. S.), $\rho_t - \rho_0 = 0.95$ (C. G. S.) の場合について同様に計算した値を Table 2, 3, 4 に示した。これはあまり緻密でない若くて浅い第三紀第四紀の密度分布に適合するものであつて、これから推定した縦波の速度 (Table 4.) は実測値の 1/2 から 1/3 でその喰違ひは著しい。これは各種の岩相による物理的特性の変化が著しい事にも依るし、又同一の岩石でも空隙が大きい程見かけの弾性率が著しく異つて Δv が Δv_1 に比して大きくなり $\Delta v > \Delta v_1 > 0$ になるとすれば、 $v_1 > v$ であつて実測値 v_1 と推定値 v がこの程度に異なる事が予想せられる。

§5. 結 語

上の計算では二つの岩石の模型 (G), (S) を用いて行つたものであるが、実際の地殻物質でも大凡これと同じ様な事が論ぜられると思う。夫故著者の仮定した密度分布が弾性論的に考えても矛盾しない模型であると考えて良いであらう。その密度分布の式 (4) (4) に含まれる諸常数は重力や地震その他の観測から決定されるものである。

最後に本稿について御指導下さつた坪井先生、竹内均博士、又諸種の文献を紹介して下さつた表俊一郎博士、下鶴大輔氏、玉野俊郎氏の御好意に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 坪井忠二：重力 [改訂増補] (岩波全書) (1944)。
- 2) 坪井忠二：地球物理学上、下, (岩波講座)。
- 3) 松山基範：地殻及び地球内部の物理学 (岩波講座)。
- 4) 井坂外訳：ティモシエンコ弾性体の力学。
- 5) 石本己四雄：“岩石の弾性,” 物理地下探査 1, (1937)。
- 6) 理科年表
- 7) 加藤元彦, “重力と地下構造との関係 (I)” 地震, (1953)。
- 8) 加藤元彦, “重力と地下構造との関係 (II)” 地震, (1953)。
- 9) D. T. Grigg, “Deformation of Rocks under High Confining Pressure”, Jour. Geol., **44** (1936), 541~577.
- 10) D. T. Grigg & J. F. Bell, “Experiments Bearing on the Orientation of Quartz in Deformed Rocks”, Geol. Soc. Am., Bull. **49** (1938), 1732~1746.
- 11) F. Gassmann, “Elastic Waves Through a Packing of Spheres,” Geophys. **16**, 4, (1951), 673~685.

(註 5) 文献 (11)。