表面地形により誘発される Rayleigh 波 (I)

(二次元の場合)

東京大学理学部地球物理学教室 佐 藤 良 輔

(昭和 30 年 6 月 30 日受理)

On Rayleigh Waves generated at Rough Surfaces (I) (Two Dimensional Case)

Ryosuke SATO

Geophysical Institute, Faculty of Science, Tokyo University.

(Received June 30, 1955)

When elastic waves are incident to a rough surface, we must take some other disturbances in consideration in addition to regularly reflected waves (which are first approximations), in order to satisfy the boundary conditions at the free surface. In this paper, we investigated only Rayleigh waves of these excited waves when the incident waves has the form of a unit function, assuming the slope and the magnitude of the roughness small compared with the wave-length of the incident waves, which is reasonable in seismology. The main results are as follows;

- (1) The Rayleigh-pulses appear in the direction of propagation of incident pulse (positive direction) and in the opposite direction (negative).
- (2) These pulses are confined to the very neighbourhood of surface.
- (3) The Rayleigh-pulses are generally larger in the positive direction than in the negative direction, and especially, when SV -waves are incident at an angle φ (which is larger than the critical angle), this pulse is very large in comparison with ones for the other angles of incidence.
- (4) The larger is the angle of incidence, the shaper is the Rayleigh-pulse in the positive direction, but ones in the negative direction become more blunt.
- (5) These pulses are excited by normal incident pulse but do not appear in the case of tangential incidence.

§ 1. 序論. 地表近辺の構造の複雑性, 例えば媒質の不均質性¹⁾或いは層状構造²⁾等によつて弾性波の受ける影響を取扱つたものには, 幾多の論文があるが, 水平方向の不均一性, 特に地表の凹凸の影響を論じたものは, その取扱いの困難さの為に, 本間^{3), 4), 5)}が始めてその問題を俎上にのせる迄は殆んど手をつけられて居なかつた. 併しこの論文では, P 波或いは S 波 (共に平面調和波) の入射によつて地形の凹凸の為に生じる変位については単に積分表示で与えたのみであり, 唯表面に沿つて伝播する Rayleigh 波及び Love 波が受ける影響についてのみに或地形についてその変位を求めたに留まり, 然もその後は再びこの種の問題は看過されて居た.

ここでは, P 波或いは SV 波が表面に向つて入射する時, 表面が平面でない為に励起され

る Rayleigh 波を取扱い、入射波が平面調和波でなく unit function の形をとる時 (その wave-front が或観測点に到着する迄は零、その瞬間から 1 となる様な変位ポテンシャルを持つもの) に拡張したのである。

§2. 計算. 先づ最も簡単な場合としての問題を二次元に限つて議論を進める。

水平方向に x 軸、鉛直下方に z 軸をとり、変位の x 及び z 成分、 u 及び w が次式

$$u = \partial\phi/\partial x + \partial\psi/\partial z, \quad w = \partial\phi/\partial z - \partial\psi/\partial x, \quad (1)$$

で定義される様な函数 ϕ, ψ を導入し、これらが何れも $e^{i\omega t}$ に比例するものとする、運動方程式から、 ϕ, ψ は夫々

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = 0, \quad (\nabla^2 + k^2)\psi = 0. \quad (2)$$

$$h^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu) = \omega^2/\alpha^2, \quad k^2 = \rho\omega^2/\mu = \omega^2/\beta^2, \quad (3)$$

を満足する事は良く知られて居る事である。此処で λ, μ は Lamé の常数、 ρ は媒質の密度、 α, β は夫々疎密波及び振波の速度である。

次に地形曲線の方程式を

$$z = \zeta(x) \quad (4)$$

とし、この曲線の法線方向の応力成分を X_v, Z_v , 又 xz 座標に於ける成分を X_x, Z_x, Z_x 等とすると、

$$\left. \begin{aligned} X_v &= [(Z_x - X_x)\zeta' + Z_x(1 - \zeta'^2)]/(1 + \zeta'^2), \\ Z_v &= [Z_x + X_x \cdot \zeta'^2 - 2Z_x \cdot \zeta']/(1 + \zeta'^2). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

此処で $\zeta' = d\zeta/dx$ である。(1) で定義される函数 ϕ, ψ を用いると、結局 $z = \zeta$ に於ける境界条件として、

$$\left. \begin{aligned} -2(\phi_{xx} - \phi_{zz} + 2\psi_{xz}) \cdot \zeta' + (2\phi_{xz} - k^2\psi - 2\psi_{xx})(1 - \zeta'^2) &= 0 \\ -(k^2\phi + 2\phi_{xx} + 2\psi_{xz}) - (k^2\phi + 2\phi_{zz} - 2\psi_{xz}) \cdot \zeta'^2 - 2(2\phi_{xz} - k^2\psi - 2\psi_{xx})\zeta' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

が得られる。 ϕ_{xx}, ψ_{xz} 等は $\partial^2\phi/\partial x^2, \partial^2\psi/\partial x\partial z$ 等を示す。此処で表面地形について次の仮定を設ける。

$$|k\zeta| \ll 1, \quad |\zeta'| \ll 1. \quad (7)$$

入射波の波長に較べて地形の凹凸は小さく、又その傾斜も相当緩やかであるというこの仮定は實際上可成妥当であると考えて良いであろう。

扱て (2) の解として次の形を採る。

$$\phi = a\phi_1 + A\phi_2 + \phi', \quad \psi = b\psi_1 + B\psi_2 + \psi'. \quad (8)$$

ϕ', ψ' は表面が平面でない為に受ける擾乱を示すもので、又 $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ は平面の場合の解である。即ち P 波或いは SV 波が、入射角 θ 或いは φ で入射する時、

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= e^{i[\omega t - h(x \sin \theta - z \cos \theta)]}, & \phi_2 &= e^{i[\omega t - h(x \sin \theta + z \cos \theta)]}, \\ \psi_1 &= e^{i[\omega t - k(x \sin \varphi - z \cos \varphi)]}, & \psi_2 &= e^{i[\omega t - k(x \sin \varphi + z \cos \varphi)]}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

で与えられる。又反射の法則から、

$$h \sin \theta = k \sin \varphi. \quad (10)$$

が当然成立する。更に平面波の表面反射の理論から容易に知られる様に、若し P 波が入射する時は、 $a=1, b=0$ と置いて、

$$\left. \begin{aligned} A &= -\{(\sigma - 2 \sin^2 \theta)^2 - 4\sigma \sin \theta \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi\} / \Delta, \\ B &= 4 \sin \theta \cdot \cos \theta (\sigma - 2 \sin^2 \theta) / \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

又 SV 波が入射する時は、 $a=0, b=1$ と置いて、

$$\left. \begin{aligned} A &= -4\sigma \sin \theta \cos \theta (\sigma - 2 \sin^2 \theta) / \Delta, \\ B &= -\{(\sigma - 2 \sin^2 \theta)^2 - 4\sigma \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi\} / \Delta, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

で与えられる。此処で、

$$\sigma = k^2 / h^2 = (\lambda + 2\mu) / \mu, \quad \Delta = (\sigma - 2 \sin^2 \theta)^2 + 4\sigma \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi. \quad (13)$$

(8) を (6) に代入して ξ の冪に展開し、 ϕ', ψ' が $0(\xi)$ である事に注意して $0(\xi^0)$ と $0(\xi^1)$ の項をぬき出すと、結局 $z=\xi$ に於ける境界条件は、近似的に $z=0$ に於ける境界条件に書直され次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} [2\phi'_{xz} - k^2\psi' - 2\psi'_{xx}]_{z=0} &= -[2(a\phi_{1xxx} + A\phi_{2xxx}) - k^2(b\psi_{1z} + B\psi_{2z}) - 2(b\psi_{1xxx} + B\psi_{2xxx})]_{z=0} \cdot \xi \\ &\quad + 2[(a\phi_{1xx} + A\phi_{2xx}) - (a\psi_{1z} + A\phi_{2zz}) + 2(b\psi_{1xz} + B\psi_{2xz})]_{z=0} \cdot \xi' \\ &\equiv -f(x) = -[iP_1(\theta, \varphi)h^3 \cdot \xi + P_2(\theta, \varphi)h^2 \cdot \xi'] e^{-ihx \sin \theta}, \\ [k^2\phi' + 2\phi'_{xx} + 2\psi'_{xz}]_{z=0} &= -[k^2(a\phi_{1z} + A\phi_{2z}) + 2(a\phi_{1xxx} + A\phi_{2xxx}) + 2(b\psi_{1xxx} + B\psi_{2xxx})]_{z=0} \cdot \xi \\ &\equiv g(x) = iQ_1(\theta, \varphi)h^3 \cdot \xi e^{-ihx \sin \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1(\theta, \varphi) &= [2 \sin \theta \cos^2 \theta (a + A) - \sigma^{3/2} \cos \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi) (b - B)], \\ P_2(\theta, \varphi) &= -2[(1 - 2 \sin^2 \theta)(a + A) + 2\sigma \sin \varphi \cdot \cos \varphi (b - B)], \\ Q_1(\theta, \varphi) &= -[\cos \theta \cdot (\sigma - 2 \sin^2 \theta)(a - A) + \sigma^{3/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi (b + B)]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

θ', ψ' は勿論 Helmholtz の方程式

$$(\nabla^2 + h^2)\phi' = 0, \quad (\nabla^2 + k^2)\psi' = 0 \quad (16)$$

を満足する。そこで今この解を

$$\phi' = Ce^{-\lambda_\alpha z + i\xi x + i\omega t}, \quad \psi' = De^{-\lambda_\beta z + i\xi x + i\omega t} \quad (17)$$

$$\lambda_\alpha = \sqrt{\xi^2 - h^2}, \quad \lambda_\beta = \sqrt{\xi^2 - k^2} \quad (18)$$

と置くと、境界条件 (14) を満足する解は、Fourier の積分定理を用いて次の様に一般化される。

$$\left. \begin{aligned} \phi' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \phi_1' d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \phi_2' d\eta, \\ \phi' &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \phi_1' d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \phi_2' d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

此処で、 $f(\eta)$, $g(\eta)$ は (14) で与えられたものであり、又 ϕ_1' , ϕ_2' , ϕ_1' , ϕ_2' 等は

$$\left. \begin{aligned} \phi_1' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\xi\lambda_\beta}{F(\xi)} e^{-\lambda_\alpha z + i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, & \phi_2' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\xi^2 - k^2)}{F(\xi)} e^{-\lambda_\alpha z + i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, \\ \phi_1' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\xi^2 - k^2)}{F(\xi)} e^{-\lambda_\beta z + i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, & \phi_2' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\xi\lambda_\alpha}{F(\xi)} e^{-\lambda_\beta z + i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$F(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 - 4\xi^2 \lambda_\alpha \lambda_\beta. \quad (21)$$

で与えられるものである。

この積分を求め、更に入射波が unit-function の形をとる場合についての解を求めるには、E. R. Lapwood⁶⁾ の行なつた近似方法に従えば良い。即ち ω を複素数として Riemann 面に於ける Sommerfeld contour について積分を行なうのである。この方法によると、(20) は先づ $\Re(\omega) \geq 0$ 及び $(x-\eta) \geq 0$ によつて次の様な積分表示で与えられる。

i) $\Re(\omega) > 0$, $x-\eta > 0$ 或いは $\Re(\omega) < 0$, $x-\eta < 0$ の時。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1' &= - \int_{\Gamma \text{ 或は } \Gamma'} \frac{2i\xi\lambda_\beta}{F(\xi)} e^{-\lambda_\alpha z - i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, & \phi_2' &= \int_{\Gamma \text{ 或は } \Gamma'} \frac{(2\xi^2 - k^2)}{F(\xi)} e^{-\lambda_\alpha z - i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, \\ \phi_1' &= \int_{\Gamma \text{ 或は } \Gamma'} \frac{(2\xi^2 - k^2)}{F(\xi)} e^{-\lambda_\alpha z - i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, & \phi_2' &= - \int_{\Gamma \text{ 或は } \Gamma'} \frac{2i\xi\lambda_\alpha}{F(\xi)} e^{-\lambda_\beta z - i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ii) $\Re(\omega) > 0$, $x-\eta < 0$, 或いは $\Re(\omega) < 0$, $x-\eta > 0$ の時。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1' &= \int_{\Gamma \text{ 或は } \Gamma'} \frac{2i\xi\lambda_\beta}{F(\xi)} e^{-\lambda_\alpha z + i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, & \phi_2' &= \int_{\Gamma \text{ 或は } \Gamma'} \frac{(2\xi^2 - k^2)}{F(\xi)} e^{-\lambda_\alpha z + i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, \\ \phi_1' &= \int_{\Gamma \text{ 或は } \Gamma'} \frac{(2\xi^2 - k^2)}{F(\xi)} e^{-\lambda_\beta z + i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, & \phi_2' &= \int_{\Gamma \text{ 或は } \Gamma'} \frac{2i\xi\lambda_\alpha}{F(\xi)} e^{-\lambda_\beta z + i\xi(x-\eta) + i\omega t} d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

此処で Γ , Γ' は Fig. 1 に示す様な積分路である。

以上の積分表示から、色々の速度 (P 波, SV 波, Rayleigh 波等) で伝わる色々の波を求める事が出来るが、此処では Rayleigh 波の速度で伝わる波のみに着目する事にする。

扱て、被積分函数の Riemann 面第 1 葉
 $(\Re(\lambda_\alpha) \geq 0, \Re(\lambda_\beta) \geq 0)$ と定義) に於ける
 極は, Rayleigh 波の速度を r とすると,
 $\Re(\omega) \geq 0$ に応じて $\pm \kappa = \pm \omega/r$ で考えら
 れる事は既に知られている. r は $\lambda = \mu$
 の時, $0.9194 \cdots \beta$ に等しい. 従つて $\zeta =$
 $\pm \kappa$ に於ける $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ の値を,

$$\lambda_\alpha = \pm \omega \sqrt{\gamma^{-2} - \alpha^{-2}} = \pm \omega / r_\alpha,$$

$$\lambda_\beta = \pm \omega \sqrt{\gamma^{-2} - \beta^{-2}} = \pm \omega / r_\beta$$

と置き, 上の積分の留数を各々の場合について求めると次の様になる.

A) $x - \eta > 0$ の時.

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \Re(\omega) > 0. \quad \phi_1' &= A_1 \omega^{-1} e^{-p_1 \omega + i \omega \tau + i \frac{\omega}{\gamma} \eta}, & \phi_2' &= i A_2 \omega^{-1} e^{-p_1 \omega + i \omega \tau + i \frac{\omega}{\gamma} \eta}, \\ \phi_1' &= i B_1 \omega^{-1} e^{-p_2 \omega + i \omega \tau + i \frac{\omega}{\gamma} \eta}, & \phi_2' &= B_2 \omega^{-1} e^{-p_2 \omega + i \omega \tau + i \frac{\omega}{\gamma} \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

b) $\Re(\omega) < 0$. (24) で $-p_1, -p_2$ の代りに, p_1, p_2 , 又 A_1, B_2 の代りに $-A_2, -B_2$ と置けば良い.

B) $x - \eta < 0$ の時.

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \Re(\omega) > 0. \quad \phi_1' &= -A_1 \omega^{-1} e^{-p_1 \omega + i \omega \tau' - i \frac{\omega}{\gamma} \eta}, & \phi_2' &= i A_2 \omega^{-1} e^{-p_1 \omega + i \omega \tau' - i \frac{\omega}{\gamma} \eta}, \\ \phi_1' &= i B_1 \omega^{-1} e^{-p_2 \omega + i \omega \tau' - i \frac{\omega}{\gamma} \eta}, & \phi_2' &= -B_2 \omega^{-1} e^{-p_2 \omega + i \omega \tau' - i \frac{\omega}{\gamma} \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

b) $\Re(\omega) < 0$. (25) で $-p_1, -p_2$ の代りに, p_1, p_2 , 又 $-A_1, -B_2$ の代りに, A_1, B_2 と置けば良い. (24) 及び (25) で,

$$\left. \begin{aligned} r_\beta A_1 &= r_\alpha B_2 = -\frac{4\pi}{r} \frac{\omega^3}{F'(\kappa)} = \pi r^2 r_\alpha r_\beta (\gamma \alpha^2 + \gamma \beta^2 + 2\gamma^2 - 4r_\alpha r_\beta + 2r^2 r_\alpha r_\beta / \beta^2)^{-1}, \\ A_2 &= B_1 = -2\pi (2\gamma^{-2} - \beta^{-2}) \frac{\omega^3}{F'(\kappa)} \\ &= \frac{\pi}{2} (2\gamma^{-2} - \beta^{-2}) r^3 r_\alpha r_\beta (\gamma \alpha^2 + \gamma \beta^2 + 2\gamma^2 - 4r_\alpha r_\beta + 2r^2 r_\alpha r_\beta / \beta^2)^{-1}, \\ p_1 &= z / r_\alpha, \quad p_2 = z / r_\beta, \quad \tau = t - (x / r), \quad \tau' = t + (x / r). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

次に η についての積分は, $\int_{-\infty}^{\infty} d\eta = \int_{-\infty}^x d\eta + \int_x^{\infty} d\eta$ であるから, x が正で, 地形のひろ

Fig. 1.
 Contour, branch points ($\times$) and poles ($\circ$)
 in the ζ -plane.

がりに較べて相当大きい時には、近似的に $x-\eta > 0$ の場合のみを考えれば良いし、 x が負で相当大きい時には、近似的に $x-\eta < 0$ の場合についてのみ考えれば良い。そこで先ず前者の場合について (19) を求めると ($\zeta(x)$ が $|x| \rightarrow \infty$ で 0 になるとして),

$$\left. \begin{aligned} \phi'_+ &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} [H_1 \pm iH_2] \omega^2 e^{\mp p_1\omega + i\omega\tau} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\eta) e^{i\omega\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\sin\theta}{\alpha}\right)\eta} d\eta, \\ \phi'_+ &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} [I_1 \mp iI_2] \omega^2 e^{\mp p_2\omega + i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\eta) e^{i\omega\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\sin\theta}{\alpha}\right)\eta} d\eta, \end{aligned} \right\} \Re(\omega) \geq 0. \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1/A_2 &= I_2/B_2 = Q_1(\theta, \varphi), \\ H_2/A_1 &= I_1/B_1 = \left\{ P_1(\theta, \varphi) - P_2(\theta, \varphi) \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \sin\theta \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

が得られる。 x が負で大きな値の時も全く同じ様にして次の様に求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi'_{-} &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} [H'_1 \mp iH'_2] \omega^2 e^{\mp p_1\omega + i\omega\tau'} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\eta) e^{-i\omega\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\sin\theta}{\alpha}\right)\eta} d\eta, \\ \phi'_{-} &= \frac{1}{2\pi\alpha^3} [I'_1 \pm iI'_2] \omega^2 e^{\mp p_2\omega + i\omega\tau'} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\eta) e^{-i\omega\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\sin\theta}{\alpha}\right)\eta} d\eta. \end{aligned} \right\} \Re(\omega) \geq 0. \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} H'_1/A_2 &= I'_2/B_2 = Q_1(\theta, \varphi), \\ H'_2/A_1 &= I'_1/B_1 = \left\{ P_1(\theta, \varphi) + P_2(\theta, \varphi) \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \sin\theta \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

以上で $e^{i\omega t}$ を含む平面調和波が $z = \zeta(x)$ であらわされる地表に入射する時、 $|x|$ の大きい所に誘発される Rayleigh の変位ポテンシャルが求められたわけであるが、次に $\zeta(x)$ を具体的に与えて積分を求め、更に入射波が、

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \phi_1 \frac{d\omega}{\omega} = H \left\{ t - \frac{1}{\alpha} (x \sin\theta - z \cos\theta) \right\}, & \Psi_1 &= 0, & (P \text{ 波入射}) \\ \phi_1 &= 0, & \Psi_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \phi_1 \frac{d\omega}{\omega} = H \left\{ t - \frac{1}{\beta} (x \sin\varphi - z \cos\varphi) \right\}, & (SV \text{ 波入射}) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

で与えられる時の変位を求める。但し上式で $H(s)$ なる函数は、 $s < 0$ の時 0, $s \geq 0$ の時 1 で与えられる所謂 Heaviside の unit function, 又積分路 Ω は、複素平面上で $(-\infty - ic)$ から $(\infty - ic)$ に向うものである ($c > 0$)。

(I) $\zeta(x) = -K/(x^2 + c^2)$ ($K > 0$) の時。

入射波の波長に較べ地形の高低及びその勾配が小と言う仮定から、 $|hK/c^2|$ 及び $|K/c^3|$ は相当に小さいものとする。

先づ x が正で相当大きい所では,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\eta) e^{i \frac{\omega}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \sin \theta \right) \eta} d\eta = - \frac{K\pi}{c} e^{\mp \frac{c}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \sin \theta \right) \omega} \quad \Re(\omega) \geq 0,$$

であるから, (27) から

$$\phi'_{\gamma+} = - \frac{K}{2\alpha^3 c} [H_1 \pm iH_2] \omega^2 e^{\mp q_1 \omega + i\omega \tau}, \quad \phi'_{\gamma+} = - \frac{K}{2\alpha^3 c} [I_1 \mp iI_2] \omega^2 e^{\mp q_2 \omega + i\omega \tau},$$

$$\Re(\omega) \geq 0 \quad (32)$$

$$q_1 = \frac{z}{r_\alpha} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\sin \theta}{\alpha} \right) c, \quad q_2 = \frac{z}{r_\beta} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\sin \theta}{\alpha} \right) c. \quad (33)$$

従つてこの Rayleigh 波の変位の水平及び鉛直成分を夫々 u_+' , w_+' とすると,

$$u_+' = -i \frac{\omega}{r} \cdot \phi'_{\gamma+} \mp \frac{\omega}{r_\beta} \cdot \phi'_{\gamma+} \equiv u_{1+}' + u_{2+}', \quad w_+' = \mp \frac{\omega}{r_\alpha} \phi'_{\gamma+} + i \frac{\omega}{r} \cdot \phi'_{\gamma+} \equiv w_{1+}' + w_{2+}',$$

$$\Re(\omega) \geq 0. \quad (34)$$

で与えられる. 此処で u_{1+}' , w_{1+}' は Rayleigh 波の irrotational part, u_{2+}' , w_{2+}' は distortional part である.

次に入射波が調和波でなく, (31) で示される様な形で与えられる時, u_+' , w_+' に対応する変位を, U_+' , W_+' とすると, これらは,

$$U_+' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega'} u_+' \frac{d\omega}{\omega}, \quad W_+' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega'} w_+' \frac{d\omega}{\omega}. \quad (35)$$

で与えられる. 積分路 Ω' は Lapwood の行なつた様に $-\infty$ から 0 , 0 から $+\infty$ まで, $\arg \omega = -\pi/2 + \varepsilon$ の部分を避け, 実軸より下で 2 つの loop を画いて達するものである.

かくして x の正方向に伝播する Rayleigh-pulse の irrotational part U_{1+}' , W_{1+}' , 及び distortional part U_{2+}' , W_{2+}' は次の様に求められるのである.

$$\left. \begin{aligned} U_{1+}' &= M \frac{1}{r} \frac{1}{(q_1^2 + \tau^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{H_1^2 + H_2^2} \cos(3\psi_1 + \delta_1), \\ W_{1+}' &= M \frac{1}{r_\alpha} \frac{1}{(q_1^2 + \tau^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{H_1^2 + H_2^2} \sin(3\psi_1 + \delta_1), \\ U_{2+}' &= M \frac{1}{r_\beta} \frac{1}{(q_2^2 + \tau^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \sin(3\psi_2 - \delta_2), \\ W_{2+}' &= M \frac{1}{r} \frac{1}{(q_2^2 + \tau^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \cos(3\psi_2 - \delta_2 + \pi). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= K/\pi c \alpha^3, \quad \psi_1 = \tan^{-1} \varphi/q_1, \quad \psi_2 = \tan^{-1} \tau/q_2 \\ \delta_1 &= \tan^{-1} H_2/H_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{P_1(\theta, \varphi) - P_2(\theta, \varphi)(\alpha/\gamma - \sin \theta)}{Q_1(\theta, \varphi)} \right\} \\ \delta_2 &= \tan^{-1} I_2/I_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{Q_1(\theta, \varphi)}{P_1(\theta, \varphi) - P_2(\theta, \varphi)(\alpha/\gamma - \sin \theta)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

尚, (37) に於て, $A_2=B_1$, 又 $A_1/A_2=2/r\gamma\beta(2\gamma^{-2}-\beta^{-2})$, $B_2/B_1=2/r\gamma\alpha(2\gamma^{-2}-\beta^{-2})$ であるから, $(2\gamma^{-2}-\beta^{-2})^2-4\gamma^{-2}\gamma\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}=0$ なる事を考慮すると, $A_1/A_2=B_1/B_2$, 即ち $H_2/H_1=I_1/I_2$ となるから, δ_1 と δ_2 には $\delta_1+\delta_2=\pi/2$ なる関係がある.

次に x が負で相当大きい時には, (29) から,

$$\phi'_{\gamma-} = -\frac{K}{2\alpha^3 c} [H_1' \mp iH_2'] \omega^2 e^{\mp q_1' \omega + i\omega \tau'}, \quad \phi'_{\gamma-} = -\frac{K}{2\alpha^3 c} [I_1' \pm iI_2'] \omega^2 e^{\mp q_2' \omega + i\omega \tau'},$$

$$\Re(\omega) \geq 0. \quad (38)$$

$$q_1' = \frac{z}{r\alpha} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\sin \theta}{\alpha} \right) c, \quad q_2' = \frac{z}{r\beta} + \left(\frac{1}{r} + \frac{\sin \theta}{\alpha} \right) c. \quad (39)$$

となり, この場合の変位は,

$$u_{-}' = i \frac{\omega}{r\gamma-} \phi' \mp \frac{\omega}{r\beta\gamma-} \phi' \equiv u_{1-}' + u_{2-}', \quad w_{-}' = \mp \frac{\omega}{r\alpha\gamma-} \phi' - i \frac{\omega}{r\gamma-} \phi' \equiv w_{1-}' + w_{2-}',$$

$$\Re(\omega) \geq 0. \quad (40)$$

で与えられるから, 結局 x の負方向に伝播する Rayleigh-pulse は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} U_{1-}' &= M \frac{1}{r} \frac{1}{(q_1'^2 + \tau'^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{H_1'^2 + H_2'^2} \cos(3\phi_1' - \delta_1' + \pi), \\ W_{1-}' &= M \frac{1}{r\alpha} \frac{1}{(q_1'^2 + \tau'^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{H_1'^2 + H_2'^2} \sin(3\phi_1' - \delta_1'), \\ U_{2-}' &= M \frac{1}{r\beta} \frac{1}{(q_2'^2 + \tau'^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{I_1'^2 + I_2'^2} \sin(3\phi_2' + \delta_2'), \\ W_{2-}' &= M \frac{1}{r} \frac{1}{(q_2'^2 + \tau'^2)^{3/2}} \cdot \sqrt{I_1'^2 + I_2'^2} \cos(3\phi_2' + \delta_2'). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1' &= \tan^{-1} \tau' / q_1', \quad \phi_2' = \tan^{-1} \tau' / q_2', \\ \delta_1' &= \tan^{-1} H_2' / H_1' = \tan^{-1} \left\{ \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{P_1(\theta, \varphi) + P_2(\theta, \varphi)(\alpha/r + \sin \theta)}{Q_1(\theta, \varphi)} \right\}, \\ \delta_2' &= \tan^{-1} I_2' / I_1' = \tan^{-1} \left\{ \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{Q_1(\theta, \varphi)}{P_1(\theta, \varphi) + P_2(\theta, \varphi)(\alpha/r + \sin \theta)} \right\}, \\ \delta_1' + \delta_2' &= \pi/2. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

以上の様に得られた結果につき, $\lambda=\mu$ 即ちポアソン比を $1/4$ と仮定して色々の入射角に対する変位を調べて見る.

先づ Fig. 2 は, $q^3 \cos(3\phi+\delta)/(q^2+\tau^2)^{3/2}$ 及び $q^3 \sin(3\phi+\delta')/(q^2+\tau^2)^{3/2}$ の種々の δ 及び δ' に対する graph を示す. 即ち上記の波の wave-profile を示すものである. これらの波の極値は何れも, q_1^3 , q_2^3 , $q_1'^3$, $q_2'^3$ に逆比例するから, 表面のごく近辺に限られ, 表面を離れると急激に小さくなるものである. 次に Fig. 3 及び Fig. 4 は, P 波が入射するとき, 各入射角に対する δ_1 , δ_2 , δ_1' , δ_2' 及び $\sqrt{H_1^2+H_2^2}/A_2$, $\sqrt{I_1^2+I_2^2}/B_1$, $\sqrt{H_1'^2+H_2'^2}/A_2$, $\sqrt{I_1'^2+I_2'^2}/B_1$

Fig. 2. Graph of $q^3 \cos(3\phi + \delta)/(q^2 + \tau^2)^{3/2}$ and $q^3 \sin(3\phi + \delta')/(q^2 + \tau^2)^{3/2}$ against τ/q for various δ and δ' , which indicate the wave-profile of Rayleigh-pulse for various angles of incidence.

Fig. 3. Graph of δ_1 , δ_2 , δ_1' and δ_2' for various angles of incidence θ in the case of P -pulse incidence.

Fig. 4. Graph of $\sqrt{H_1^2 + H_2^2}/A_2$, $\sqrt{I_1^2 + I_2^2}/B_1$, $\sqrt{H_1^2 + H_2^2}/A_1$ and $\sqrt{I_1^2 + I_2^2}/B_1$ ($A_2 = B_1$) in the case of P -pulse incidence.

($A_2 = B_1$) の変化を示す. Fig. 4 から見ると, x の正方向に伝播する Rayleigh-pulse より, 負方向に伝播するものの方が寧ろ大きくあらわれる様に見えるが, q_1 , q_1' 等も亦入射角の函数であるから, 一概にそう断定は出来ない. そこで上の値を $(\alpha/r - \sin \theta)^3$ 或いは $(\alpha/r + \sin \theta)^3$ で割つたものをつくると, 表面に於ける最大変位の大凡その変化を見る事が出来る (Fig. 5). この図から知られる 2.3 の点を挙げると, 鉛直下方から波が入射する場合にも Rayleigh-pulse は生じるが, 水平に入射した場合はあらわれない (鉛直下方からの入射の場合その入射波の変位は $U_0 = 0$, $W_0 = H(t + z/\alpha)/\alpha$, 水平入射の場合は $U_0 = -H(t - x/\alpha)/\alpha$, $W_0 = 0$ である). x の

Fig. 5. Graph of $\sqrt{H_1^2 + H_2^2} / A_2(\alpha/\gamma - \sin \theta)^3$, $\sqrt{I_1^2 + I_2^2} / B_1(\alpha/\gamma - \sin \theta)^3$, $\sqrt{H_1^2 + H_2^2} / A_2(\alpha/\gamma + \sin \theta)^3$ and $\sqrt{I_1^2 + I_2^2} / B_1(\alpha/\gamma + \sin \theta)^3$ in the case of P -pulse incidence, which shows a variation of approximate maximum displacement of Rayleigh-pulse for various angles of incidence.

Fig. 6. The rough sketches of wave-profiles of Rayleigh-pulses against τ/q_1 , τ/q_2 , τ'/q_1' and τ'/q_2' for the angles of P -pulse incidence 0° , 30° and 60° . Numbers on ordinate indicate the relative values of magnitude of each pulses.

正方向即ち入射波の進行方向に伝わる Rayleigh-pulse は、逆方向へのものより一般に大きい。後者は入射角 $30^\circ \sim 70^\circ$ では殆んど同じ位の大きさで、他の入射角でもこれと余り異つた値はとらないが、前者では $70^\circ \sim 80^\circ$ で最大になり、それ以上の角で入射すると急に小となる。以上の事から、 P 波が入射角 0° , 30° , 60° で入射する時生じる Rayleigh-pulse の各成分の wave-profile を画くと Fig. 6 の様になるのである。この図で縦軸の数字は変位の相対的な大きさを示したもので値自身は意味がない。又横軸は τ/q 或いは τ'/q であるが、 q は $z=0$ の時 x の正方向に行く波については入射角の増す程小となり、 x の負方向に行く波については入射角の増す程大となるのであから、若し τ 或いは τ' を横軸にとると、 x の正方向に伝わる Rayleigh-pulse は入射角の増す程 sharp となり、負方向へのものは入射角の小さい程 sharp となるわけである。

Fig. 7, 8, 9 は SV 波が入射する場合の Fig. 3, 4, 5 に相当する図である。この場合は入射角 φ が $\sin^{-1}(1/\sqrt{\sigma})$ ($\lambda=\mu$ の時この角は $35^\circ 16'$) を越えると、 $\cos \theta =$

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Figs. 7, 8, 9. Figs. 7, 8 and 9 show the graphs in the case of SV-pulse incidence corresponding to ones in Figs. 3, 4 and 5 in the case of P-pulse incidence.

$-i\sqrt{\sigma \sin^2 \varphi - 1}$ と置かねばならない。即ち H, I 等は複素数となる。従つてこの範囲では実数部分のみをとつてある。扱て Fig. 9 を見ると、入射角が $0^\circ \sim 35^\circ 16'$ の範囲即ち臨界角内では、入射波の進行方向と同方向に進む Rayleigh-pulse は逆方向のそれより稍大きいに留まるが、それ以上の入射角になると、前者

は非常に大となり入射角 80° 近辺で最大、それを越えると急激に小となる。これは入射波が unit-function の形をとると仮定した事によるのであるが注目すべき事である。以上の結果から、入射角 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ である時の Rayleigh-pulse の名成分の wave-profile を画くと Fig. 10 の様になる。尚 U は x の正方向に、 W は鉛直下方に正とつてあるから、Fig. 6 及び Fig. 10 で、 U_+ が正で始まつていれば “push” であるが、 U_- が正で始まつていれば “pull” である。鉛直成分の方は、 W_+ も W_- も正で始まつていると言う事は “down” を示

Fig. 10. The rough sketches of wave-profiles of Rayleigh-pulses in the case of SV -pulse incidence corresponding to Fig. 6.

しているのである。

(II) $\zeta(x) = -K e^{-c^2 x^2}$ ($K > 0$) の時.

この場合は, $|hK|$ 及び $|cK|$ が非常に小と仮定すると, $\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\eta) e^{\pm i \frac{\omega}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \mp \sin \theta \right) \eta} d\eta = -K \frac{\sqrt{\pi}}{c} e^{-\frac{1}{4c^2 \alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \mp \sin \theta \right)^2 \omega^2}$ から,

$$\left. \begin{aligned} \phi'_{\gamma+} &= -\frac{K}{2\alpha^3 \sqrt{\pi} c} [H_1 \pm i H_2] \omega^2 e^{-r^2 \omega^2 \mp p_1 \omega + i \omega \tau}, \\ \phi'_{\gamma-} &= -\frac{K}{2\alpha^3 \sqrt{\pi} c} [I_1 \mp i I_2] \omega^2 e^{-r^2 \omega^2 \mp p_2 \omega + i \omega \tau}, \end{aligned} \right\} \Re(\omega) \geq 0, \quad (43)$$

$$r = \frac{1}{2c\alpha} \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \sin \theta \right). \quad (44)$$

が得られる。従つて (31) の形をとる入射波に対する変位は

$$\left. \begin{aligned} U_{1+}' &= \frac{K}{2\pi^{3/2} \alpha^3 r c} \left[H_1 \int_0^{\infty} e^{-r^2 \omega^2 - p_1 \omega} \cos \omega \tau \cdot \omega^2 d\omega - H_2 \int_0^{\infty} e^{-r^2 \omega^2 - p_1 \omega} \sin \omega \tau \cdot \omega^2 d\omega \right], \\ W_{1+}' &= \frac{K}{2\pi^{3/2} \alpha^3 r c} \left[H_1 \int_0^{\infty} e^{-r^2 \omega^2 - p_1 \omega} \sin \omega \tau \cdot \omega^2 d\omega + H_2 \int_0^{\infty} e^{-r^2 \omega^2 - p_1 \omega} \cos \omega \tau \cdot \omega^2 d\omega \right], \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} U_{2+}' &= \frac{K}{2\pi^{3/2}\alpha^3\gamma\beta c} \left[I_1 \int_0^\infty e^{-r^2\omega^2 - p_2\omega} \sin \omega\tau \cdot \omega^2 d\omega - I_2 \int_0^\infty e^{-r^2\omega^2 - p_2\omega} \cos \omega\tau \cdot \omega^2 d\omega \right], \\ W_{2+}' &= -\frac{K}{2\pi^{3/2}\alpha^3\gamma c} \left[I_1 \int_0^\infty e^{-r^2\omega^2 - p_2\omega} \cos \omega\tau \cdot \omega^2 d\omega + I_2 \int_0^\infty e^{-r^2\omega^2 - p_2\omega} \sin \omega\tau \cdot \omega^2 d\omega \right] \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

となる．然るに，

$$\int_0^\infty e^{-r^2\omega^2 - p\omega} \cdot \frac{\cos}{\sin} \omega\tau \cdot \omega^2 d\omega = \frac{2}{(p^2 + \tau^2)^{3/2}} \left[\frac{\cos}{\sin} 3\phi + \sum_1^\infty \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r^{2n}}{(p^2 + \tau^2)^n} \frac{\cos}{\sin} (3+2n)\phi \right]$$

$$\phi = \tan^{-1} \tau/p, \quad c^{a/b} = c(c+b)(c+2b) \cdots (c+a-1b)$$

であるから，結局，

$$\left. \begin{aligned} U_{1+}' &= \frac{K}{\pi^{3/2}\alpha^3\gamma c} \frac{1}{(p_1^2 + \tau^2)^{3/2}} \left[(H_1 \cos 3\phi_1 - H_2 \sin 3\phi_1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^\infty \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r^{2n}}{(p_1^2 + \tau^2)^n} \{H_1 \cos (3+2n)\phi_1 - H_2 \sin (3+2n)\phi_1\} \right], \\ W_{1+}' &= \frac{K}{\pi^{3/2}\alpha^3\gamma\alpha c} \frac{1}{(p_1^2 + \tau^2)^{3/2}} \left[(H_1 \sin 3\phi_1 + H_2 \cos 3\phi_1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^\infty \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r^{2n}}{(p_1^2 + \tau^2)^n} \{H_1 \sin (3+2n)\phi_1 + H_2 \cos (3+2n)\phi_1\} \right], \\ U_{2+}' &= \frac{K}{\pi^{3/2}\alpha^3\gamma\beta c} \frac{1}{(p_2^2 + \tau^2)^{3/2}} \left[(I_1 \sin 3\phi_2 - I_2 \cos 3\phi_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^\infty \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r^{2n}}{(p_2^2 + \tau^2)^n} \{I_1 \sin (3+2n)\phi_2 - I_2 \cos (3+2n)\phi_2\} \right], \\ W_{2+}' &= -\frac{K}{\pi^{3/2}\alpha^3\gamma c} \frac{1}{(p_2^2 + \tau^2)^{3/2}} \left[(I_1 \cos 3\phi_2 + I_2 \sin 3\phi_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^\infty \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r^{2n}}{(p_2^2 + \tau^2)^n} \{I_1 \cos (3+2n)\phi_2 + I_2 \sin (3+2n)\phi_2\} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \tau/p_1, \quad \phi_2 = \tan^{-1} \tau/p_2. \quad (47)$$

が得られる． x の負方向に伝播する Rayleigh-pulse も全く同じ様にして，

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\gamma-}' &= -\frac{K}{2\alpha^3\sqrt{\pi}c} [H_1' \mp iH_2'] \omega^2 e^{-r'^2\omega^2 \mp p_1\omega + i\omega\tau'}, \\ \phi_{\gamma-}' &= -\frac{K}{2\alpha^3\sqrt{\pi}c} [I_1' \pm iI_2'] \omega^2 e^{-r'^2\omega^2 \mp p_1\omega + i\omega\tau'}, \end{aligned} \right\} \Re(\omega) \geq 0 \quad (48)$$

$$r' = \frac{1}{2c\alpha} \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \sin \theta \right). \quad (49)$$

から次の様に与えられる．

$$U_{1-}' = -\frac{K}{\pi^{3/2}\alpha^3\gamma c} \frac{1}{(p_1'^2 + \tau'^2)^{3/2}} \left[(H_1' \cos 3\phi_1' + H_2' \sin 3\phi_1') \right] \quad \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_1^{\infty} \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r'^{2n}}{(p_1^2 + \tau'^2)^n} \{H_1' \cos(3+2n)\phi_1' + H_2' \sin(3+2n)\phi_1'\} \Big], \\
W_{1-}' &= \frac{K}{\pi^{3/2} \alpha^3 \gamma_{\alpha} c} \frac{1}{(p_1^2 + \tau'^2)^{3/2}} \left[(H_1' \sin 3\phi_1' - H_2' \cos 3\phi_1') \right. \\
& \quad \left. + \sum_1^{\infty} \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r'^{2n}}{(p_1^2 + \tau'^2)^n} \{H_1' \sin(3+2n)\phi_1' - H_2' \cos(3+2n)\phi_1'\} \right], \\
U_{2-}' &= \frac{K}{\pi^{3/2} \alpha^3 \gamma_{\beta} c} \frac{1}{(p_2^2 + \tau'^2)^{3/2}} \left[(I_1' \sin 3\phi_2' + I_2' \cos 3\phi_2') \right. \\
& \quad \left. + \sum_1^{\infty} \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r'^{2n}}{(p_2^2 + \tau'^2)^n} \{I_1' \sin(3+2n)\phi_2' + I_2' \cos(3+2n)\phi_2'\} \right], \\
W_{2-}' &= \frac{K}{\pi^{3/2} \alpha^3 \gamma_c} \frac{1}{(p_2^2 + \tau'^2)^{3/2}} \left[(I_1' \cos 3\phi_2' - I_2' \sin 3\phi_2') \right. \\
& \quad \left. + \sum_1^{\infty} \frac{3^{2n/1}}{1^{n/1}} \frac{r'^{2n}}{(p_2^2 + \tau'^2)^n} \{I_1' \cos(3+2n)\phi_2' - I_2' \sin(3+2n)\phi_2'\} \right].
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\phi_1' = \tan^{-1} \tau' / p_1, \quad \phi_2' = \tan^{-1} \tau' / p_2. \tag{51}$$

(46) と (36), (50) と (41) を比較すると, 第 1 項までは全く同じ形をして居る事が分る. 即ち地表から相当離れるか, 或いは pulse が丁度到着する時刻から相当離れるかすると, (I) の場合と殆ど同じ変位となるのである. この場合にも最大変位は第 1 近似で p_1^3 , 或いは p_2^3 に逆比例, 即ち表面の極く近傍に限られたものとなる.

$p_1 = p_2 = 0$, 即ち $z=0$ で r/τ 或いは r'/τ' が大きい時には上の近似が使えなくなるが, その時は,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-r^2 \omega^2} \cdot \cos \omega \tau \cdot \omega^2 d\omega &= \frac{1}{4r^3} \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2}\right) e^{-\frac{\tau^2}{4r^2}} \cdot \sqrt{\pi}, \\
\int_0^{\infty} e^{-r^2 \omega^2} \cdot \sin \omega \tau \cdot \omega^2 d\omega &= \frac{1}{4r^3} \left[\frac{\tau}{r} + \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2}\right) \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/1}} \left(\frac{\tau}{r}\right)^{2n+1} \right],
\end{aligned}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
U_{1+}' &= \frac{Kc^2}{\pi^{3/2} \gamma} \left(\frac{\alpha}{r} - \sin \theta\right)^{-3} \left[H_1 \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2}\right) e^{-\frac{\tau^2}{4r^2}} \cdot \sqrt{\pi} \right. \\
& \quad \left. - H_2 \left\{ \frac{\tau}{r} - \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2}\right) \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/1}} \left(\frac{\tau}{r}\right)^{2n+1} \right\} \right], \\
W_{1+}' &= \frac{Kc^2}{\pi^{3/2} \gamma_{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{r} - \sin \theta\right)^{-3} \left[H_2 \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2}\right) e^{-\frac{\tau^2}{4r^2}} \cdot \sqrt{\pi} \right. \\
& \quad \left. + H_1 \left\{ \frac{\tau}{r} - \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2}\right) \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/1}} \left(\frac{\tau}{r}\right)^{2n+1} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
 U_{2+}' &= -\frac{Kc^2}{\pi^{3/2}\gamma_\beta} \left(\frac{\alpha}{r} - \sin \theta \right)^{-3} \cdot \left[I_2 \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2} \right) e^{-\frac{\tau^2}{4r^2}} \cdot \sqrt{\pi} \right. \\
 &\quad \left. - I_1 \left\{ \frac{\tau}{r} - \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2} \right) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/2}} \left(\frac{\tau}{r} \right)^{2n+1} \right\} \right], \\
 W_{2+}' &= -\frac{Kc^2}{\pi^{3/2}\gamma} \left(\frac{\alpha}{r} - \sin \theta \right)^{-3} \left[I_1 \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2} \right) e^{-\frac{\tau^2}{4r^2}} \cdot \sqrt{\pi} \right. \\
 &\quad \left. + I_2 \left\{ \frac{\tau}{r} - \left(1 - \frac{\tau^2}{2r^2} \right) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/2}} \left(\frac{\tau}{r} \right)^{2n+1} \right\} \right].
 \end{aligned}$$

が得られる．従つて $t=x/\gamma$ のごく近傍に於ける各成分の最大値の入射角に対する相対的な大きさの変化は，夫々近似的に $\left(\frac{\alpha}{r} - \sin \theta \right)^{-3} H_1/A_2$ ， $\frac{\gamma}{\gamma_\alpha} \left(\frac{\alpha}{r} - \sin \theta \right)^{-3} H_2/A_2$ ， $-\frac{\gamma}{\gamma_\beta} \left(\frac{\alpha}{r} - \sin \theta \right)^{-3} I_2/A_2$ ， $-\left(\frac{\alpha}{r} - \sin \theta \right)^{-3} I_1/A_2$ で与えられ，これを P 波入射及び SV 波入射の場合について図示したのが Fig. 11 及び Fig. 12 の右半分である．

Fig. 11

Figs. 11, 12. The variation of approximate maximum values of Rayleigh-pulses near $t=x/\gamma$ ($x>0$) or $t=-x/\gamma$ ($x<0$) against the angles of P -pulse incidence (Fig. 11) or SV -pulse incidence (Fig. 12), when the shape of surface is given by $\zeta(x) = -Ke^{-c^2x^2}$.

Fig. 12.

負方向伝播する Rayleigh-pulse についても，全く同じ様にして，

$$U_{1-}' = -\frac{Kc^2}{\pi^{3/2}\gamma} \left(\frac{\alpha}{r} + \sin \theta \right)^{-3} \cdot \left[H_1' \left(1 - \frac{\tau'^2}{2r'^2} \right) e^{-\frac{\tau'^2}{4r'^2}} \cdot \sqrt{\pi} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + H_2' \left\{ \frac{\tau'}{r'} - \left(1 - \frac{\tau'^2}{2r'^2} \right) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/1}} \left(\frac{\tau'}{r'} \right)^{2n+1} \right\}, \\
W_{1-}' = & - \frac{Kc^2}{\pi^{3/2}\gamma_\alpha} \left(\frac{\alpha}{r} + \sin \theta \right)^{-3} \left[H_2' \left(1 - \frac{\tau'^2}{2r'^2} \right) e^{-\frac{\tau'^2}{4r'^2}} \cdot \sqrt{\pi} \right. \\
& \left. - H_1' \left\{ \frac{\tau'}{r'} - \left(1 - \frac{\tau'^2}{2r'^2} \right) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/1}} \cdot \left(\frac{\tau'}{r'} \right)^{2n+1} \right\} \right], \\
U_{2-}' = & \frac{Kc^2}{\pi^{3/2}\gamma_\beta} \left(\frac{\alpha}{r} + \sin \theta \right)^{-3} \left[I_2' \left(1 - \frac{\tau'^2}{2r'^2} \right) e^{-\frac{\tau'^2}{4r'^2}} \cdot \sqrt{\pi} \right. \\
& \left. + I_1' \left\{ \frac{\tau'}{r'} - \left(1 - \frac{\tau'^2}{2r'^2} \right) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/1}} \left(\frac{\tau'}{r'} \right)^{2n+1} \right\} \right], \\
W_{2-}' = & \frac{Kc^2}{\pi^{3/2}\gamma} \left(\frac{\alpha}{r} + \sin \theta \right)^{-3} \left[I_1' \left(1 - \frac{\tau'^2}{2r'^2} \right) e^{-\frac{\tau'^2}{4r'^2}} \cdot \sqrt{\pi} \right. \\
& \left. - I_2' \left\{ \frac{\tau'}{r'} - \left(1 - \frac{\tau'^2}{2r'^2} \right) \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1/1}} \left(\frac{\tau'}{r'} \right)^{2n+1} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{53}$$

が得られ、前と同じ様に $t = -x/r$ 近傍に於ける最大変位の入射角に対する相対的な大きさの変化を P 波入射及び SV 波入射の場合について示すと、夫々 Fig. 11 及び Fig. 12 の左半分の様になる。勿論これらの図は必ずしも最大変位の変化を示すものではないが、大凡の変化及び各成分の相対的な大きさを示すものと考えて良い。この図で最も注目すべき事は、 SV 波が臨界角以上で入射する時、入射角 $70^\circ \sim 90^\circ$ で変位の各成分が他の場合に較べて非常に大きくなる事である。これに較べると x の負方向に現われる Rayleigh-pulse は極めて小さい。 P 波が入射する場合も x の正方向に現われるものの方が負方向に現われるものより大体に於て大きいと言えるが、併しその最大値と雖も SV 波入射の場合の最大値に較べると非常に小さいのである。

§ 3. 結論. 平面疎密波或いは平面振波が平面でない地表に入射する時（これらの入射波は何れもその wave-front が或観測点に到着するまでは 0, その瞬間から 1 となる様な変位ポテンシャルを持つもの）、その不規則性の為に誘発される Rayleigh-pulse を取扱った。表面地形については、それを平面とした時との差が入射波の波長に較べて小である事、又その傾斜も極めて緩やかである事を仮定したが、この仮定は多くの場合実情と可成一致して居ると見做して良い。得られた結果を列挙すると

- (1) 入射波の進行方向及びその逆方向に伝播する Rayleigh-pulse があらわれる。
- (2) 変位は地表から地中に入ると急激に減少する。
- (3) 一般に入射波の進行方向に伝播する Rayleigh-pulse の方が、逆方向に伝播するものより大きい、特に振波が臨界角以上で入射する時は、他の場合に較べて極めて大となる。

(4) 入射波の方向に伝播する Rayleigh-pulse は入射角が大きくなればなる程 sharp pulse となるが、反対方向のものは入射角の増す程 blunt pulse となる。

(5) 鉛直下方から波が入射する場合でも Rayleigh-pulse は誘発されるが、水平入射の場合は生じない。

以上得られた結果により、地震波がその伝播の途中で、例えば山の様に平面でない地形につき当たると、それにより新たに Rayleigh 波が励起される事を知った。即ち全震央距離を Rayleigh 波の速度で伝播したとして予期される時刻より早く Rayleigh 波と見做される波の到着する可能性があるわけである。但し今の場合に入射波が平面波であり、然も特殊な形をもつものなので、波形その他の事については、實際上どの程度迄適用し得るか尚研究の余地があるのは当然である。尚三次元の場合については第 2 報で述べるつもりである。

文 献

- 1) 例えば、本間正作：地表物質の不均質が表面振動に及ぼす影響。験震，**12** (1942)。
- 2) 例えば、妹沢，西村，金井等の数多くの論文が，B.E.R.I. に見られる。
- 3) 本間正作：地形が表面振動に及ぼす影響。験震，**11** (1941)，349-364。
- 4) " " : " " (II). " **12** (1942)，17-23。
- 5) " " : " " (III). " **12** (1942)，24-36。
- 6) Lapwood, E. R.: The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium. Phil. Trans. Roy. Soc. London, **242** (1949)，63-100。