地磁気のダイナモ理論に関する一計算

東京大学理学部地球物理学教室 竹内 均・加藤昭七郎

(昭和 31 年 10 月 23 日受理)

The Dynamo Theory of the Earth's Main Magnetic Field

Hitoshi TAKEUCHI and Shoshichiro KATO

Geophysical Institute, Faculty of Science, Toyko University,

(Received October 23, 1956)

This is a note describing algebraic and numerical details which were omitted in paper (1) referred to below. In § 2 of the present paper, explanations are given on an approximate way to solve the eigen-value problems (3.6), (3.8) and (3.11) and (3.12) in the above paper.

In § 3 and § 4, are given the details for getting the results (3.14) and (3.15) in the same paper.

§ 1.

これは筆者らが先に発表した地磁気のダイナモ理論に関する一論文⁽¹⁾の計算ノートである。上の論文では紙数の制限もあつて、多くの式を証明なしにかかけたり、また数値計算の詳細を示さなかつたりした。その後何人かの人がもつと詳細な発表を求めてきたし、また筆者自身も自分の計算原稿を何らかの形で残しておきたいと思う。これがこのノートを書くにいたつた理由である。上に引用した論文を、これからもたびたび引用するので、以下これを T と略記号する。また T 論文中的、たとえば (3.6) 式を (T.3.6) と略して書くことにする。

§ 2.

固有値問題 (T.3.7), (T.3.8) 及び (T.3.11), (T.3.12) の固有値 y の求め方。

これらは固有値問題 (T.3.14), (T.3.15) の特別な場合であるから、この一般の場合についての固有値の求め方を示しておこう。後にのべるように、(T.3.14) をうる直前、われわれは次の式をえている。なお $\bar{T}_n^0(\xi)$ を T , $S_{n-1}^0(\xi)$ を S と略記することにする。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{d\xi^2} + \frac{2(n+1)}{\xi} \frac{dT}{d\xi} &= -y \frac{n(n-1)}{(2n-1)} \frac{1}{\xi} \frac{dV_1}{d\xi} S, \\ \frac{d^2 S}{d\xi^2} + \frac{2n}{\xi} \frac{dS}{d\xi} &= -\frac{162y}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)} \frac{V_2}{V_1} \xi^3 \\ &\quad \left[A(n) V_2 \frac{dT}{d\xi} + \left\{ \frac{D(n)}{3} \frac{dV_2}{d\xi} + \frac{B(n)}{\xi} V_2 \right\} T \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここに

$$A(n) = 4n^4 + 12n^3 - 13n^2 - 33n + 18,$$

$$\begin{aligned} B(n) &= 8n^5 + 36n^4 + 10n^3 - 105n^2 - 63n + 54, \\ D(n) &= 4n^5 + 28n^4 + 35n^3 - 85n^2 - 114n + 72. \end{aligned} \quad (2.2)$$

またわれわれの問題では,

$$V_1(\xi) = 1 - \xi, \quad V_2 = (1 - \xi)^2 \quad (2.3)$$

である. 課せられた境界条件は $\xi = 1$ で

$$T = 0, \quad \frac{dS}{d\xi} + (2n-1)S \sim \frac{d^3T}{d\xi^3} + 2(2n+1)\frac{d^2T}{d\xi^2} + 2(n-1)(2n-1)\frac{dT}{d\xi} = 0 \quad (2.4)$$

である. この種の問題を Trial and error の方法で解くことは殆んど不可能である. しかし筆者らが先に考えだした方法⁽³⁾を用いれば, 比較的容易にこれを解くことができる. すなわち次のようにする. まず (2.4) の第一の境界条件を考えて T を

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m (1 - \xi) \quad (2.5)$$

の形に仮定する. a_m はこれから決定すべき常数である. (2.5) では形式をととのえるために m の上限を ∞ としているが, 実さいの数値計算ではその第 1 項, すなわち $m=0$ の項さえとれば, それでもう十分よい近似で固有値 y を求めることができる. それはともかく (2.5) を (2.1) の第 2 式の右辺に代入すると, これが次のような項の集まりであることがわかる.

$$-\frac{162ya_m}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)} \xi^{m+2}(1-\xi)^3 \{E(n, m) - F(n, m)\xi\} \quad (2.6)$$

ただし

$$\begin{aligned} E(n, m) &= mA(n) + B(n), \\ F(n, m) &= (m+1)A(n) + \frac{2}{3}D(n) + B(n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

とする. これを並べかえれば (2.1) の第 2 式の右辺は $\sum G_l \xi^l$ の形になる. G_l は n, m, a_m をふくむある常数である. ところで一般に

$$\frac{d^2S}{d\xi^2} + \frac{2n}{\xi} \frac{dS}{d\xi} = \sum G_l \xi^l \quad (2.8)$$

なる方程式の解は

$$S = \text{常数} + \sum \frac{G_l \xi^{l+2}}{(l+2)(2n+l+1)} \quad (2.9)$$

となる. (2.4) の第 2 の境界条件をみたすように常数をえらべば

$$S = \sum \frac{G_l}{(l+2)(2n+l+1)} \left(\xi^{l+2} - \frac{2n+l+1}{2n-1} \right) \quad (2.10)$$

となる. 要するに T を (2.5) の形に仮定すれば S は (2.10) の形になる. これらの T, S は境界条件及び (2.1) の第 2 式をみたしている. しかし (2.1) の第 1 式をみたしていない. この

式を近似的にみたし、かつ y のよい近似値を求めるには、筆者らのいわゆる拡張された Galerkin の方法⁽²⁾を用いればよい。それにはまず (2.1) 式の第 1 式が引用論文⁽²⁾の §3 におけると同様にして

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2 T}{d\xi^2} + \frac{2(n+1)}{\xi} \frac{dT}{d\xi} + \frac{y}{\xi} \frac{n(n-1)}{(2n-1)} \frac{dV_1}{d\xi} S \right\} T \xi^{2(n+1)} d\xi = 0 \quad (2.11)$$

から得られたものであることに注意する。

Galerkin 法の特長は、(2.11) の $\{ \}$ 内の T, S に (2.5), (2.10) のそれを用い、 $\{ \}$ の外に (2.5) の T を構成する函数（座標函数とよぶことにする）の一つづつを用いる点にある。すなわち座標函数を $m=0, 1, \dots, m-1$ の m 個用いるときは、(2.11) の $\{ \}$ 外の T として $(1-\xi), \xi(1-\xi), \dots, \xi^{m-1}(1-\xi)$ をとり、これに対応して m 個の方程式がえられる。(2.5), (2.6), (2.10) から明らかのように、(2.11) の $\{ \}$ 内は a_m の一次函数となる。(2.11) の $\{ \}$ 外の T として $\xi^{m'}(1-\xi)$ を用いたときの、 a_m の係数は次の如くなる。

$$\begin{aligned} & \frac{m(m+2n+1)}{(2n+m+m'+1)(2n+m+m'+2)} - \frac{(m+1)(m+2n+2)}{(2n+m+m'+2)(2n+m+m'+3)} \\ & + \frac{162y^2n(n-1)}{(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)^2(2n-3)} \left[\frac{-1}{(2n-1)(2n+m'+2)(2n+m'+3)} \right. \\ & \times \left\{ \frac{E}{m+4} - \frac{3E+F}{m+5} + \frac{3(E+F)}{m+6} - \frac{E+3F}{m+7} + \frac{F}{m+8} \right\} \\ & + \frac{E}{(m+4)(2n+m+3)(2n+m+m'+6)(2n+m+m'+7)} \\ & - \frac{3E+F}{(m+5)(2n+m+4)(2n+m+m'+7)(2n+m+m'+8)} \\ & + \frac{3(E+F)}{(m+6)(2n+m+5)(2n+m+m'+8)(2n+m+m'+9)} \\ & - \frac{E+3F}{(m+7)(2n+m+6)(2n+m+m'+9)(2n+m+m'+10)} \\ & \left. + \frac{F}{(m+8)(2n+m+7)(2n+m+m'+10)(2n+m+m'+11)} \right] \quad (2.12) \end{aligned}$$

要するに上にえられた式は、(2.12) の形の係数をもつた a_m ($m=0, 1, \dots, m-1$) に関する多元 1 次方程式となる。このような方程式が有意義な解をもつためには、係数でつくった行列式の値が 0 であればよい。このようにして固有値 y の近似値が求まるのである。

一般の場合を上記に説明したが、実さいには (2.5) の T_m としてその第 1 項だけを用いれば、それでもう十分に精度のよい y の近似値を求めることができる。すなわち (2.12) の m, m' を 0 とした式を 0 に等しくおけばよいのである。たとえば $n=2$ のときには

$$A=60, \quad B=420, \quad D=360, \quad E=420, \quad F=720 \quad (2.13)$$

となり、結局

$$y^2=1761, \quad y=42.0 \quad (2.14)$$

となる。これが (T2.9) のすぐ後でのべた結果である。なお $y=42$ なる値は、先にわれわれがもつと精密な計算を行つてえた値とも一致しているし、また Bullard と Gellman が N.P.L. の電子計算機 A.C.E. を用いてえた値⁽⁶⁾とも一致している。引用論文⁽⁶⁾の V という記号がわれわれの y に相当し、同論文の、 $\varepsilon \rightarrow \infty$, $Qr = \varepsilon r^2 (1-r)$ なる場合がわれわれの今考えている場合に相当する。同論文の 242 頁、下段の最も右のらんに示されているように、彼らのえた固有値は $V \equiv y = 42.05$ である。われわれの用いた方法の簡単さから考えて、この一致は驚ろくべきものである。

全く同様にして次の結果がえられる。

$$n=4, \quad y=70.9 \quad (2.15)$$

$$n=6, \quad y=117 \quad (2.16)$$

$$n=8, \quad y=179 \quad (2.17)$$

これらの結果が (T.3.8) の後及び (T.3.12) の後に用いられている。先に引用した論文 (6) の 256 頁で、Bullard 及び Gellman が A.C.E. を用いた結果を発表している。同頁下段の最も右のらんがわれわれの (2.15) に対応した結果である。彼らのえた値は $V \equiv y = 65.5$ で、(2.15) とすこし違つているように見える。しかし彼らも彼らの論文中で認めているように、256 頁の結果はすこしあやしい。たとえば (T.3.5) で竹内が証明したように、この場合 $S_1 \equiv 0$ でないといけないうのに、彼らの結果では S_1 が 0 となつていない。あれこれ考えると、この場合はむしろわれわれの結果 (2.15) の方が、よりよい近似のように思われる。(2.16), (2.17) に対応した Bullard-Gellman の結果はえられていない。世界最優秀の電子計算機の一つに数えられる A.C.E. をもつてしても、Bullard らの方法によつて、(2.16), (2.17) に対応した結果をうることは今のところ不可能である。これは同計算機の記憶装置が $32 \times 32 = 1024$ 個しかないことに原因している。こういうわけで、(2.16), (2.17) を独立にたしかめる方法はないが、われわれの方法が $n=2, n=4$ の場合にみせた有効さから考えて、 $n=6, 8$ に対する結果 (2.16), (2.17) も十分信頼してよいと思われる。

§ 3.

(T.3.13) 及びその前後にのべたことの証明。便宜上論文 T 中に用いた ξ の函数 $T_n^m(\xi)$, $S_n^m(\xi)$ などのかわりに、Bullard, Gellman らが引用論文 (6) 中に用いた函数 $T_n^m(r)$, $S_n^m(r)$ などを用いる。 T 論文の附録の表 1 に示したように、両者の間には次表のような関係がある。

以下引用論文 (6) を B 論文とよび, B 論文中の式 (45) を (B.45) のように略記することにする. まず基本方程式が (B. 22), (B.23) のように書かれることに注意する. ただ今の問題

第 1 表	
Bullard-Gellman	われわれ
r	ξ
$S_n^m(r)$	$-\xi^{n+1}S_n^m(\xi)$
$T_n^m(r)$	$-\xi^{n+1}T_n^m(\xi)$
V	y
ε	$\alpha = x/y$
$Q_S(r)$	$-\xi^3V_2^{20}(\xi)$
$Q_T(r)/\varepsilon$	$-\xi^2V_1^0(\xi)$

では $S_\alpha = S_2^{20}$, $T_\alpha = T_1^0$ であるが, このときの (B.22), (B.23) の右辺の係数は表の形にして, B 論文の 264 265 ページにかけてある. この節での計算を Bullard-Gellman 流の函数 $T_n^m(r)$, $S_n^m(r)$ を用いて行いうわけも, このように便利な表があるからである. われわれの論文⁽⁴⁾⁽⁶⁾ にも, この表と同内容の関係がえられているが, 結果の整理のしかたがすこしまずかった. われわれは地球核中の流体のトロイダルな流

れがポロイダルな流れより大変に大きい場合, すなわち $\varepsilon \rightarrow \infty$ の場合を問題にしている. このような場合, (T.3.1), (T.3.2) の前後におけるようにして, 次のことが証明できる. すなわちまず $T_n^0(r)$ ($n=2, 4, 6, \dots$) が ε のオーダーの無限大になる. 従つて

$$T_n^0(r) = \varepsilon \bar{T}_n^0(r) \quad (3.1)$$

とおけば, $\bar{T}_n^0(r)$ は有限 (1 のオーダー) になる. 次に $S_n^0(r)$ ($n=1, 3, 5, \dots$), $S_n^{20}(r)$ ($n=3, 5, 7, \dots$), $T_n^{28}(r)$ ($n=2, 4, 6, \dots$) が 1 のオーダーの函数になる. 最後に上にのべた以外の函数は, $1/\varepsilon$ あるいはそれ以下のオーダーになることが示される. これらは, (B.22), (B.23) の各項のオーダーをみつめれば容易にえられる結果である. そして $\bar{T}_n^0(r)$ ($n=2, 4, 6, \dots$), $S_n^0(r)$ ($n=1, 3, 5, \dots$), $S_n^{20}(r)$ ($n=3, 5, 7, \dots$), $T_n^{28}(r)$ ($n=2, 4, 6, \dots$) に対する有意義な式として, 表 2 のようなものがえられる. その表をかかげる前に, この場合 “無意義な” 式とみなしたものの一例をあげておこう. それはたとえば (T.2.1) の最後の式である. この式で $x \rightarrow \infty$ とすることが Bullard-Gellman 流のあつかいで $\varepsilon \rightarrow \infty$ とすることに対応している. このとき $S_1^0, T_2^{28} \sim O(1)$ (1 のオーダー) となることは先にのべた. 従つて問題の式は, T_2^{20} が $O(1/x)$ あるいは $O(1/\varepsilon)$ なることを示す以外の何物でもない. このような式を一応考慮の外におくと, 表 2 のような式が残るのである. この表については多少の説明を要する. たとえば表の第 2 の横のらんには S_{n-5}^{28} というみだしがついており, これを横にたどつてゆくと, S_{n-5}^{20} 及び $\bar{T}_{n-4}^0$ の下に $\times$ 印がついており, その他のところには何もしるされていない. これは S_{n-5}^{28} に対する方程式から, $S_{n-5}^{20}(r)$, $\bar{T}_{n-4}^0(r)$ に対する一つの関係式がえられることを示している. ここに S_{n-5}^{28} に対する式というのは, (B.22) の S_7 が S_{n-5}^{28} であるような式のことである. $\varepsilon \rightarrow \infty$ の場合, S_{n-5}^{28} 自体は $O(1/\varepsilon) \rightarrow 0$ であるが, その S_{n-5}^{28} に対する方程式から, $S_{n-5}^{20}(r)$, $\bar{T}_{n-4}^0(r)$ に対する 1 つの関係式がえられるのである. 実はこういつてはまちがいになる. 正しくは S_{n-5}^{28} に対する式から $\bar{T}_{n-6}^0(r)$, $S_{n-6}^{20}(r)$, $\bar{T}_{n-4}^0(r)$, に対する 1 つの関係式がえられると言わなければなら

第 2 表

	T_{n-6}^{2s}	S_{n-5}^{2c}	$\bar{T}_{n-4}^0$	T_{n-4}^{2s}	S_{n-3}^0	S_{n-3}^{2c}	$\bar{T}_{n-2}^0$	T_{n-2}^{2s}	S_{n-1}^0	S_{n-1}^{2c}	$\bar{T}_n^0$	T_n^{2s}
T_{n-6}^{2c}	×	×	×									
S_{n-5}^{2s}		×	×									
$\bar{T}_{n-4}^0$			×		×							
T_{n-4}^{2c}		×	×	×		×	×					
S_{n-3}^0		×		×	×	×		×		×		
S_{n-3}^{2s}			×			×	×					
$\bar{T}_{n-2}^0$					×		×		×			
T_{n-2}^{2c}			×			×	×	×		×	×	
S_{n-1}^0						×		×	×	×		×
S_{n-1}^{2s}							×			×	×	
$\bar{T}_n^0$									×		×	
T_n^{2c}							×			×	×	×

ぬ。そのわけは、表 2 は左の方 (n の小さい方) へも、右の方 (n の大きい方) へも、また上の方 (n の小さい方) へも下の方 (n の大きい方) へもずつとつづいており、ここにはその一部をとりだしたただけだからである。上にのべた事情を一般に

$$S_{n-5}^{2s} \rightarrow \bar{T}_{n-6}^0, \quad S_{n-5}^{2c}, \quad \bar{T}_{n-4}^0$$

とするすことにする。同様にして一般に

$$\bar{T}_{n-4}^0 \rightarrow S_{n-5}^0, \quad \bar{T}_{n-4}^0, \quad S_{n-3}^0$$

$$T_{n-4}^{2c} \rightarrow \bar{T}_{n-6}^0, \quad S_{n-5}^{2c}, \quad \bar{T}_{n-4}^0, \quad T_{n-4}^{2s}, \quad S_{n-4}^{2c}, \quad \bar{T}_{n-2}^0$$

$$S_{n-3}^0 \rightarrow S_{n-5}^{2c}, \quad T_{n-4}^{2s}, \quad S_{n-3}^0, \quad S_{n-3}^{2c}, \quad T_{n-2}^{2s}, \quad S_{n-1}^{2c}$$

のような関係がある。表 2 はその一部をとりだして示したものである。

S_n^0, T_n^0 のようにしるした時の添字 n は、磁場を球函数に展開した時の次数 (degree を示している。そこで当面のダイナモの問題で、磁場が n 次より高次の項をふくまないと仮定しよう。すなわち表 2 が右端及び下端でうちきられたとしよう。このとき次のことが証明できる。すなわちこの場合 0 にならないのは $T_{n-4}^{2s}, S_{n-3}^{2c}, \bar{T}_{n-2}^0, T_{n-2}^{2s}, S_{n-1}^0, S_{n-1}^{2c}, \bar{T}_n^0, T_n^{2s}$ の 8 つだけで、その他の函数は全部 0 になる。これを証明するには数学的帰納法を用いる。すなわち上にのべた命題が $n=n-2$ に対して真であり、この段階までに 0 ならないで残る函数が $T_{n-6}^{2s}, S_{n-5}^{2c}, \bar{T}_{n-4}^0, T_{n-4}^{2s}, S_{n-3}^0, S_{n-3}^{2c}, \bar{T}_{n-2}^0, T_{n-2}^{2s}$ だけであるという前提の下に、 $n=n$ の段階で $T_{n-6}^{2s}, S_{n-5}^{2c}, T_{n-4}^{2s}, S_{n-3}^0$ が 0 になり、最初にのべた 8 つの函数だけが 0 にならずに残ることを示せばよい。 $n=4$ のときには、定義により $T_{-2}^{2s}=S_{-1}^{2c}=T_0^{2s}=0$ であり、また (T.3.5) で証明したように $S_1^0=0$ であるから、数学的帰納法を用いる準備はすでにととのついているわけである。

上にのべたことの証明は次のようにする。まずこの段階での議論にあらわれる函数はすべて表 2 の最上横らんにあらわれており、これにつづく横らんに議論に必要な式がすべて示されていることに注意する。また実さいの計算に用いる (B.22), (B.23) の係数は B 論文の 264, 265 ページに示されている。たとえば表 2 の第 2 式, 第 6 式, 第 10 式から, 函数 $S_{n-5}{}^{2c}$ が $\bar{T}_{n-4}{}^0$ によつて, 函数 $S_{n-3}{}^{2c}$ が $\bar{T}_{n-4}{}^0$, $\bar{T}_{n-2}{}^0$ によつて, 函数 $S_{n-1}{}^{2c}$ が $\bar{T}_{n-2}{}^0$, $\bar{T}_n{}^0$ によつて次のようにあらわされることがわかる。

$$\begin{aligned} S_{n-5}{}^{2c} &= -18 \frac{Q_s}{Q_r} \frac{\bar{T}_{n-4}{}^0}{(n-4)(n-5)(2n-7)}, \\ S_{n-3}{}^{2c} &= \frac{18Q_s}{Q_r(n-2)(n-3)} \left\{ -\frac{\bar{T}_{n-2}{}^0}{(2n-3)} + \frac{\bar{T}_{n-4}{}^0}{(2n-7)} \right\}, \\ S_{n-1}{}^{2c} &= \frac{18Q_s}{Q_r n(n-1)} \left\{ -\frac{\bar{T}_n{}^0}{(2n+1)} + \frac{\bar{T}_{n-2}{}^0}{(2n+1)} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここに Q_s , Q_r はある r の函数であるが, その具体的な形は今のところ問題にしないでよい。次に表 2 の第 4 式, 第 8 式, 第 12 式から, 次のような関係がえられる。

$$\begin{aligned} 2Q_r T_{n-4}{}^{2s} &= \frac{(n-5)(n-6)}{(2n-9)} \left(\dot{Q}_r - 2 \frac{Q_r}{r} \right) S_{n-5}{}^{2c} \\ &\quad + \frac{18}{(n-4)(n-3)(2n-5)(2n-9)} \left[2(n^2-7n+9)Q_s \dot{\bar{T}}_{n-4}{}^0 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 3(n-2)(n-5)\dot{Q}_s - 4(n^2-7n+9)\frac{Q_s}{r} \right\} \bar{T}_{n-4}{}^0 \right] \\ &\quad - \frac{(n-2)(n-1)}{(2n-5)} \left(\dot{Q}_r - 2 \frac{Q_r}{r} \right) S_{n-3}{}^{2c} \\ &\quad - \frac{6(n-1)}{(n-3)(2n-3)(2n-5)} \left\{ 3Q_s \dot{\bar{T}}_{n-2}{}^0 + \left(n\dot{Q}_s - 6\frac{Q_s}{r} \right) \bar{T}_{n-2}{}^0 \right\}, \\ 2Q_r T_{n-2}{}^{2s} &= -\frac{6(n-4)}{(n-2)(2n-7)(2n-5)} \left[3Q_s \dot{\bar{T}}_{n-4}{}^0 - \left\{ (n-5)\dot{Q}_s + 6\frac{Q_s}{r} \right\} \bar{T}_{n-4}{}^0 \right] \\ &\quad + \frac{(n-3)(n-4)}{(2n-5)} \left(\dot{Q}_r - 2 \frac{Q_r}{r} \right) S_{n-3}{}^{2c} \\ &\quad + \frac{18}{(n-2)(n-1)(2n-1)(2n-5)} \left[2(n^2-3n-1)Q_s \dot{\bar{T}}_{n-2}{}^0 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 3n(n-3)\dot{Q}_s - 4(n^2-3n-1)\frac{Q_s}{r} \right\} \bar{T}_{n-2}{}^0 \right] \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{(2n-1)} \left(\dot{Q}_r - 2 \frac{Q_r}{r} \right) S_{n-1}{}^{2c} \\ &\quad - \frac{6(n+1)}{(n-1)(2n+1)(2n-1)} \left[3Q_s \dot{\bar{T}}_n{}^0 + \left\{ (n+2)\dot{Q}_s - 6\frac{Q_s}{r} \right\} \bar{T}_n{}^0 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2Q_r T_n^{2s} = & -\frac{6(n-2)}{n(2n-3)(2n-1)} \left[3Q_s \dot{T}_{n-2}^0 - \left\{ (n-3)\dot{Q}_s + 6\frac{Q_s}{r} \right\} \bar{T}_{n-2}^0 \right] \\
& + \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-1)} \left(\dot{Q}_r - 2\frac{Q_r}{r} \right) S_{n-1}^{2c} \\
& + \frac{18}{n(n+1)(2n+3)(2n-1)} \left[2(n^2+n-3)Q_s \dot{T}_n^0 + \left\{ 3(n+2)(n-1)\dot{Q}_s \right. \right. \\
& \left. \left. - 4(n^2+n-3)\frac{Q_s}{r} \right\} \bar{T}_n^0 \right] \quad (3.3)
\end{aligned}$$

ただしここに $\dot{Q}_r = \frac{dQ_r(r)}{dr}$, $\dot{T}_n^0 = \frac{d\bar{T}_n^0}{dr}$, ... である. さらに第2表の第5式から次の式がえられる.

$$\begin{aligned}
V^{-1} \{ r^2 \ddot{S}_{n-3}^0 - (n-3)(n-2)S_{n-3}^0 \} = & \frac{3(n-4)(n-5)^2(n-6)}{(2n-9)(2n-7)} \{ 3Q_s \dot{S}_{n-5}^{2c} - (n-4)\dot{Q}_s S_{n-5}^{2c} \} \\
& + \frac{18(n-4)(n-5)}{(2n-7)} Q_s T_{n-4}^{2s} - \frac{9(n-1)(n-4)}{(2n-3)(2n-7)} \{ 2(n^2-5n+3)Q_s \dot{S}_{n-3}^{2c} \\
& - (n-3)(n-2)\dot{Q}_s S_{n-3}^{2c} \} - \frac{18n(n-1)}{(2n-3)} Q_s T_{n-2}^{2s} \\
& + \frac{3(n-1)n^2(n+1)}{(2n-3)(2n-1)} \{ 3Q_s \dot{S}_{n-1}^{2c} + (n-1)\dot{Q}_s S_{n-1}^{2c} \} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

(3.2) を (3.3) に代入すると T_{n-4}^{2s} , T_{n-2}^{2s} , T_n^{2s} が $\bar{T}_{n-4}^0$, $\bar{T}_{n-2}^0$, $\bar{T}_n^0$ 及びその微係数であらわされる. この結果及び (3.2) を (3.4) の右辺に代入すれば, 右辺が $\bar{T}_{n-4}^0$, $\bar{T}_{n-2}^0$, $\bar{T}_n^0$ 及びその微係数であらわされるはずである. ところでその右辺の $\dot{T}_{n-4}^0$, $\bar{T}_{n-4}^0$, $\dot{T}_{n-2}^0$, $\bar{T}_{n-2}^0$, $\dot{T}_n^0$, $\bar{T}_n^0$ の係数を別々に計算すると, これらがすべて0になってしまう. すなわち (3.4) は

$$r^2 \ddot{S}_{n-3}^0 - (n-3)(n-2)S_{n-3}^0 = 0 \quad (3.5)$$

となるのである. (T.3.5) におけると同様にして, これから

$$S_{n-3}^0 \equiv 0 \quad (3.6)$$

がえられる. この結果を第2表の第3式に代入すると

$$r^2 \ddot{T}_{n-4}^0 - (n-4)(n-3)\bar{T}_{n-4}^0 = 0 \quad \therefore T_{n-4}^0 \equiv 0 \quad (3.7)$$

となり, ついで第2式及び第1式から

$$S_{n-5}^{2c} \equiv 0, \quad T_{n-6}^{2s} \equiv 0 \quad (3.8)$$

がえられる. かくて目的とする証明がおわる.

§4.

ダイナモ問題にあらわれる磁場の次数(degree)が最高 n であり, かつトロイダルな流体運動

がポロイダルなそれより大変大きい場合には、0 にならないで残る磁場が T_{n-4}^{2s} , S_{n-3}^{2e} , $\bar{T}_{n-2}^0$, T_{n-2}^{2s} , S_{n-1}^0 , S_{n-1}^{2e} , $\bar{T}_n^0$, T_n^{2s} の 8 つにかぎられることは、前節に証明した。ところでこのようにして残つた 8 つの磁場に関する方程式を整理すると、結局 $\bar{T}_n^0$ に関する 4 階の微分方程式がえられる。そのことは次のようにして証明される。まず表 2 の第 9 番目の方程式から

$$\begin{aligned} V^{-1}\{r^2\ddot{S}_{n-1}^0(n-1)-nS_{n-1}^0\} &= \frac{3(n-2)(n-3)^2(n-4)}{(2n-3)(2n-5)}\{3Q_s\dot{S}_{n-3}^{2e}-(n-2)\dot{Q}_sS_{n-3}^{2e}\} \\ &+ \frac{18(n-2)(n-3)}{(2n-3)}Q_sT_{n-2}^{2s}-\frac{9(n+1)(n-2)}{(2n+1)(2n-3)}\{2(n^2-n-3)Q_s\dot{S}_{n-1}^{2e} \\ &-n(n-1)\dot{Q}_sS_{n-1}^{2e}\}-\frac{18(n+2)(n+1)}{(2n+1)}Q_sT_n^{2s} \end{aligned} \quad (4.1)$$

なる方程式がえられる。(3.2), (3.3) を用いると、(4.1) の右辺は $\bar{T}_{n-4}^0$, $\bar{T}_{n-2}^0$, $\bar{T}_n^0$ 及びその微係数であらわされる。ところで (3.7) により $\bar{T}_{n-4}^0 \equiv 0$ となるから、これに関する部分は考えなくてよい。ついで $\bar{T}_{n-2}^0$ 及び $\dot{\bar{T}}_{n-2}^0$ の係数を計算すると、これらがすべて 0 になつてしまう。かくて (4.1) の右辺は $\bar{T}_n^0$ 及び $\dot{\bar{T}}_n^0$ に関する部分のみとなり、次のような式がえられる。

$$\begin{aligned} V^{-1}\{r^2\ddot{S}_{n-1}^0-(n-1)nS_{n-1}^0\} &= \frac{Q_s^2}{Q_r}\dot{\bar{T}}_n^0\left\{-\frac{162(4n^4+12n^3-13n^2-33n+13)}{(2n+1)^2(2n+3)(2n-3)(2n-1)}\right\} \\ &+ \frac{Q_s}{Q_r}\bar{T}_n^0\left\{-\frac{54(n+2)(2n^3+13n^2+17n-12)}{(2n+1)^2(2n+3)(2n-1)}\dot{Q}_s\right. \\ &\left.+\frac{324(n+2)(n+3)}{(2n+1)^2(2n+3)}\frac{Q_s}{r}\right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

また表 2 の第 11 式から次の関係がえられる。

$$V^{-1}\{r^2\ddot{\bar{T}}_n^0-n(n+1)\bar{T}_n^0\}=-\frac{(n-1)n}{(2n-1)}\left(\dot{Q}_r-2\frac{Q_r}{r}\right)S_{n-1}^0 \quad (4.3)$$

表 1 の対応関係を利用すると、(4.2), (4.3) と (2.1) が同等であることがわかる。(2.1) から (T.3.14) すなわち $\bar{T}_n^0$ に関する 4 階の微分方程式がえられることは明らかであろう。

§ 5.

§ 3 及び § 4 における議論では、磁場が時間に無関係すなわち定常的であると仮定した。

あるいは定常的であるための条件を求めたといつてもよい。もちろん流体運動の場の方は、最初から定常的であると仮定している。ここ数年来われわれの行つてきた研究の結果をせんじつめれば、次のようになる。「定常的であると仮定した流体運動の大きさが適当であれば、それによつて磁場を定常的にたもつことができる」。ただこのような定常ダイナモを実験室で実

現することは不可能である。われわれのえた結論によれば、 κ を流体の比電気伝導度(e.m.u.), a を実験装置の代表的な長さ(cm), v を流体運動速度(cm/sec) とするとき, $4\pi\kappa av \sim 10^2$ であれば磁場が定常にたもたれる。水銀くらいの $\kappa \sim 10^9$ のものを $a \sim 10$ くらいのいれものにいれて, 定常ダイナモをつくるには $v \sim 10^2 = 10 \text{ km/sec}$ くらいの流体運動が必要になる。逆に実験室で手におえるくらいの v を用いようとすれば, 地球くらいの大きさのいれものを要するであろう。これではとても定常ダイナモを地上に実現することは不可能である。しかし筆者らの考えでは, やや間接的な方法によつて, ダイナモ理論を実験的に検討することができると思う。遠くない将来に, すぐれた実験設備をもつたどこかの研究室で, 次のような実験が行われると思う。最初何とかしてつくりあげた磁場も, そのまま放置すれば減衰してしまう。これは現象論的にみれば **free decay** の問題であり, エネルギー論的にみれば電磁場のエネルギーからジュール熱へのうつりかわりの問題である。ここでモーターその他を用いて導体の流体を駆動する。磁場の流体運動への反作用その他にうちかつて, 流体運動は常に定常的になるようにする。このとき流体運動の型が適当であれば, 流体運動は磁場の減衰を妨げるであろう。流体運動の型及び大きさが適当であれば, 磁場を定常的にたもつことすら可能であるという先にわれわれのえた結果は, このことを暗示している。すなわち流体運動の大きさを大きくすればするほど, 磁場の減衰は小さくなり, 遂に流体運動の大きさがある値になれば, 減衰=0, すなわち定常的な磁場がえられるであろう。さらに流体運動の大きさを大きくすれば, 磁場を増幅することすら可能であろう。可能といつても理論的に可能なだけで, 磁場を増幅するような流体運動を実験室で実現することは, 上にのべた定常ダイナモを実現することよりさらに困難である。実験室で検証できそうに思われるのは, 上に予想した結果の一つ, すなわち流体運動を 0 からだんだん大きくしてゆくと, 磁場は **free decay** の状態から, だんだん減衰が小さくなるだろうという結果である。

こういうことを念頭において, 次のような問題を考える。今までと同様に流体運動は定常とし, またトロイダルな流れがポロイダルな流れより大変大きい, すなわち $\varepsilon \rightarrow \infty$ と仮定する。このとき §3 及び §4 の議論はどのように変わるだろうか。もちろん今度は一般に磁場は定常的でないから, (B.22), (B.23) の $r^2 \frac{\partial S_\gamma}{\partial t}$, $r^2 \frac{\partial T_\gamma}{\partial t}$ のような項を考慮しなければならない。しかし (3.1) の前後で行つた各磁場の大きさのみつもりは前と変らない。(3.2), (3.3) の式も変らない。(3.4) の式の左辺の $\{ \}$ 内には $-r^2 \frac{\partial S_{n-3}^0}{\partial t}$ なる項が加れるであろう。(3.4) の右辺は前と同様にして 0 となり

$$\frac{\partial S_{n-3}^0}{\partial t} = \dot{S}_{n-3}^0 - \frac{(n-3)(n-2)}{r^2} S_{n-3}^0 \quad (5.1)$$

なる式がえられる。これは S_{n-3}^0 場の free decay の方程式に他ならない。すなわち (5.1) の S_{n-3}^0 は時間とともに減衰する。これを

$$S_{n-3}^0 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad (5.2)$$

とすることにする。同様にして (3.7) に対応して

$$\bar{T}_{n-4}^0 \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

がえられ、また (3.8) に対応して

$$S_{n-5}^{2c}, \quad T_{n-6}^{2s} \rightarrow 0 \quad (5.4)$$

がえられる。§3 で用いた数学的帰納法の $n=n-2$ 段階では (5.2), (5.3), (5.4) と類似の

$$T_{n-8}^{2s}, \quad S_{n-7}^{2c}, \quad \bar{T}_{n-6}^0, \quad S_{n-5}^0 \rightarrow 0 \quad (5.5)$$

なる関係がなりたっているはずである。上の議論では (5.5) の函数が全部 0 であるかのように考えているが、これは大きなまちがいはならないであろう。(5.5) のように考えれば、たとえば (5.1) は

$$\frac{\partial S_{n-3}^0}{\partial t} - \dot{S}_{n-3}^0 + \frac{(n-3)(n-2)}{r^2} S_3^0 \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

となるが、これからえられる結論は (5.2) と同じ $S_{n-3}^0 \rightarrow 0$ である。

全く同様にして、(4.2), (4.3) に対応した次の結果がえられる。まず (4.2), (4.3) の左辺の { } 内に $-r^2 \frac{\partial S_{n-1}^0}{\partial t}$, $-r^2 \frac{\partial \bar{T}_{n-1}^0}{\partial t}$ なる項が加わる。また (4.2), (4.3) の等号 = のかわりに $\rightarrow$ としなければならぬ。すなわち各式の両辺が等しいという関係は、 $t \rightarrow \infty$ とともになりたつ。しかしこのような系の時間的特性は、両辺を等しいとおいた式を用いて十分に論じられると思う。実さい問題としては $t=0$ から free decay time に相当したある時間だけ経過した後には、各式の両辺を等しいとおいてよいのだから。このような議論を、次の機会に行いたいと思つている。

参 考 文 献

- (1) 竹内 均: The dynamo theory of the earth's main magnetic field. J. Phys. Earth **4** (1956), 11.
- (2) 竹内 均, 島津康男: On a self-exciting process in magneto-hydrodynamics. J. Phys. Earth. **1** (1952), 1
- (3) 同上 (II) J. Phys. Earth. **1** (1952), 57.
- (4) 同上 (III) J. Phys. Earth. **2** (1953), 5.
- (5) 同上 J. Geophys. Res. **58** (1953), 497.
- (6) E. C. Bullard and H. Gellman. Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. Phil. Trans. Roy. Soc. London. **247** (1954), 213.